

Интернет-журнал «Науковедение» ISSN 2223-5167 <http://naukovedenie.ru/>

Том 8, №5 (2016) <http://naukovedenie.ru/index.php?p=vol8-5>

URL статьи: <http://naukovedenie.ru/PDF/34TVN516.pdf>

Статья опубликована 13.10.2016.

Ссылка для цитирования этой статьи:

Паровик Р.И. Эредитарный осциллятор дуффинга с переменными дробными порядками // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 8, №5 (2016) <http://naukovedenie.ru/PDF/34TVN516.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 517.925.42

Паровик Роман Иванович¹

ФГБОУ ВПО «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга», Россия, Петропавловск-Камчатский²
ФГБУН «Институт космофизических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного

отделения Российской академии наук», Россия, Паратунка

Декан физико-математического факультета

Старший научный сотрудник лаборатории «Моделирования физических процессов»

Кандидат физико-математических наук

E-mail: romanparovik@gmail.com

SCOPUS: <http://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=44661594200>

Researcher ID: <http://www.researcherid.com/rid/F-1624-2014>

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1576-1860>

РИНЦ: http://elibrary.ru/author_items.asp?spin=4295-6894

Индивидуальный номер ученого карты Российской науки: <https://mapofscience.ru/scientist/946212>

Эредитарный осциллятор Дуффинга с переменными дробными порядками

Аннотация. В работе предложена математическая модель эредитарного нелинейного осциллятора Дуффинга с переменными дробными порядками производных, входящими в исходное уравнение. Эта модель обобщает ранее известные математические модели эредитарного осциллятора Дуффинга, а также классическую модель осциллятора Дуффинга. В зависимости от определения производной переменного дробного порядка, предложены две явные конечно разностные схемы для численного решения соответствующих задач Коши. С помощью метода двойного пересчета было показано, что предложенные явные конечно-разностные схемы могут быть использованы при моделировании эредитарного колебательного процесса Дуффинга. С помощью компьютерных экспериментов, в зависимости от различных значений управляющих параметров колебательной системы и вида функций дробных порядков производных от времени и смещения в исходном уравнении, были построены и исследованы осциллограммы и фазовые траектории для эредитарного осциллятора Дуффинга. Благодаря широкому выбору функциональных зависимостей дробных порядков от времени или даже от функции решения мы приводим к новым колебательным режимам или к режимам других колебательных систем, что может быть использовано в

¹ <http://www.mathnet.ru/rus/person32149>

<http://zbmath.org/authors/?q=au%3A%22parovik%2C%20r%2A%20i%2A%22>

<http://www.famous-scientists.ru/14876>

² 683009, Камчатский край, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Ак. Курчатова д. 39, кв. 74

различных технических системах. Результаты моделирование хорошо согласуются с ранее полученными результатами.

Ключевые слова: эредитарность; осциллятор Дуффинга; конечно-разностные схемы; осциллограммы; фазовые траектории; предельный цикл

Введение

Исследованию эредитарных процессов посвящены многочисленные работы авторов [1-7], в монографии В.В. Учайкина [8] им посвящена целая глава. Понятие «эредитарность» было введено итальянским математиком Вито Вольтерра в работе [1], которое имеет смысл «памяти» или последействия. Эффект памяти в системе заключается в том, что ее состояния в текущий момент времени зависят от состояний в предыдущие моменты времени. Поэтому эффект памяти системы можно математически описать с помощью интегро-дифференциальных уравнений, причем в подынтегральных выражениях ядро является функцией памяти. В зависимости от вида функции памяти различают: системы с «отсутствием памяти», системы с частичной «потерей памяти» и системы с наличием «полной памяти». Если функция памяти имеет степенной вид, то мы имеем систему с частичной потерей памяти, такие системы иногда в литературе называются фрактальными и их описывают с помощью дробного исчисления [9-12]. Мы будем исследовать фрактальную систему на примере колебательной системы Дуффинга (осциллятор Дуффинга).

