

Интернет-журнал «Наукovedение» ISSN 2223-5167 <https://naukovedenie.ru/>

Том 9, №6 (2017) <https://naukovedenie.ru/vol9-6.php>

URL статьи: <https://naukovedenie.ru/PDF/161TVN617.pdf>

Статья опубликована 03.02.2018

**Ссылка для цитирования этой статьи:**

Винокуров В.Н. Погрешность метода сплайнов при расчёте газостатического цилиндрического подшипника с пористым дросселем // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 9, №6 (2017)

<https://naukovedenie.ru/PDF/161TVN617.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 621.822.174<sup>1</sup>

**Винокуров Виктор Николаевич**

ГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э Баумана»

Филиал в г. Калуга, Россия, Калуга

Кандидат физико-математических наук, доцент

E-mail: bbn01@mail.ru

## **Погрешность метода сплайнов при расчёте газостатического цилиндрического подшипника с пористым дросселем**

**Аннотация.** Автор сравнивает результаты расчётов газостатического цилиндрического подшипника с пористым дросселем, выполненные двумя различными способами. В одном случае используется прямой численный метод интегрирования дифференциального уравнения, описывающего распределение давления газа в трёхмерном пористом дросселе. Этот метод принят в качестве эталонного. В другом случае, для снижения трудоёмкости вычислений, предлагается приближённый метод, когда поле давления в дросселе аппроксимируется кубическим многочленом по радиальной координате с коэффициентами, зависящими от осевой и угловой координат. Это сразу позволяет получить дифференциальное уравнение, которому подчиняется изменение давления в рабочем зазоре подшипника, без необходимости определения поля давления в трёхмерном дросселе. Расчёты показывают, что по второму методу результаты вычисления подъёмной силы оказываются несколько заниженными. Изучается одна из причин такой погрешности и обсуждаются пути усовершенствования и области применимости приближённого метода.

**Ключевые слова:** газостатический подшипник; пористый дроссель; закон Дарси; метод итераций Якоби; давление в газовом слое; подъёмная сила газового слоя

### **Введение**

Как отмечается в научной литературе [1-3], подшипники с газовой смазкой обладают некоторыми оригинальными качествами в сравнении с другими типами подшипников. Например, подшипники на газовой смазке имеют малое значение силы трения, могут работать при недопустимых для других подшипников значениях температур, не загрязняют окружающую среду, могут обеспечить большую точность вращения вала. Разумеется, есть и особенности, препятствующие их широкому применению, такие как меньшая подъёмная сила

---

<sup>1</sup> 248000, Россия, г. Калуга, ул. Баженова, д. 2

в сравнении с подшипниками с жидкостной смазкой, чрезвычайно высокие технологические требования к точности изготовления узлов подшипника.

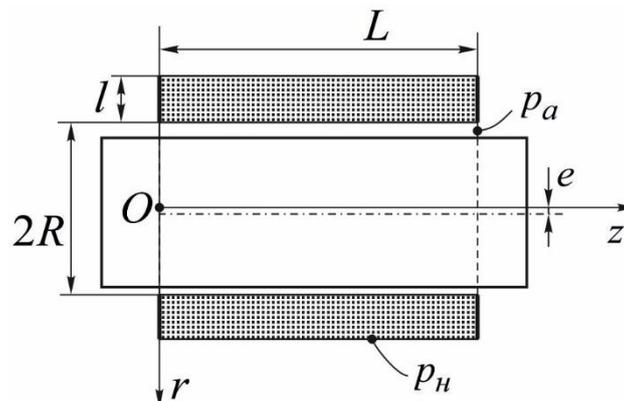
Необходимым условием устойчивой работы подшипника на газовой смазке с принудительным нагнетанием газа является наличие дросселя, исполняющего роль регулятора давления смазки в рабочем зазоре. Последние могут быть выполнены в виде тонких отверстий, узких щелей, пористых тел. В монографиях [2, 3] обосновывается, что применение пористых вставок имеет ряд преимуществ перед другими способами дросселирования газа. В этом случае за счёт лучшего распределения давления нагнетаемого газа обеспечивается большее значение подъёмной силы и такие подшипники менее склонны к неустойчивой работе.

