Интернет-журнал «Науковедение» ISSN 2223-5167 http://naukovedenie.ru/
Том 7, №2 (2015) http://naukovedenie.ru/index.php?p=vol7-2
URL статьи: http://naukovedenie.ru/PDF/156EVN215.pdf
DOI: 10.15862/156EVN215 (http://dx.doi.org/10.15862/156EVN215)

УДК 519.2:330

Ежкова Валентина Геннадьевна
ГОУ ВО МО «Московский государственный областной гуманитарный институт»
Россия, г. Орехово-Зуево[1]
Доцент кафедры «Экономики, управления и бизнеса»
Кандидат педагогических наук
E-mail: Weilert-A@yandex.ru

Логико-математический аппарат метода проверки статистических гипотез

[1] 142600, Россия, Московская область, г. Орехово-Зуево, ул. Зеленая, 22

Аннотация. Степень убедительности рассуждения решающим образом зависит от средств, используемых для обоснования истинности. В статистических исследованиях, где любые утверждения формулируются в виде гипотез, это приобретает особое значение.

В статье обоснована необходимость создания математического аппарата, приспособленного для анализа, обработки и обобщения статистического материала из разных областей. Любое статистическое исследование придерживается вероятностной логики, где высказывания имеют вид гипотез. Метод проверки гипотез, наряду с методом оценки распределения, считается одним из основных математико−статистических методов. Нами разработан логико-математический инструментарий метода проверки статистических гипотез. Ключевым моментом данного метода считаем идею метода доказательства «от противного». В начале проведенного исследования была определена возможность использования косвенного метода для проверки статистических гипотез. Для выявления особенностей схемы рассуждения «от противного» использовался универсальный инструмент − математическая логика со специальным языком и особой техникой. В результате детального анализа были описаны структура косвенного доказательства и структура доказательства «от противного», представлены различные схемы доказательства «от противного» на языке математической логики.

Формирование четких представлений о математической сути метода рассуждения «от противного» способствует правильному пониманию процесса анализа статических исследований и получению достоверных выводов.

Ключевые слова: vатематическая статистика; математико-статистические методы; вероятностная логика; логическая структура вероятностной системы; статистические гипотезы; методы проверки статистических гипотез; косвенное доказательство; метод рассуждения (доказательства) «от противного».

Ссылка для цитирования этой статьи:

Ежкова В.Г. Логико-математический аппарат метода проверки статистических гипотез // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 7, №2 (2015) http://naukovedenie.ru/PDF/156EVN215.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/156EVN215

Прикладные статистические методы широко используются в практической деятельности людей, работающих в различных областях: естественно−научных, инженерных, гуманитарных. Неслучайно, что методы статистического анализа применяют в своей профессиональной деятельности специалисты столь разных сфер. С одной стороны статистика (общая теория статистики) является отраслью общественных наук. С другой, через развитие математических аспектов теории вероятностей статистика приобрела законченные черты математической теории (математическая статистика). Таким образом, статистику можно считать универсальным инструментом анализа самых разнообразных явлений и процессов и единственной методологией при работе с обширным статистическим материалом во всех областях науки.

Изучение массовых явлений в обществе (природе, технике, науке) методами теории вероятностей и их научное обоснование составляет задачу математической статистики, которая является частью теории вероятностей в том смысле, что каждая ее задача есть по существу задача (иногда весьма своеобразная) теории вероятностей. Уточняя это сравнение,можно сказать, что в теории вероятностей, зная природу некоторого явления (состав совокупности объектов), можно выяснить, как будут вести себя (как распределены) те или иные изучаемые нами характеристики, которые можно наблюдать в экспериментах. В математической статистике, наоборот, исходными данными являются экспериментальные данные (как правило, это наблюдения над случайными величинами), а требуется вынести то или иное суждение или решение о природе изучаемого явления.

Важность для статистики теории вероятностей выражается и в том, что статистика придерживается так называемой вероятностной логики.

Вероятностными называются такие бесконечно значимые логические системы, истинностные значения которых интерпретируются как вероятностные оценки (истинности) высказываний; иначе говоря, высказывания имеют вид гипотез: «Вероятно, что (истинно) p», оцениваемых элементами числового интервала от 0 («невозможность») до 1 («достоверность»). Современные исследования в области вероятностной логики тесно переплетаются с работами в сфере индуктивной логики, то есть логики эмпирических обобщений, и логики правдоподобных рассуждений.

