УДК 69.04

Рекунов Сергей Сергеевич
ФГБОУ ВПО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет»
Филиал в г. Сочи
Россия, Сочи[1]
Доцент, кандидат технических наук
E-Mail: rekunoff@mail.ru

Формирование матриц откликов конечных элементов с учётом упругого основания

Аннотация. Рассмотрено применение смешанной формы метода конечных элементов к расчёту изгибаемых пластин, лежащих на грунтовом основании, позволяющей получить внутренние усилия и перемещения непосредственно из решения системы разрешающих уравнений, не прибегая к дополнительным вычислениям. Связь между внешними воздействиями и внутренними усилиями представлена через матрицу откликов конечного элемента на единичные воздействия. Установление этой связи основано на применении к рассматриваемому конечному элементу одновременно принципа возможных перемещений и принципа возможных изменений напряжённого состояния.

Предложена методика формирования матриц откликов для прямоугольных и треугольных конечных элементов. Сравнение результатов расчётов пластинчатых конструкций по методу конечных элементов в форме метода перемещений и по методу конечных элементов в смешанной форме показывает их практически полное совпадение, так как в основе этих расчётов лежат одни и те же гипотезы и допущения.

При формировании матрицы откликов конечного элемента, лежащего на упругом основании, матрица реакций в связях основной системы получается суммированием двух матриц: матрицы реакций изгибаемого конечного элемента, а также матрицы реакций упругого основания.

Ключевые слова: метод конечных элементов; смешанная форма; матрица откликов; матрица реакций; изгибаемый конечный элемент; упругое основание; расчёт; строительство.

[1] 354024, Краснодарский край, г. Сочи, ул. Чекменёва, д. 5

В настоящее время проектирование и строительство сложных высокоэффективных конструкций и сооружений в значительной степени зависят от возможностей их точного расчёта, прогнозирования их поведения при возможных изменениях полей воздействий (силовых, температурных и т.д.), возможностей проведения численных экспериментов и проверки достоверности результатов расчёта. Поэтому одним из главных направлений развития современной строительной механики является разработка новых и совершенствование известных методов расчёта конструкций и сооружений на основе математических моделей, максимально приближенных к их реальной работе.

Наиболее распространённым и универсальным численным методом строительной механики является метод конечных элементов в форме метода перемещений из-за своей простоты и высокой степени алгоритмизации расчёта. Теории и реализации этой формы метода конечных элементов посвящено большое количество научных трудов. Однако в нём имеется ряд недостатков, не позволяющих использовать его как универсальный метод. К таким недостаткам можно отнести неучтённые граничные условия, выраженные в напряжениях и усилиях, а также пониженная точность вычисления напряжений и усилий в узлах, учёт смещений конструкции как жёсткого целого и другие. Например, в программном комплексе «Лира», основанном на методе конечных элементов в форме метода перемещений, в результате расчётов пластинчатых конструкций значения внутренних усилий получаются осреднёнными для конечных элементов, то есть постоянными по всей площади. Как следствие, эпюры внутренних усилий имеют вид, не соответствующий понятиям классической школы строительной механики. Среди указанных несоответствий: в шарнирных закреплениях возникают моменты; на границах элементов появляются разрывы в полях напряжений, что приводит к выполнению дополнительных расчётов, связанных с осреднением напряжений отдельных элементов в их общий узел, и другие. Все эти обстоятельства вызвали появление ряда работ по развитию других форм метода конечных элементов – гибридные варианты, в форме метода сил, в смешанной форме.

В данной статье рассмотрено применение смешанной формы метода конечных элементов в расчётах пластинчатых систем. Одним из главных её достоинств является возможность получения искомых усилий и перемещений из решения системы разрешающих уравнений, не прибегая к дополнительным вычислениям.

В смешанной форме метода конечных элементов [2] для систем, в которых деформирование происходит по линейным законам, связь между внешними воздействиями и внутренними усилиями можно представить в следующем виде

$$[d]\{q\} = \{F\}, \tag{1}$$

где $[d]$ – матрица откликов конечного элемента на единичные воздействия,

$\{q\}$ – вектор смешанных неизвестных,

$\{F\}$ – вектор узловых откликов от внешних воздействий.