Осциллятор Дуффинга – это нелинейная (с квадратичной нелинейностью) колебательная система, которая может испытывать бистабильное поведение под действием внешней силы, а также возможны проявления хаотических режимов. Эредитарный осциллятор Дуффинга, как показали работы [13-15], обладает свойствами классического осциллятора Дуффинга, а также может иметь колебательные режимы, присущие другим колебательным системам, которые требуют дополнительного изучения. Поэтому настоящая работа является логическим продолжением работы автора [16].

Постановка задачи и методика решения

Рассмотрим следующее эредитарное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение:

$$\int_0^t K_1(t-\tau) \ddot{x}(\tau) d\tau + \lambda \int_0^t K_2(t-\tau) \dot{x}(\tau) d\tau - x(t) + x^3(t) = \delta \cos(\omega t) \quad (1)$$

где $K_1(t-\tau)$ и $K_2(t-\tau)$ - функции памяти, λ - коэффициент вязкого трения, δ и ω - амплитуда и частота внешнего гармонического воздействия, $x(t)$ - функция смещения, $t \in [0, T]$ - время моделирования процесса.

Уравнение (1) является обобщением известного уравнения Дуффинга с вязким трением и внешним периодическим воздействием в случае учета эредитарности или эффекта памяти в колебательной системе. Степень наличия памяти в колебательной системе зависит от вида функций памяти $K_1(t-\tau)$ и $K_2(t-\tau)$ в уравнении (1). В случае, когда эти функции являются функциями Дирака (δ -функциями), то мы получаем полное отсутствие памяти в колебательной системе, если эти функции имеют вид функций Хевисайда, то мы получаем полное наличие памяти в колебательной системе. Возможен промежуточный случай, когда

функции памяти имеют степенную зависимость, в этом случае говорят, что система обладает частичной памятью. Этот промежуточный случай на наш взгляд является наиболее интересным, так как существует широкий класс процессов и явлений, в которых справедливы степенные законы [8].

Пусть функции памяти имеют следующий степенной вид:

$$K_1(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^{1-\beta(t)}}{\Gamma(2 - \beta(t))}, K_2(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^{-\gamma(t)}}{\Gamma(1 - \gamma(t))}, 1 < \beta(t) < 2, 0 < \gamma(t) < 1, \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) можно записать с помощью операторов дробного дифференцирования:

$$\partial_{0,t}^{\beta(t)} x(\tau) + \lambda \partial_{0,t}^{\gamma(t)} x(\tau) - x(t) + x^3(t) = \delta \cos(\omega t), \quad (3)$$

где

$$\partial_{0,t}^{\beta(t)} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2 - \beta(t))} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\beta(t)-1}}, \quad \partial_{0,t}^{\gamma(t)} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma(t))} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\gamma(t)}} - \text{операторы}$$

дробного дифференцирования.

В случае, если функции памяти имеют вид:

$$K_1(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^{1-\beta(\tau)}}{\Gamma(2 - \beta(\tau))}, K_2(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^{-\gamma(\tau)}}{\Gamma(1 - \gamma(\tau))}, 1 < \beta(\tau) < 2, 0 < \gamma(\tau) < 1, \quad (4)$$

то уравнение (1) примет вид:

$$\partial_{0,t}^{\beta(\tau)} x(\tau) + \lambda \partial_{0,t}^{\gamma(\tau)} x(\tau) - x(t) + x^3(t) = \delta \cos(\omega t), \quad (5)$$

где

$$\partial_{0,t}^{\beta(\tau)} x(\tau) = \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{\Gamma(2 - \beta(\tau))(t - \tau)^{\beta(\tau)-1}}, \quad \partial_{0,t}^{\gamma(\tau)} x(\tau) = \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{\Gamma(1 - \gamma(\tau))(t - \tau)^{\gamma(\tau)}} - \text{операторы}$$

дробного дифференцирования.

Уравнения (3) и (5) описывают колебательный процесс Дуффинга с частичной потерей памяти с вязким трением и внешним периодическим воздействием. Иногда в литературе системы с частичной потерей памяти называются фрактальными [11], поэтому уравнения (3) и (5) описывают класс фрактальных колебательных процессов типа Дуффинга.