В многозначных логиках используются не два, а более значений истинности; в самой «простой» из них истинностных значений оказывается три−истинность, ложность и неопределенность. В бесконечно значимых логиках предполагается счетно−бесконечное (перечислимое числами натурального ряда) или даже континуальное множество значений истинности. Такие логики моделируют свойство человеческих суждений располагаться на «непрерывной» шкале правдоподобия (достоверность, правдоподобие различной степени, абсолютная ложность).

Отказ от принципа обязательной дихотомии «истина −ложь» является важным завоеванием логико−математической мысли XX века, отражающим диалектическую природу человеческого познания. Математика есть не только и даже не столько отдельная и особая научная дисциплина или область научного исследования, сколько определенный стиль, способ теоретического мышления, характеризующий достаточно высокий уровень его развития.

Логическая структура вероятностных систем выражается в самом факте использования нового математического аппарата для отображения статистических закономерностей. Этот новый аппарат−теория вероятностей−пришел на смену методам математического анализа, в частности методам теории дифференциальных уравнений. Рассмотрение сущности этих изменений входит в задачу дальнейшего анализа.

Различают две группы математико–статистических методов: методы оценки распределения и методы проверки гипотез. Основу статистического исследования данными методами составляют данные (числовые характеристики), полученные в результате наблюдений (измерений) одного или нескольких признаков исследуемого явления (совокупности объектов).

При исследовании процессов в природных и общественных системах вероятностные распределения в большинстве случаев вводятся гипотетически, косвенно. Статистическая оценка параметров распределения предусматривает получение оценок неизвестных параметров функции распределения по известным свойствам некоторого подмножества объектов (выборки), взятого из совокупности.

Статистическая проверка гипотез предполагает выдвижение определенных допущений (гипотез) относительно вида функции распределения или относительно его неизвестных параметров. Вероятностная гипотеза в статистических теориях обычно формулируется на основании соображений симметрии, допущения о равновозможности определенных исходов исследуемого процесса, соображений о практической независимости отдельных рядов событий и т.д.

Проверяется вероятностная гипотеза обычно также косвенным образом. Сущность проверки заключается в том, чтобы установить, согласуются ли экспериментальные данные и выдвинутая гипотеза. При проверке принято оперировать двумя понятиями: нулевая гипотеза (H_0 − гипотеза о сходстве) и альтернативная гипотеза (H_1 − гипотеза о различии). Правильность этих гипотез проверяется на основе выборки, и в зависимости от результата проверки гипотезы принимаются или отвергаются.

Узловой момент метода проверки статистических гипотез– схема рассуждения "от противного".

Наряду с прямым методом и методом математической индукции, которые наиболее информативны и интуитивно понятны, для доказательства теорем в математике применяется метод от противного (*reductioadadsurdum*), один из видов косвенного доказательства. Как известно, косвенное доказательство – это доказательство, в котором тезис обосновывается при помощи введения дополнительных суждений, несовместимых с тезисом.

Применяется косвенное доказательство, как правило, в тех случаях, когда другие методы нерезультативны или сложны. Такое происходит по ряду причин: недостаточно явной информации, неявная информация недоступна, прямая проверка занимает слишком много времени или невозможна и др.

Для определения сущности доказательства необходимо выявить его логическую структуру. Существенная связь между теорией математического доказательства и теорией доказательства в логике всегда имела место. Но только математическую логику со специальным языком и особой техникой можно считать инструментом для исследований в теории доказательств и в области оснований математики.

Структура косвенного доказательства следующая: необходимо доказать $G \vdash T$. Допускают, что $G \vdash \neg T$ или устанавливают следование $G, \neg T \vdash \neg A$. По свойствам следования имеем: $G, \neg T \vdash A$. Но по правилу приведения к абсурду из $G, \neg T \vdash \neg A$ и $G, \neg T \vdash A$, получаем $G \vdash \neg\neg T$ или $G \vdash T$, то есть $G \vdash T$.

Условные обозначения:

G – множество гипотез, исходных положений, конечная последовательность формул;

T – доказываемое утверждение (суждение, гипотеза);

$\urcorner$ – знак отрицания;

$\vdash$ – знак выводимости (следования);

$\rightarrow$ – знак импликации.

В исчислении высказываний, специальном разделе математической логики, существует формальное доказательство данной схемы [3].

Доказательство «от противного» является одной из форм косвенного доказательства. Оно относится к экзистенциальным видам математических доказательств (доказательство существования объектов, не приводя ни одного примера; так называемый Канторовский метод). Название метода не точно, так как в действительности это доказательство от противоречащего. Но такова традиция.