Установление этой связи опирается на применение к рассматриваемому элементу одновременно принципа возможных перемещений и принципа возможных изменений напряжённого состояния. При этом в качестве возможных изменений вектора $\{q\}$ принимаются вариации его действительных компонентов, а в качестве действительного состояния – вектор $\{F\}$.

Особенность смешанного метода заключается в определении коэффициентов матрицы откликов. В блочной форме эта матрица имеет следующий вид

$$[d]=\begin{bmatrix} r & \dot{r} \\ \dot{\delta} & \delta \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Здесь $[r]$ – матрица реакций в связях основной системы от их единичных смещений;

$[\delta]$ – матрица перемещений по направлениям основных неизвестных (силовых) при их единичных значениях;

$[\dot{r}]$ – реакции в связях основной системы от единичных значений силовых неизвестных;

$[\dot{\delta}]$ – перемещения по направлениям силовых неизвестных от единичных смещений связей основной системы.

При определении коэффициентов при неизвестных, входящих в блоки $[r]$ и $[\delta]$, за возможные принимаются действительные состояния, соответствующие основной системе.

Для определения коэффициентов при неизвестных, входящих в блоки $[\dot{r}]$ и $[\dot{\delta}]$, использование такого подхода приводит к неверным результатам. Объясняется это тем, что в смешанной основной системе от единичных перемещений, задаваемых по направлению дополнительных связей, перемещения по направлению силовых неизвестных возникают и при смещениях конечного элемента как жёсткого целого. При этих смещениях деформации конечного элемента отсутствуют и на месте $[\dot{r}]$ и $[\dot{\delta}]$ получаются нули, хотя в общем случае с учётом смещений конечного элемента как жёсткого целого они не равны нулю. Поэтому чтобы получить элементы матриц $[\dot{r}]$ и $[\dot{\delta}]$, необходимо рассмотреть другие возможные состояния.

При вычислении элементов матрицы $[\dot{r}]$ необходимо восстановить связи, удалённые при выборе основной системы смешанного метода, и перейти к основной системе метода перемещений (кинематически определимой основной системе). Состояния, возникающие при единичных смещениях восстановленных связей, принимаются за возможные при вычислении элементов матрицы $[\dot{r}]$. Элементы матрицы $[\dot{\delta}]$ находятся на основании теоремы о взаимности реакций и перемещений $[\dot{\delta}]=-[\dot{r}]^T$.

Для построения блока $[\dot{r}]$ необходимо получить функции формы, соответствующие единичным линейным смещениям связей основной системы метода перемещений для конечного элемента рассматриваемой задачи ($q_i^{(1)}=1,\ q_j^{(4)}=1,\ q_k^{(7)}=1,\ q_l^{(10)}=1$).

Связь между неопределенными коэффициентами функций формы конечного элемента и его угловыми перемещениями q устанавливается известной зависимостью

$$[V]\{\alpha\} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} V_{ii} & V_{ij} & V_{ik} & V_{il} \\ \hdashline V_{ji} & V_{jj} & V_{jk} & V_{jl} \\ \hdashline V_{ki} & V_{kj} & V_{kk} & V_{kl} \\ \hdashline V_{li} & V_{lj} & V_{lk} & V_{ll} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} q_i^{(t_1)} \\ q_j^{(t_2)} \\ q_k^{(t_3)} \\ q_l^{(t_4)} \end{array}\right\} = \{q\}, \qquad (3)$$

где $t_1 = 1, 2, 3,\ t_2 = 4, 5, 6,\ t_3 = 7, 8, 9,\ t_4 = 10, 11, 12;$

$i,\ j,\ k,\ l$ – номера узлов четырехугольного конечного элемента.