Отметим, что в работе [16] было рассмотрено эредитарное уравнение Дуффинга, когда β и γ являются константами, а операторы дробного дифференцирования имели смысл операторов Герасимова-Капуто.

В работе [17] рассмотрено уравнение Дуффинга с эредитарным трением, которое было записано с помощью оператора дробного дифференцирования Римана-Лиувилля с постоянным порядком, более детально это уравнение также было исследовано в работах [18-23].

В работах [14] и [15] было проведено обобщение эредитарных уравнений Дуффинга, исследованных в работах [17-23] на случай, когда порядки дробных производных Римана-Лиувилля являются функциями от времени.

Уравнения (3) и (5) являются обобщениями эредитарного уравнения Дуффинга с постоянными дробными порядками, исследованного в работе [16].

Необходимо отметить также, что уравнения (3) и (5) легко обобщаются на случай, когда дробные параметры β и γ зависят не только от времени t , но и от смещения $x(t)$.

Для уравнений (3) и (5) естественным образом введем в рассмотрении начальные условия:

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0. \quad (6)$$

Полученные задачи Коши (3) и (6), а также (5) и (6), точных решений не имеют в силу их нелинейности. Поэтому, эти задачи мы будем решать с помощью численных методов – конечно-разностных схем [24]. Вопросы построения конечно-разностных схем для дифференциальных уравнений с производными дробных переменных порядков рассматривались в работах [25-34].

Введем равномерную сетку. Для этого разобьем отрезок $t \in [0, T]$ на N равных частей с шагом дискретизации $\tau = T/N$, тогда $x(t_j) = x_j$ – сеточное решение, аппроксимирующее точное решение $x(t)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ – индекс узла сетки. Используя аппроксимацию операторов дробных производных согласно работе [7], мы приходим к двум разным явным конечно-разностным схемам.

Для дифференциальной задачи Коши (3), (6), разностная задача имеет вид:

$$x_1 = \tau y_0 + x_0, j = 0,$$

$$x_{j+1} = A_j x_j - B_j x_{j-1} - B_j \sum_{k=1}^{j-1} p_k^j (x_{j-k+1} - 2x_{j-k} + x_{j-k-1}) -$$

$$- C_j \sum_{k=1}^{j-1} q_k^j (x_{j-k+1} - x_{j-k}) - D_j x_j^3 + D_j f_j, j = 1, \dots, N-1,$$

$$A_j = \frac{\frac{2\tau^{-\beta_j}}{\Gamma(3-\beta_j)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_j}}{\Gamma(2-\gamma_j)} + 1}{\frac{\tau^{-\beta_j}}{\Gamma(3-\beta_j)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_j}}{\Gamma(2-\gamma_j)}}, B_j = \frac{\frac{\tau^{-\beta_j}}{\Gamma(3-\beta_j)}}{\frac{\tau^{-\beta_j}}{\Gamma(3-\beta_j)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_j}}{\Gamma(2-\gamma_j)}}, C_j = \frac{\frac{\lambda\tau^{-\gamma_j}}{\Gamma(2-\gamma_j)}}{\frac{\tau^{-\beta_j}}{\Gamma(3-\beta_j)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_j}}{\Gamma(2-\gamma_j)}},$$

$$D_j = \frac{1}{\frac{\tau^{-\beta_j}}{\Gamma(3-\beta_j)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_j}}{\Gamma(2-\gamma_j)}}, p_k^j = (k+1)^{2-\beta_j} - k^{2-\beta_j}, q_k^j = (k+1)^{1-\gamma_j} - k^{1-\gamma_j}.$$