Трудоёмкость расчёта газовых подшипников с пористыми дросселями обусловлена высокими затратами на составление программ по численному интегрированию уравнений, описывающих распределение давления в трёхмерном дросселе и рабочем зазоре. Потому исследователи уделяли внимание, так же, разработке менее трудоёмких приближённых методов. На применение некоторых из них к расчёту подшипника указывается в обзорной статье [4], где приводятся, например, понятия эффективной толщины тормозящего слоя, эквивалентного зазора. В работе [5] предлагается, при определённых упрощениях, метод решения дифференциальных уравнений, описывающих распределение давления газа в пористом теле и рабочем зазоре подшипника, в виде рядов, ограничиваясь некоторым числом их членов.

Ещё более значительными могут быть сложности точного расчёта для предложенных в последние годы конструкций подшипников на газовой смазке с частично пористыми стенками [6, 7] при условии, если необходимо будет учесть изотропность дросселя.

В работе [8] предложен приближённый метод расчёта, когда распределение давления в трёхмерном дросселе аппроксимируется кубическим многочленом по радиальной координате, с коэффициентами, зависящими от осевой и угловой координат. Естественно, встаёт вопрос о погрешности предложенного метода. В данной работе этот вопрос изучается сопоставлением результатов численных расчётов подъёмной силы по предложенному в [8] методу и прямому численному методу принятого в качестве эталонного. Эти расчёты проведены применительно к конструкции газостатического цилиндрического подшипника схематично показанного на рисунке 1.

Газ под давлением  $P_H$  подводится к наружной поверхности дросселя и, пройдя сквозь его поры, попадает в рабочий зазор подшипника, откуда, затем, выходит в окружающую среду с давлением  $P_a$ .



**Рисунок 1.** Подшипник с пористым дросселем (разработано автором)

### Первая краевая задача

В цилиндрических координатах  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  давление газа в теле изотропного пористого дросселя, при изотермическом установившемся течении, удовлетворяет дифференциальному уравнению [8]

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0, \quad (1)$$

где: использовано обозначение  $u(\varphi, z, r)=p^2$  – квадрат давления.

Следует отметить, что в некоторых работах, например [9, 10], дифференциальное уравнение, описывающее распределение давления в теле изотропного пористого дросселя цилиндрической формы, имеет вид, отличный от (1). Дело в том, что в указанных работах цилиндрический дроссель представляется развёрткой в виде прямоугольного параллелепипеда. Такое моделирование уместно, если толщина  $l$  стенки дросселя достаточно мала в сравнении с радиусом  $R$  подшипника. Но стенки дросселя с малой толщиной могут выгибаться в сторону рабочего зазора. Потому необходимо создать математическую модель, свободную от ограничения на толщину стенок.

Угловую координату  $\varphi$  условимся отсчитывать от линии минимального сближения вала и втулки. Если перейти к безразмерным переменным  $\zeta=z/L$ ,  $r_1=r/R$ ,  $U=(p/p_a)^2$  и ввести параметр относительной длины подшипника  $\lambda=L/R$ , то уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{1}{r_1}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}+\frac{r_1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}+r_1\frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2}+\frac{\partial U}{\partial r_1}=0. \quad (2)$$

Пройдя сквозь поры дросселя, газ попадает в рабочий зазор подшипника. Выделим в зазоре контрольный объём в виде параллелепипеда размером  $Rd\varphi \times dz \times h$ , где  $h=c-\varepsilon\cos\varphi=c(1-\varepsilon\cos\varphi)=c\eta$  – зазор в подшипнике,  $c$  – зазор в подшипнике при соосном расположении вала и втулки,  $\eta=1-\varepsilon\cos\varphi$  – безразмерный зазор,  $\varepsilon=e/c$  – относительный эксцентриситет. Закон сохранения массы газа в контрольном объёме позволяет получить уравнение

$$\Omega\eta^3\frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2}+\Omega\frac{\eta^3}{\lambda^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial \zeta^2}+3\Omega\eta^2\varepsilon\sin\varphi\frac{\partial U_1}{\partial \varphi}+\left(\frac{\partial U}{\partial r_1}\right)_{r_1=1}=0, \quad (3)$$

описывающее распределение давления в рабочем зазоре подшипника, где использованы обозначения:  $U_1=(p_1/p_a)^2$  – квадрат безразмерного давления в рабочем зазоре подшипника,  $\Omega=c^3/(12\sigma R)$  – безразмерный параметр.