$$\text{Из (3) следует } \{\alpha\} = [V]^{-1}\{q\}. \qquad (4)$$

Положив в (3) $q_i^{(1)} = 1$, а остальные компоненты равными нулю, найдём все значения $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$ и т.д., характеризующие функцию формы, соответствующую этому смещению

$$\omega^{(1)}(x, y) = \lfloor u(x, y) \rfloor \{\alpha^{(1)}\}. \qquad (5)$$

Принимая далее поочередно $q_j^{(4)} = 1,\ q_k^{(7)} = 1,\ q_l^{(10)} = 1$, найдём все остальные функции формы, соответствующие этим смещениям:

$$\begin{aligned} \omega^{(4)}(x, y) &= \lfloor u(x, y) \rfloor \{\alpha^{(4)}\}; \\ \omega^{(7)}(x, y) &= \lfloor u(x, y) \rfloor \{\alpha^{(7)}\}; \\ \omega^{(10)}(x, y) &= \lfloor u(x, y) \rfloor \{\alpha^{(10)}\}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Компоненты векторов $\alpha^{(1)},\ \alpha^{(4)},\ \alpha^{(7)},\ \alpha^{(10)}$ являются соответствующими столбцами обратной матрицы $[V]^{-1}$.

Функции формы (6) принимаются за возможные перемещения при нахождении коэффициентов матрицы $[\dot{r}]$.

При составлении матрицы откликов конечного элемента для расчёта пластинок на изгиб в качестве основных неизвестных в каждом узле принимаются одновременно прогиб и два изгибающих момента, действующие в двух взаимно-перпендикулярных направлениях.

Для составления матриц откликов прямоугольного конечного элемента рассмотрим ортотропную (упругие свойства материала различны во взаимно перпендикулярных направлениях) плиту прямоугольной формы.

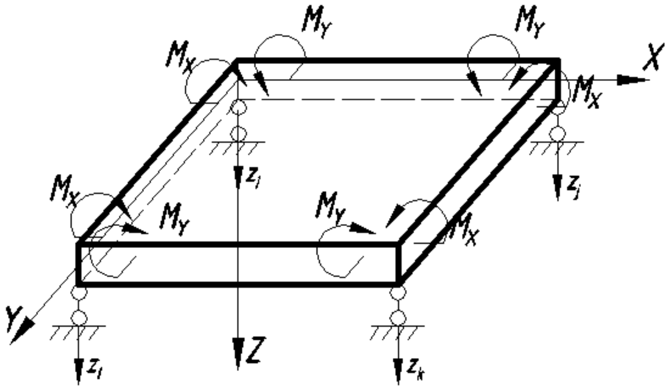

Рис. 1. *Основная система смешанного метода прямоугольного конечного элемента*

На рис. 1 представлена основная система смешанного метода для этого элемента.

За неизвестные принимаются прогибы z^t и изгибающие моменты $M_x^t,\ M_y^t$ в узловых точках $t = i, j, k, l$.

Всего в рассматриваемом элементе учитываются 12 неизвестных параметров $\{q\} = \lfloor q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5'\ q_6'\ q_7'\ q_8'\ q_9'\ q_{10}'\ q_{11}'\ q_{12}' \rfloor^T$, где компоненты $\lfloor q_1\ q_2\ q_3\ q_4 \rfloor^T = \lfloor z_i\ \ z_j\ \ z_k\ \ z_l \rfloor^T$ относятся к неизвестным линейным смещениям, а компоненты $\lfloor q_5'\ q_6'\ q_7'\ q_8'\ q_9'\ q_{10}'\ q_{11}'\ q_{12}' \rfloor^T = \lfloor M_x^i\ M_y^i\ M_x^j\ ...\ M_y^l \rfloor^T$ – к силовым неизвестным.

При узловой нагрузке функция прогибов конечного элемента $z = w(x, y)$, используемая при расчёте по методу конечных элементов в форме метода перемещений в виде неполного бикубического полинома с 12 произвольными параметрами [4], может быть принята и при расчёте в смешанной форме

$$z = w(x, y) = \lfloor \Phi(x, y) \rfloor \{\alpha\}, \tag{7}$$

где $\lfloor \Phi(x, y) \rfloor = \lfloor 1\ x\ y\ x^2\ \ y^2\ \ xy\ x^2y\ xy^2\ \ x^3\ \ y^3\ \ x^3y\ xy^3 \rfloor$,

$\{\alpha\} = \lfloor \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7\ \alpha_8\ \alpha_9\ \alpha_{10}\ \alpha_{11}\ \alpha_{12}\ \rfloor^T$.