Для дифференциальной задачи Коши (5), (6), разностная задача имеет вид:

$$x_1 = \tau y_0 + x_0, j = 0,$$

$$x_{j+1} = A_0 x_j - B_0 x_{j-1} - B_0 \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\tau^{-\beta_k} p_k^j}{\Gamma(3-\beta_k)} (x_{j-k+1} - 2x_{j-k} + x_{j-k-1}) -$$

$$- C_0 \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\tau^{-\gamma_k} q_k^j}{\Gamma(2-\gamma_k)} (x_{j-k+1} - x_{j-k}) - D_0 x_j^3 + D_0 f_j, j = 1, \dots, N-1,$$

$$A_0 = \frac{\frac{2\tau^{-\beta_0}}{\Gamma(3-\beta_0)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_0}}{\Gamma(2-\gamma_0)} + 1}{\frac{\tau^{-\beta_0}}{\Gamma(3-\beta_0)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_0}}{\Gamma(2-\gamma_0)}}, B_0 = \frac{\frac{\tau^{-\beta_0}}{\Gamma(3-\beta_0)}}{\frac{\tau^{-\beta_0}}{\Gamma(3-\beta_0)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_0}}{\Gamma(2-\gamma_0)}}, C_0 = \frac{\frac{\lambda\tau^{-\gamma_0}}{\Gamma(2-\gamma_0)}}{\frac{\tau^{-\beta_0}}{\Gamma(3-\beta_0)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_0}}{\Gamma(2-\gamma_0)}},$$

$$D_0 = \frac{1}{\frac{\tau^{-\beta_0}}{\Gamma(3-\beta_0)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_0}}{\Gamma(2-\gamma_0)}}, p_k^j = (k+1)^{2-\beta_j} - k^{2-\beta_j}, q_k^j = (k+1)^{1-\gamma_j} - k^{1-\gamma_j}.$$

Заметим, что явные конечно-разностные схемы (7) и (8) можно обобщить на случай, когда дробные параметры β и γ зависят не только от времени t , но и от смещения $x(t)$, в этом случае несколько изменятся коэффициенты в соотношениях (7) и (8).

Явные конечно разностные схемы (7) и (8) являются условно устойчивыми и имеют ограничения на шаг τ . Аппроксимация во внутренних точках имеет второй порядок, однако за счет аппроксимации в граничных точках порядок снижается до первого. Точность конечно-разностных схем (7) и (8) можно контролировать с помощью правила Рунге [24].

Рассмотрим некоторые примеры применения конечно-разностных схем в зависимости от различных значений управляющих параметров, построим и исследуем осциллограммы и фазовые траектории.

Результаты численных экспериментов

Пример 1. Значения управляющих параметров: $\lambda = 0.15$, $\delta = 0.3$, $\omega = 2$, $x(0) = 0.02$, $\dot{x}(0) = 0$, $T = 100$, $N = 2000$, $\beta(x(t), t) = 1.8 - 0.001 \cdot \cos(\cos(\omega x(t)))$, $\gamma(x(t), t) = 0.8 - 0.05 \cdot \sin(\sin(\omega x(t)))$.

На рис. 1 приведены осциллограмма и фазовая траектория, полученные по расчетной формуле (7).

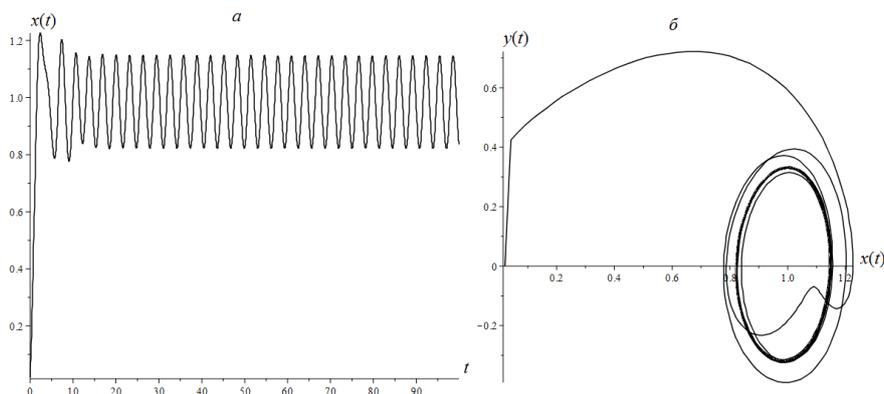


Рисунок 1. Осциллограмма и фазовая траектория, полученные по первой схеме, формула (7)

Можно отметить, что колебания в системе происходят со временем с постоянной амплитудой (рис. 1а), что соответствует выходу фазовой траектории на предельный цикл (рис. 1б).