При выводе уравнения (3) полагалось постоянство давления газа по толщине рабочего зазора, использовалась гипотеза прилипания частиц газа к стенке шипа и на основе выводов работы [11] пренебрегалось окружной и осевой составляющими скоростей частиц газа на пористой стенке, обращённой к рабочему зазору. Течение газа в дросселе описывалось законом Дарси [12].

Сформулируем граничные условия для системы уравнений (2), (3).

На входе дросселя, при  $r_1=1+\tau$ , где  $\tau=l/R$  – относительная толщина дросселя, квадрат безразмерного давления газа задаётся:

$$U|_{r_1=1+\tau} = P_H^2 \quad (4)$$

Торцы дросселя изолированы, истечение газа через торцы, минуя рабочий зазор, отсутствуют, что означает

$$\partial U / \partial \zeta = 0 \quad \text{при } \zeta=0 \text{ и при } \zeta=1. \quad (5)$$

Давление в рабочем зазоре подшипника равно давлению на поверхности дросселя, обращённой к рабочему зазору:

$$U_1 = U|_{r_1=1}. \quad (6)$$

При выходе газа из рабочего зазора давление равно атмосферному:

$$U_1 = 1 \quad \text{при } \zeta=0 \text{ и при } \zeta=1. \quad (7)$$

Кроме перечисленных условий, ещё должны быть учтены очевидные условия периодичности:

$$U(r_1, \varphi, \zeta) = U(r_1, \varphi + 2\pi, \zeta), \quad U_1(\varphi, \zeta) = U_1(\varphi + 2\pi, \zeta). \quad (8)$$

Таким образом, первая краевая задача заключается в совместном интегрировании уравнений (2) и (3) с граничными условиями (4)-(8).

### Вторая краевая задача

Согласно предложенному в [8] приближённому методу, квадрат давления газа в пористом дросселе аппроксимируется многочленом

$$u = R_0(\varphi, z) + R_1(\varphi, z) \cdot s + R_2(\varphi, z) \cdot s^2 + R_3(\varphi, z) \cdot s^3, \quad (9)$$

где:  $s$  – радиальная координата в толще дросселя с началом отсчёта на границе пористой поверхности со смазочным слоем, так что в области дросселя  $r = R + s$ .

Неизвестные функции  $R_0(\varphi, z)$ ,  $R_1(\varphi, z)$ ,  $R_2(\varphi, z)$ ,  $R_3(\varphi, z)$  определяются, если записать уравнение (1) и многочлен (9) на границе дросселя  $s=0$  и  $s=l$ .

Имея выражения последних функций, из закона сохранения массы газа в введённом выше контрольном объёме  $Rd\varphi \times dz \times h$ , можно сразу получить уравнение, описывающее распределение давления в рабочем зазоре подшипника. В работе [8] оно приведено к виду

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} a_1(\varphi) + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \zeta^2} a_2(\varphi) + \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} a_3(\varphi) + U_1 = P_H^2 \quad (10)$$

где:  $a_1(\varphi)$ ,  $a_2(\varphi)$ ,  $a_3(\varphi)$  известные зависимости координаты  $\varphi$  и параметров  $\tau$ ,  $\lambda$ ,  $\varepsilon$ ,  $\Omega$ , а  $P_H = P_H / P_a$  – безразмерное давление наддува.

Граничными условиями уравнения (10) являются равенства

$$U_1 = 1 \text{ при } \zeta = 0 \text{ и } \zeta = 1, \quad (11)$$

означающие выход газа через торцы рабочего зазора в окружающее пространство, а также условие периодичности  $U_1$  (8).

Таким образом, для предложенного в [8] приближённого метода расчёта, краевая задача заключается в интегрировании уравнения (10) при выполнении граничных условий (11), (8) без необходимости проводить интегрирование уравнения (2) по трёхмерному дросселю.