Следуя [2], найдем элементы блоков $[r]$ и $[\delta]$ матрицы откликов (2) рассматриваемого конечного элемента:

$$\begin{bmatrix} r & \\ & \delta \end{bmatrix} = \int_0^a \int_0^b [B_1]^T [C][B_1] dxdy\ , \tag{8}$$

$$[\dot{r}] = \int_0^a \int_0^b [B_1]^T [C][B_2] dxdy\ , \tag{9}$$

где a, b – размеры конечного элемента по осям x и y соответственно.

С учётом $[\dot{\delta}] = -[\dot{r}]^T$ имеем элементы блока $[\dot{\delta}]$.

Основная система смешанного метода для изгибаемого конечного элемента в форме произвольного треугольника представлена на рис. 2,а.

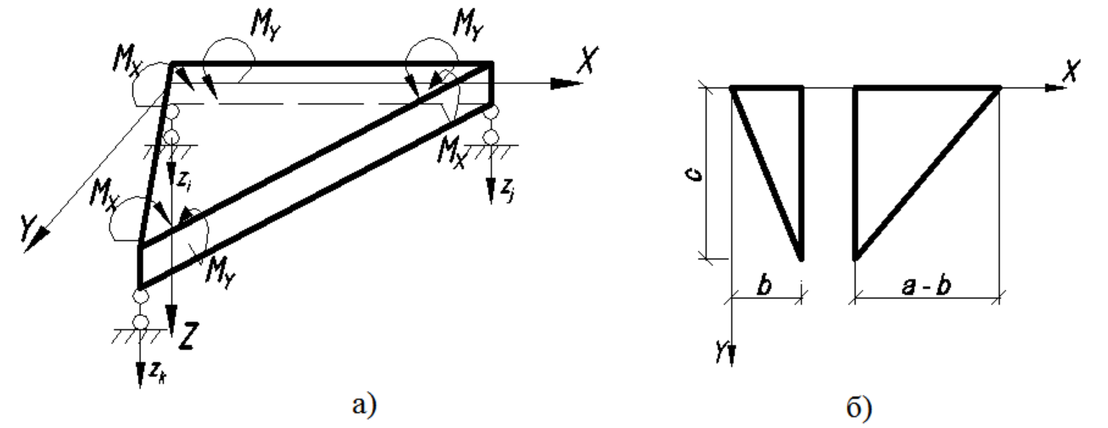

***Рис. 2.** Основная система смешанного метода треугольного конечного элемента*

За неизвестные в данном элементе принимаются прогибы и изгибающие моменты в узловых точках конечного элемента. Всего 9 неизвестных параметров: $\{q\} = \lfloor q_1\, q_2\, q_3\, q_4'\, q_5'\, q_6'\, q_7'\, q_8'\, q_9' \rfloor^T$.

В этом векторе компоненты $\lfloor q_1\, q_2\, q_3 \rfloor^T = \lfloor z_i\, z_j\, z_k \rfloor^T$ относятся к неизвестным линейным смещениям, а компоненты $\lfloor q_4'\, q_5'\, q_6'\, q_7'\, q_8'\, q_9' \rfloor^T = \lfloor M_x^i\, M_y^i\, M_x^j\, M_y^j\, M_x^k\, M_y^k \rfloor^T$ – к силовым неизвестным.

При узловой нагрузке функция прогибов конечного элемента $z = w(x, y)$ принимается в виде неполного бикубического полинома с 9 произвольными параметрами

$$z = w(x, y) = \lfloor \Phi(x, y) \rfloor \{\alpha\}, \tag{8}$$

где $\lfloor \Phi(x, y) \rfloor = \lfloor 1\ x\ y\ x^2\ y^2\ x^2y\ xy^2\ x^3\ y^3 \rfloor$,

$\{\alpha\} = \lfloor \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7\ \alpha_8\ \alpha_9 \rfloor^T$.

Определяем элементы блоков $[r]$ и $[\delta]$ матрицы откликов (2):

$$\begin{bmatrix} r & \\ & \delta \end{bmatrix} = \int_0^b \int_0^{\frac{cx}{b}} [B_1]^T [C][B_1] dxdy + \int_b^a \int_{\frac{c(a-x)}{(a-b)}}^0 [B_1]^T [C][B_1] dxdy. \tag{9}$$

Пределы интегрирования в (9) получены путём разбиения треугольного элемента на два прямоугольных треугольника (рис. 2,б). Элементы блоков каждого из проинтегрированных прямоугольных треугольников последовательно складываются.