В доказательстве *reductioadadsurdum*выделяют две части: приведение к нелепости (абсурду) и применение закона исключенного третьего. Метод затрагивает важные проблемы логики: определение истины и лжи, истолкование противоречия и доказательства, построение отрицания суждений различных конструкций. Это фундаментальные вопросы не только логики, но и всего мышления.

Известны несколько схем доказательства *reductioadadsurdum:*

1) $\underline{G,\urcorner B\vdash\urcorner A}$

   $G,A\vdash B,$

2) $\underline{G,\urcorner A\vdash B,\urcorner B}$

   $G\vdash A,$

3) $\forall x\in E(P(x)\rightarrow Q(x))\equiv\urcorner(\forall x\in E(P(x)\rightarrow Q(x)))\rightarrow C\&\urcorner C.$

Представленные схемы описывают различные подходы в доказательстве:

1) правило вывода, обратное к контрапозиции;
2) доказательство выводимости формулы $((\urcorner A\rightarrow B)\&(\urcorner A\rightarrow\urcorner B)\rightarrow A)$;
3) схема указывает на равносильность формул логики предикатов и может быть записана в виде закона косвенного доказательства: $\vdash((\urcorner A\rightarrow C\&\urcorner C)\rightarrow A)$.

Идея доказательства «от противного» следующая: принимается утверждение о том, что данное утверждение *T* не является истинным, то есть истинно утверждение *не-T* (антитезис). Необходимо опровергнуть это отрицание путем логических рассуждений при помощи других предложений; опровергается отрицание демонстрацией того, что его допущение ведет к противоречию (противоречивому утверждению). Делается вывод о том, что предложение неверно, а верна исходная теорема.

В качестве исходного утверждения *T* рассмотрим теорему (суждение, гипотезу) вида «если A, то B» ($A\rightarrow B$). Сформулируем и запишем суждение, противоречащее тезису, и предположим его истинность:$\urcorner T:\urcorner(A\rightarrow B)\equiv A\&\urcorner B$.

Из антитезиса выводится противоречие с принятыми условиями. Противоречивое суждение можно записать по-разному:

1) $C\&\urcorner C$– тождественно−ложная формула, где C–любая формула;
2) $\urcorner A$ (из предложения $A\&\urcorner B\equiv$и получаем $A\equiv$и, тогда $\urcorner A\equiv$л);
3) B (из предложения $A\&\urcorner B\equiv$и получаем $\urcorner B\equiv$и, тогда $B\equiv$л).

Запишем получившиеся формулы:

(1) A&˥B→C&˥C;

(2) A&˥B→˥A;

(3) A&˥B→B.

Все формулы равносильны формуле (A→B) и могут использоваться при доказательстве последней. В построенных схемах увеличилось число условий, что расширяет возможности проводить доказательства (исследование). В первой формуле заключение представлено в виде любой тождественно‒ложной формулы. Это вносить некоторую неопределенность в рассуждения. Этого недостатка лишены две последние формулы, в которых противоречия связаны с условиями. Формулы (2) и (3) не имеют существенных различий, выбор каждой определяется условием задачи.

Метод «от противного» основан на использовании равносильности формул. Заявленные формулы не являются единственно возможными. Существует бесчисленное множество формул, равносильных исходной (A→B), но все они будут иметь более сложную структуру, чем рассмотренные, и провести доказательство с их помощью будет сложнее.

Если подвергнуть формулу (A&˥B→˥A) дальнейшим равносильным преобразованиям, то можно получить широко распространенную схему доказательства «от противного» (˥B→˥A), которая в системе взаимосвязанных теорем является контрапозицией к исходной теореме (A→B).

Закон контрапозиции заключается в том, что условное высказывание (A→B) подвергается конверсии (B→A), затем инверсии (˥B→˥A). Контрапозитивная форма доказательства считается одной из наиболее простых.

Как можно видеть, все способы основаны на эквивалентности формул. Выбор эквивалентной формулы может объясняться, прежде всего, соображениями удобства в построении доказательства.

Реальные ситуации (задачи) содержат, как правило, значительно более сложные предложения, чем те, которые разобраны. Если число рассматриваемых возможностей не ограничивается одним условием, то выбор «удобной» схемы доказательства гипотезы становится определяющим.

Если говорить о стандартной записи теоремы, то следует учитывать кванторный смысл утверждения и в структурной формуле восстановить кванторы. Это задачи из другого раздела математической логики – логики предикатов [3].