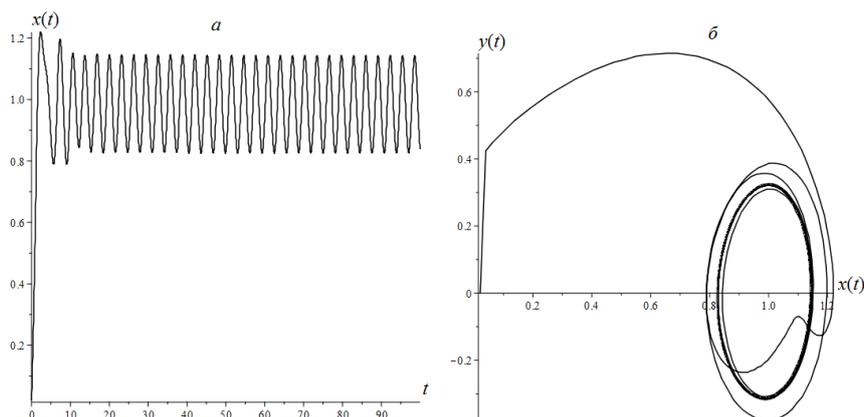


Рисунок 2. Осциллограмма и фазовая траектория, полученные по второй схеме, формула (8)

На рис. 2 приведены осциллограмма и фазовая траектория, полученные по формуле (8). Можно отметить, что осциллограмма (рис. 2а) и фазовая траектория (рис. 2б) схожа с осциллограммой (рис. 1а) и фазовой траекторией (рис. 1б). Поэтому формулы (7) и (8) для этого примера работают одинаково. Исследуем эти формулы более детально, воспользуемся правилом Рунге [24]. Рассмотрим отрезок $t \in [0, 10]$. Проведем вычисления для точек $N = 20$, $N = 40$, $N = 80$, $N = 160$, $N = 200$ по формулам (7) и (8). Также мы вычислим величины:

$$Err_1 = \max_j |x_j^1 - x_{2j}^1| \quad \text{и} \quad Err_2 = \max_j |x_j^2 - x_{2j}^2|$$

- максимальные по абсолютной величине

ошибки, причем x_j^1 - расчетные значения, полученные по формуле (7) с шагом τ , а x_{2j}^1 - расчетные значения, полученные по формуле (7) с шагом $\tau/2$. Аналогично x_j^2 - расчетные значения, полученные по формуле (8) с шагом τ , а x_{2j}^2 - расчетные значения, полученные по формуле (8) с шагом $\tau/2$. Также мы вычислим расчетный порядок точности $p_1 = \ln(Err_1)/\ln(\tau)$ для формулы (7) и $p_2 = \ln(Err_2)/\ln(\tau)$ для формулы (8). Результаты приведены в следующей таблице 1.

Таблица 1

Точность схем (7) и (8) для примера 1

N	τ	ERR ₁	ERR ₂	p_1	p_2
200	0.05	0.0157	0.0172	1.38	1.35
400	0.025	0.0104	0.0119	1.23	1.19
800	0.0125	0.0067	0.008	1.14	1.09
1600	0.00625	0.004	0.0054	1.07	1.01
2000	0.005	0.0036	0.0052	1.05	0.99

Можно отметить, что согласно значениям из табл. 1 при уменьшении шага τ ошибки Err_1 и Err_2 и расчетные точности p_1 и p_2 также уменьшаются. Уменьшение ошибок Err_1 и Err_2 говорит о сходимости схем (7) и (8). Также заметим, что согласно правилу Рунге: $|x_j - x_{2j}| \approx |x(t_j) - x_{2j}|$, где $x(t_j)$ - точное решение, которое нам неизвестно. Поэтому Err_1 и Err_2 можно считать погрешностями вычислений для формул (7) и (8). Значения расчетных

точностей P_1 и P_2 близки к единице. На рис. 3 приведены фрагменты расчетных кривых, полученные по формулам (7) и (8), которые соответствуют данным табл. 1.