Для формирования блока $[\dot{r}]$ используется выражение

$$[\dot{r}] = \int_0^b \int_0^{\frac{cx}{b}} [B_1]^T [C][B_2] dxdy + \int_b^a \int_{\frac{c(a-x)}{(a-b)}}^0 [B_1]^T [C][B_2] dxdy. \tag{10}$$

В настоящее время в сфере строительства преобладают тенденции к более подробному учёту физических и механических свойств строительных материалов и других особенностей, соответствующих свойствам реальных тел. Совершенствование методик расчёта наземных и подземных конструкций в виде квадратных, прямоугольных и других форм в плане элементов, взаимодействующих с деформируемым основанием.

Проблема расчёта строительных конструкций на деформируемом основании представляет собой обширный раздел современной строительной механики. Внедрение новых технологий строительства, применение качественно новых материалов, использование сложных архитектурных решений формируют повышенные требования к исследованиям динамического поведения деформируемых сред. Эти требования напрямую связаны с совершенствованием актуализированных представлений о деформационных и механических свойствах материалов с учётом условий их эксплуатации, что, в свою очередь, находит отражение в проектировании инженерных конструкций и сооружений различной сложности (фундаменты зданий и сооружений различного назначения, покрытия автомобильных дорог и аэродромов, стадионы, бассейны, плотины и т.д.). Совершенствование методов расчёта зданий и сооружений на деформируемом основании позволяет значительно сократить огромные затраты на возведение строительных объектов.

В связи с этим, развитие теории расчёта конструкций на деформируемом основании, создание эффективных методов расчёта элементов различного класса конструкций, находят всё более широкое применение в промышленном и гражданском строительстве, автомобильно-дорожном и железнодорожном строительстве, сейсмологии, геофизике, гидростроительстве и т.д. Однако на сегодняшний день в этой области научных исследований остаётся большое количество вопросов, возникающих взаимосвязанно с процессом развития современных технологий строительного производства. К таким вопросам, в первую очередь, следует отнести отсутствие единого взгляда на то, какие гипотезы должны лечь в основу этих методов, в частности, какая механическая модель грунтового основания должна использоваться в расчётах.

Существующие методы расчёта конструкций и сооружений, лежащих на грунте, в зависимости от используемых моделей упругого основания условно можно разделить на четыре группы:

1) методы, основанные на винклеровской модели основания;
2) методы, основанные на теории упругого полупространства;
3) методы, основанные на комбинированных моделях упругого основания;
4) методы, основанные на использовании вероятностного подхода при создании модели неоднородного основания.

Рассмотрим возможность учёта упругого основания в формировании матрицы откликов конечного элемента в смешанной форме метода конечных элементов. Для этого необходимо получить матрицу реакций упругого основания конечного элемента, затем элементы этой матрицы просуммировать с соответствующими элементами матрицы откликов. После пересчёта (с учётом упругого основания) всех матриц откликов составляется система разрешающих уравнений. Дальнейший расчёт выполняется так же, как и для плиты без учёта упругого основания.

Матрица откликов для пластины, лежащей на упругом основании, в блочной форме имеет следующий вид:

$$[d]=\begin{bmatrix} r' & \dot{r} \\ \dot{\delta} & \delta \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где $$[r']=[r]+[r_o]; \tag{12}$$

$[r]$ – матрица реакций изгибаемого конечного элемента;

$[r_o]$ – матрица реакций упругого основания.

Матрица реакций изгибаемого конечного элемента определяется по формуле (2). Последовательность формирования матрицы $[r]$ прямоугольного и треугольного конечных элементов изложена выше.

Для того чтобы получить элементы матрицы реакций упругого основания, используется выражение

$$[r_o] = [\tilde{V}_1]^T \left[k \int_A \Phi^T \Phi \, dA \right] [\tilde{V}_1]. \qquad (13)$$

Для этого необходимо в матрице $[V_1]^{-1}$ учитывать только столбцы, соответствующие линейным перемещениям.