Применительно к анализу статистических исследований рассуждение "от противного" проводится по схеме: еслитребуется доказать, что имеет место эффект некоторого воздействия, предполагаем, что эффекта нет, т.е. результат его воздействия нулевой, что эквивалентно равенству нулю математического ожидания некоторой случайной величины. Затем, используя это предположение, а также некоторые дополнительные, без которых невозможен расчет вероятностей, показываем, что вероятность получить при данных предположениях данный результат ниже назначенного порога (уровня значимости). Это позволяет отвергнуть исходное предположение (об отсутствии эффекта) и утверждать, что эффект имеет место.

Необходимость создания математического аппарата, специально приспособленного для анализа случайных явлений, вытекала из потребностей обработки и обобщения обширного статистического материала во всех областях науки. Поскольку числа отражают тонкие и неповторимые моменты статистических явлений, выводы о числах, полученные на основании математической обработки нельзя непосредственно перенести к описываемой ими специфической реальности. Полученные выводы требуют аккуратной и даже в определенной степени критически к себе настроенной интерпретации. В идеале эта интерпретация должна опираться не только на выводы, поставляемые компьютерными статистическими программами, но и на понимание сути проделываемых операций и преобразований. Чем богаче представление о логико − математической сути применяемых методов, в том числе статистико − вероятностного способа оценки (не) правоты статистических утверждений, тем яснее понимание полученных результатов и выше уровень абстрактно − математического мышления исследователя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вуколов Э.А. Основы статистического анализа. / Э.А. Вуколов. 2-е изд., испр. и доп. − М.: ФОРУМ: ИНФРА−М, 2013. – 464 с. – (Высшее образование). ISBN 978−5−91134−231−9 (ФОРУМ), ISBN 978−5−16−006359−1 (ИНФРА−М).
2. Громыко Г.Л. Теория статистики: учебник. − 5−е изд., перераб. и доп. − М.: ИНФРА–М, 2014. – 452 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). ISBN 978−5−16–005432–2.
3. Ежкова В.Г. Вариации метода от противного. // Объединенный научный журнал, №4−5, − М., 2012. – 29-33 с. ISSN 1729−3707.
4. Ермолаев О.Ю. Математическая статистика для психологов: учебник. / О.Ю. Ермолаев. − М.: Московский психолого−социальный институт: Флинта, 2002. −336 с. − (Библиотека психолога). ISBN 5−89349−361−3 (Флинта), ISBN 5−89502−310−X (МПСИ).
5. Клини С.К. Математическая логика: Пер. с англ. / Под. ред. Г.Е. Минца. Изд. 2−е, стереотипное.–М.: Едиториал УРСС, 2005.–480 с. ISBN 5−354−01011−X.
6. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. / Курс лекций. – СПб.: Изд–во «Лань», 1998.–288 с. ISBN 5−8114–0082–9.
7. Лысенко С.Н., Дмитриева И.А. Общая теория статистики: учебное пособие. − М.: ИД «Форум»: ИНФРА–М, 2014. – 209 с. – (Профессиональное образование). ISBN 978−5−8199–0270–7 (ИД «Форум»), ISBN 978−5−16–002653–4 (ИНФРА–М).
8. Плохотников К.Э. Статистика: учеб. пособие. / К.Э. Плохотников, С.В. Колков. М.: Флинта: МПСИ, 2008. − 288 с. − (Экономика и управление). ISBN 978−5−89349−998−8 (Флинта), ISBN 978−5−89502−947−3 (МПСИ).
9. Социально−экономическая статистика: учебник для бакалавров / под. ред. М.Р. Ефимовой. − 2−е изд., перераб. и доп. − М.: Издательство Юрайт, 2013. – 591 с. − Серия: Бакалавр. Углубленный курс. ISBN 978−5−9916−2500−5.
10. Фадеева Л.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / Л.Н. Фадеева, А.В. Лебедев; под ред. Л.Н. Фадеевой. − 2−е изд., перераб. и доп.− М.: Экспо, 2010. −496 с. − (Новое экономическое образование). ISBN 978−5−699−35345−3.

Рецензент: Картвелишвили Василий Михайлович, профессор кафедры «Математические методы в экономике», доктор физико-математических наук, ФГБОУ ВПО «РЭУ им. Г.В. Плеханова».

EzhkovaValentina Gennadievna
Associate Professor of Economics, Management and Business Chair
Russia, Orekhovo-Zuyevo
E-mail: Weilert-A@yandex.ru

Logical-mathematical methodology of statistical hypotheses testing

Abstract. The degree of reasoning persuasiveness is critically dependent on the means used to justify the truth. It is of particular importance in statistical investigations, where any statements are in the form of hypotheses.