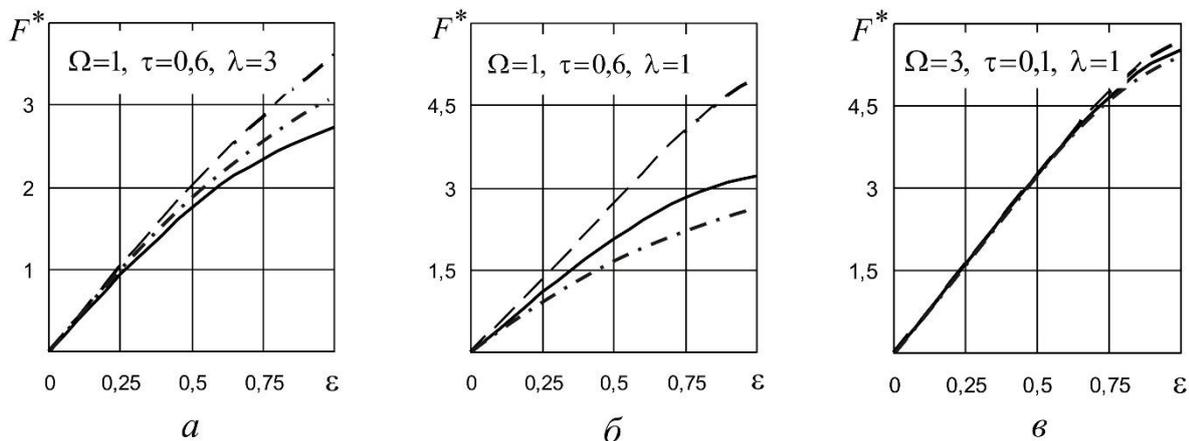
### Численное интегрирование и результаты расчётов

Для численного решения первой краевой задачи в дросселе и рабочем зазоре подшипника вводились равномерные сетки, производные в уравнениях (2) и (3) заменялись отношением конечных разностей, получающаяся при этом система линейных алгебраических уравнений весьма высокого порядка решалась методом последовательных приближений Якоби. Имея значения давления в узлах сетки можно строить эпюры давлений, вычислять интегральные характеристики, такие как подъёмную силу и жёсткость газового слоя, расход газа. При относительном давлении наддува  $P_H = 5$  и некоторых сочетаний параметров  $\Omega$ ,  $\tau$ ,

$$F^* = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{U_1} \cos \varphi d\zeta d\varphi$$

$\lambda$  зависимость безразмерной подъёмной силы от эксцентриситета  $\varepsilon$  показана на рисунках 2а – 2в пунктирной линией. Расчёты по этому методу приняты за эталонные для оценки точности приближённого метода.

При численном решении второй краевой задачи система линейных алгебраических уравнений, получаемых при замене производных в уравнении (10) отношением конечных разностей, решалась методом матричной прогонки. Полученные при этом зависимости  $F^*(\varepsilon)$  показаны на рисунках 2а – 2в сплошной линией.



**Рисунок 2.** Зависимость подъёмной силы от эксцентриситета (разработано автором)

Как видно из сравнений графиков, предложенный приближённый метод даёт заниженные значения подъёмной силы. Причём, разница в значениях подъёмной силы тем выше, чем больше толщина стенки дросселя и чем короче подшипник. Например, для подшипника с параметрами  $\Omega=1$ ,  $\tau=0,6$  и  $\lambda=3$  (рис. 2а) погрешность расчёта подъёмной силы по приближённому методу при  $\varepsilon=0,5$  составляет 11 %, а для более короткого

подшипника с  $\lambda=1$ , при сохранённых значениях других параметров (рис. 2б) погрешность в два раза выше.

На рисунке 2в приведены графики для подшипника с тонкими стенками пористого дросселя, при  $\tau=l/R=0,1$ . В этом случае кривые, построенные по различным методам расчёта, фактически сливаются и становятся едва различимыми лишь при максимальных значениях эксцентриситета  $\varepsilon$ .

Проведенный анализ позволяет сделать предположение, что основным источником погрешности приближённого метода является игнорирование в нём запрета (5) на истечение газа через торцы дросселя. Чтобы проверить это предположение, заменим в прямом численном методе интегрирования уравнения (2) условие (5) условием  $U|_{\zeta=0}=U|_{\zeta=1}=1$ , означающего, что торцы дросселя не изолированы и через них часть газа вытекает в окружающую среду, минуя рабочий зазор. При такой постановке первой краевой задачи графики  $F^*(\varepsilon)$  показаны на рисунках 2а – 2в штрихпунктирной линией. Из сравнения графиков видно, что в этом случае различие в результатах расчёта подъёмной силы по двум применённым методам значительно уменьшилось: сплошные и штрихпунктирные кривые «ближе» друг к другу, чем пунктирные и сплошные, что подтверждает, в некоторой степени, сделанное выше предположение. Отсюда, в свою очередь, следует возможный путь совершенствования обсуждаемого приближённого метода, состоящий в модифицировании функции (9) таким образом, чтоб выполнялось условие (5).