Отличительной особенностью применяемых в проектной практике расчётных моделей грунтовых оснований является идеализированное представление их механических свойств. Все представленные модели могут быть использованы только для качественного анализа отображаемой действительности и оценки порядка расчётных величин. В основу построения расчётной модели грунтового основания, обладающего природной неоднородностью и неоднородностью при силовом воздействии, должен быть положен статистический подход, учитывающий в единой модели множество случайных и закономерных процессов, протекающих в основании и при взаимодействии с сооружением. В данной задаче это представляется возможным при формировании матрицы реакций упругого основания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатьев, В.А. Метод конечных элементов в задачах строительной механики [Текст] // - Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1980. 87 с.
2. Игнатьев, В.А. Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики [Текст]/В.А. Игнатьев, А.В. Игнатьев. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. Волгоград: ВолгГАСУ, 2005. 100 с.
3. Клепиков, С.Н. Расчет конструкций на упругом основании [Текст]/ - Киев: Будiвельник, 1967. 183с.
4. Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами [Текст]/ - Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 224 с.
5. Шапошников, Н. А. Колебания балки на стохастическом основании [Текст] / Н.А. Шапошников, В.А. Пшеничкина // Надежность и долговечность строительных материалов, конструкций и оснований фундаментов сб. науч. тр / VI Междунар. науч.-техн.конф., 13-14 октября 2011г. Волгоград. – Волгоград: Изд-во ВолгГАСУ, 2011.- С.263-270.
6. Пшеничкин, А. П. Практический метод расчета конструкций на стохастическом основании. [Текст] / Надежность и долговечность строительных конструкций. Волгоград, 1974. - С. 6-24.
7. Соболев, Д. Н. Статистические модели упругого основания/ Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук. - М.:МИСИ, 1973, 24 с.
8. Пшеничкина, В.А. Исследование случайных полей деформаций железнодорожного полотна на линии ст. Чум – ст. Лабытнанги Северной железной дороги [Текст] / В.А. Пшеничкина, Н. А. Шапошников - Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Сер.: Строительство и архитектура. – Волгоград: Изд-во ВолгГАСУ, 2011. – Вып.24 (43) – С.54-61.
9. Воронкова, Г.В. Исследование совместной работы здания и свайного основания на действие вертикальных и горизонтальных нагрузок методом контурных и расчетных точек [Текст] / Г. В. Воронкова, Н. В. Купчикова, А. И. Сапожников - Надежность и долговечность строительных материалов, конструкций и оснований фундаментов : материалы V Междунар. науч.-техн. конф., Волгоград, 23-24 апр. 2009 г. : [в 3-х ч.]. - Волгоград : Изд-во ВолгГАСУ, 2009. - Ч. III. - С. 232-237.
10. Рекунов, С.С. Учёт упругого основания при составлении матрицы откликов треугольного конечного элемента в смешанной форме метода конечных элементов [Текст] / Г. В. Воронкова, С.С. Рекунов. Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Сер.: Строительство и архитектура. – Волгоград: Изд-во ВолгГАСУ, 2007. – Вып.8 (27) – С.45-47.
11. Herrmann, L.R. Finite element bending analysis of plates // J. Engng. Mech. Div. ASCE, 93, No. EM-5, 1967, p. 13-26.

Рецензент: Заместитель Председателя Поволжского отделения Российской академии транспорта, академик РАТ, доктор технических наук, профессор Овчинников Игорь Георгиевич.

Выпуск 5 (24), сентябрь – октябрь 2014
publishing@naukovedenie.ru

Sergey Rekunov
Moscow State Automobile & Road Technical University (MADI)
Branch in Sochi
Russia, Sochi
E-Mail: rekunoff@mail.ru

Forming the matrix of responses of the finite elements taking into account the elastic base

Abstract. The application of the mixed form of the finite element method to the calculation of bent plates, lying on the ground base. The mixed form allows to receive force and displacement directly from the solution of the system of governing equations, without additional calculations. The connection between external influences and internal forces is represented by the matrix of responses of the finite element for single exposure. The establishment of this connection is based on the application to the elements in question at the same time the principle of virtual displacements and the principle of possible changes of the stress state.