The article proves the necessity of the mathematical apparatus creation adapted for the analysis, processing and compilation of statistical material from different areas. Any statistical study follows a probabilistic logics where statements have the form of hypotheses. Method of testing hypotheses, along with the estimation method of the distribution, is considered one of the main mathematical and statistical methods. We have developed logical-mathematical apparatus method of statistical hypothesis testing. The key point of this method is believed to be “by contradiction” reasoning scheme. At the beginning of the study the use of indirect method to test statistical hypotheses was defined. To identify features of reasoning “by contradiction” we used the universal apparatus − mathematical logics with special language and special technique. As a result of the detailed analysis the structure of indirect reasoning and reasoning structure “by contradiction” have been described, various schemes of reasoning by contradiction” in the language of mathematical logics have been presented.

The article describes the logical-mathematical methodology of hypotheses testing, the peculiarities of the reasoning “by contradiction” scheme are stated as its basis. The formation of clear conception of the method mathematical essence contributes to the proper understanding of the statistical analysis research process and drawing valid conclusions.

Keywords: mathematical statistics; mathematical-statistical methods; probabilistic logics; the logical structure of probabilistic system; statistical hypotheses; methods of statistical hypotheses verification; indirect reasoning; “by contradiction” reasoning scheme.

Том 7, №2 (март - апрель 2015)
publishing@naukovedenie.ru

REFERENCES

1. Vukolov E.A. Osnovy statisticheskogo analiza. / E.A. Vukolov. 2-e izd., ispr. i dop. − M.: FORUM: INFRA−M, 2013. – 464 s. – (Vysshee obrazovanie). ISBN 978−5−91134−231−9 (FORUM), ISBN 978−5−16−006359−1 (INFRA−M).

2. Gromyko G.L. Teoriya statistiki: uchebnik. − 5−e izd., pererab. i dop. − M.: INFRA–M, 2014. – 452 s. – (Vysshee obrazovanie: Bakalavriat). ISBN 978−5−16–005432–2.

3. Ezhkova V.G. Variatsii metoda ot protivnogo. // Ob"edinennyy nauchnyy zhurnal, №4−5, − M., 2012. – 29-33 с. ISSN 1729−3707.

4. Ermolaev O.Yu. Matematicheskaya statistika dlya psikhologov: uchebnik. / O.Yu. Ermolaev. − M.: Moskovskiy psikhologo−sotsial'nyy institut: Flinta, 2002. −336 s. − (Biblioteka psikhologa). ISBN 5−89349−361−3 (Flinta), ISBN 5−89502−310−Kh (MPSI).

5. Klini S.K. Matematicheskaya logika: Per. s angl. / Pod. red. G.E. Mintsa. Izd. 2−e, stereotipnoe.–M.: Editorial URSS, 2005.–480 s. ISBN 5−354−01011−Kh.

6. Likhtarnikov L.M., Sukacheva T.G. Matematicheskaya logika. / Kurs lektsiy. – SPb.: Izd–vo «Lan'», 1998.–288 s. ISBN 5−8114–0082–9.

7. Lysenko S.N., Dmitrieva I.A. Obshchaya teoriya statistiki: uchebnoe posobie. − M.: ID «Forum»: INFRA–M, 2014. – 209 s. – (Professional'noe obrazovanie). ISBN 978−5−8199–0270–7 (ID «Forum»), ISBN 978−5−16–002653–4 (INFRA–M).

8. Plokhotnikov K.E. Statistika: ucheb. posobie. / K.E. Plokhotnikov, S.V. Kolkov. M.: Flinta: MPSI, 2008. − 288 s. − (Ekonomika i upravlenie). ISBN 978−5−89349−998−8 (Flinta), ISBN 978−5−89502−947−3 (MPSI).

9. Sotsial'no−ekonomicheskaya statistika: uchebnik dlya bakalavrov / pod. red. M.R. Efimovoy. − 2−e izd., pererab. i dop. − M.: Izdatel'stvo Yurayt, 2013. – 591 s. − Seriya: Bakalavr. Uglublennyy kurs. ISBN 978−5−9916−2500−5.

10. Fadeeva L.N. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika: uchebnoe posobie / L.N. Fadeeva, A.V. Lebedev; pod red. L.N. Fadeevoy. − 2−e izd., pererab. i dop.− M.: Ekspo, 2010. −496 s. − (Novoe ekonomicheskoe obrazovanie). ISBN 978−5−699−35345−3.