### Выводы

Анализ графиков на рисунках 2а – 2в, а также других, в данной работе не представленных, позволяет кратко сформулировать следующие выводы относительно предложенного в [8] приближённого метода.

1. Приближённый метод расчёта цилиндрических подшипников с пористым дросселем даёт несколько заниженные значения подъёмной силы при условии, если торцы дросселя изолированы.
2. Указанный приближённый метод имеет меньшую погрешность при расчёте подшипника с неизолированными торцами.
3. Точность метода растёт при уменьшении значения безразмерного параметра  $\Lambda = \tau / (\Omega \lambda) = 12 \sigma R l / (c^3 L)$ .
4. Аппроксимацию давления в изотропном цилиндрическом дросселе многочленом (9) можно рекомендовать либо как менее затратный способ расчёта для получения предварительной оценки параметров работы подшипника, либо, в случае повышенных требований к точности расчётов, при умеренных значениях относительного эксцентриситета  $\varepsilon$  и параметра  $\Lambda$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дроздович В. Н. Газодинамические подшипники. Л.: Машиностроение, 1976. 208 с.
2. Константиnescу В. Н. Газовая смазка. М.: Машиностроение, 1968. 718 с.
3. Шейнберг С. А., Жедь В. П., Шишеев М. Д. Опоры скольжения с газовой смазкой. М.: Машиностроение, 1969. 334 с.
4. Снек (H. J. Sneek). Пористые подшипники с газовой смазкой // Проблемы трения и смазки. 1968. №4. С. 161-168.
5. Мурти (P. R. K. Murti). Распределение давления в коротких пористых подшипниках // Проблемы трения и смазки. 1971. №4. С. 73-74.
6. Космынин А. В., Шаломов В. И. Аэростатические шпиндельные опоры с частично пористой стенкой вкладыша // Современные проблемы науки и образования. – 2006. – № 2. – С. 69-70; URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=221> (дата обращения: 22.12.2017).
7. Космынин А. В., Шаломов В. И., Суходоев И. Г., Виноградов С. В. О результатах экспериментальной проверки расчётных характеристик высокоскоростных шпиндельных узлов металлорежущих станков с частично пористыми газостатическими опорами // Фундаментальные исследования. – 2009. – № 1. – С. 32-32; URL: <https://fundamental-research.ru/ru/article/view?id=1691> (дата обращения: 22.12.2017).
8. Винокуров В. Н., Емельянов А. В. Новый метод расчёта цилиндрического газового подвеса с пористым дросселем [Текст] // Электронный журнал «Наука, техника и образование» №1/2016. – Калуга: ООО Манускрипт, 2016. – С. 1-9.
9. Majumdar B. C. Analysis of externally pressurized porous gas journal bearings – 1 // Wear, v. 33, № 1, 1975. P. 25-35.
10. Majumdar B. C. Design of externally pressurized gas – lubricated porous journal bearings // Tribology International, 1976. v. 9, № 2. P. 71-74.
11. Винокуров В. Н., Емельянов А. В. Теория газостатического подпятника с изотропным пористым дросселем // Проблемы машиностроения и надёжности машин №6/2014. С. 88-94.
12. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. 350 с.

**Vinokurov Victor Nikolaevich**

Moscow state technical university named after N.E. Bauman  
Kaluga branch, Russia, Kaluga  
E-mail: bbn01@mail.ru

## **The error of the spline method when calculating a gas-static cylindrical bearing with a porous throttle**

**Abstract.** The authors compares the results of calculations for a gas-static cylindrical bearing with a porous throttle made in two different ways. In one case, a direct numerical method is used to integrate a differential equation describing the distribution of gas pressure in a three-dimensional porous throttle. This method is adopted as a reference. In another case, to reduce the labor intensity of calculations, we propose an approximate method, when the pressure field in the throttle is approximated by a cubic polynomial with respect to a radial coordinate with coefficients depending on the axial and angular coordinates. This immediately makes it possible to obtain a differential equation that obeys the pressure change in the working gap of bearing, without having to determine the pressure field in the three-dimensional throttle. The calculations show that according to the second method the computing results of the uplift force appear to be somewhat understated. One of the reasons for this error is studied and the ways of improvement and the fields of applicability of the approximate method are discussed.

**Keywords:** gas-static bearing; porous throttle; Darcy's law; Jacobi iteration method; pressure in the gas layer; lifting force of the gas layer