Proposed a method of formation the matrix of responses for rectangular and triangular finite elements. Comparison of the results of calculations of plate structures by the finite element method in the form of displacements and by the method of finite elements in mixed form shows their almost complete agreement, because the basis for these calculations are the same hypotheses and assumptions.

In forming the matrix of responses finite element on the elastic base matrix of reactions to the main system is obtained by summing two matrices: matrix of reactions of bent finite element and matrix of reactions of elastic base.

Keywords: the finite element method; mixed form; matrix of responses; matrix of reactions; bent finite element; elastic base; calculation; construction.

REFERENCES

1. Ignat'ev, V.A. Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noy mekhaniki [Tekst] // - Saratov: Izd-vo Saratovskogo un-ta, 1980. 87 s.
2. Ignat'ev, V.A. Smeshannaya forma metoda konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noy mekhaniki [Tekst]/V.A. Ignat'ev, A.V. Ignat'ev. Volgogr. gos. arkhit.-stroit. un-t. Volgograd: VolgGASU, 2005. 100 s.
3. Klepikov, S.N. Raschet konstruktsiy na uprugom osnovanii [Tekst]/ - Kiev: Budivel'nik, 1967. 183s.
4. Maslennikov A.M. Raschet stroitel'nykh konstruktsiy chislennymi metodami [Tekst]/ - L.: Izd-vo LGU, 1987. 224 s.
5. Shaposhnikov, N. A. Kolebaniya balki na stokhasticheskom osnovanii [Tekst] / N.A. Shaposhnikov, V.A. Pshenichkina // Nadezhnost' i dolgovechnost' stroitel'nykh materialov, konstruktsiy i osnovaniy fundamentov sb. nauch. tr / VI Mezhdunar. nauch.-tekhn.konf., 13-14 oktyabrya 2011g. Volgograd. – Volgograd: Izd-vo VolgGASU, 2011.- S.263-270.
6. Pshenichkin, A. P. Prakticheskiy metod rascheta konstruktsiy na stokhasticheskom osnovanii. [Tekst] / Nadezhnost' i dolgovechnost' stroitel'nykh konstruktsiy. Volgograd, 1974. - S. 6-24.
7. Sobolev, D. N. Statisticheskie modeli uprugogo osnovaniya/ Avtoreferat dissertatsii na soiskanie uchenoy stepeni doktora tekhnicheskikh nauk. - M.:MISI, 1973, 24 s.
8. Pshenichkina, V.A. Issledovanie sluchaynykh poley deformatsiy zheleznodorozhnogo polotna na linii st. Chum – st. Labytnangi Severnoy zheleznoy dorogi [Tekst] / V.A. Pshenichkina, N. A. Shaposhnikov - Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Ser.: Stroitel'stvo i arkhitektura. – Volgograd: Izd-vo VolgGASU, 2011. – Vyp.24 (43) – S.54-61.
9. Voronkova, G.V. Issledovanie sovmestnoy raboty zdaniya i svaynogo osnovaniya na deystvie vertikal'nykh i gorizontal'nykh nagruzok metodom konturnykh i raschetnykh tochek [Tekst] / G. V. Voronkova, N. V. Kupchikova, A. I. Sapozhnikov - Nadezhnost' i dolgovechnost' stroitel'nykh materialov, konstruktsiy i osnovaniy fundamentov : materialy V Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf., Volgograd, 23-24 apr. 2009 g. : [v 3-kh ch.]. - Volgograd : Izd-vo VolgGASU, 2009. - Ch. III. - S. 232-237.
10. Rekunov, S.S. Uchet uprugogo osnovaniya pri sostavlenii matritsy otklikov treugol'nogo konechnogo elementa v smeshannoy forme metoda konechnykh elementov [Tekst] / G. V. Voronkova, S.S. Rekunov. Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Ser.: Stroitel'stvo i arkhitektura. – Volgograd: Izd-vo VolgGASU, 2007. – Vyp.8 (27) – S.45-47.
11. Herrmann, L.R. Finite element bending analysis of plates // J. Engng. Mech. Div. ASCE, 93, No. EM-5, 1967, p. 13-26.