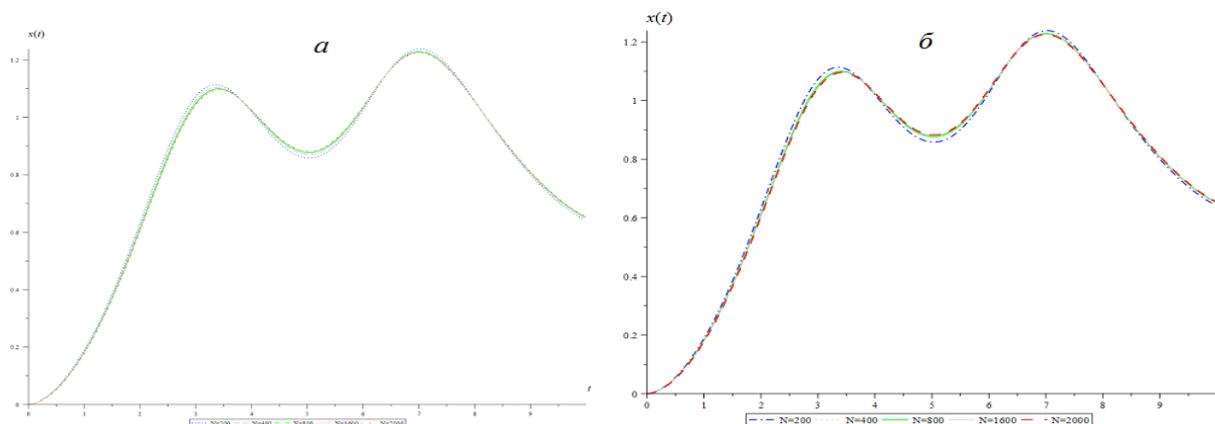


Рисунок 3. Фрагменты расчетных кривых с разными значениями узловых точек N , полученные по формуле (7) - а и формуле (8) - б

На рис. 3 видно, что при увеличении расчетных узлов N , кривые стремятся к некоторой устойчивой кривой, что говорит о сходимости конечно-разностных схем (7) и (8). Так как аппроксимация схем (7) и (8) имеет первый порядок, а расчетные точности близки к единице, то мы можем предположить, что порядок сходимости этих схем не выше первого.

Пример 2. Управляющие параметры $\lambda = 0.3$, $\delta = 20$, $\omega = 1$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $T = 100$, $N = 2000$, $\beta(t) = 1.6 - 0.001 \cdot t$, $\gamma(t) = 0.7 - 0.005 \cdot t$. На рис. 4 приведены осциллограмма и фазовая траектория, полученные по формуле (7).

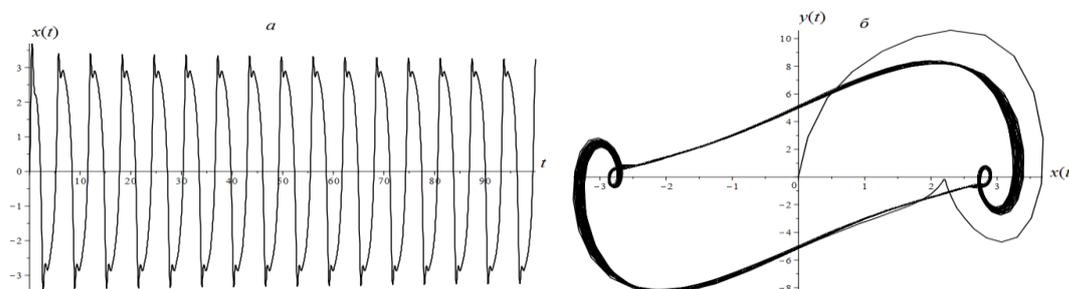


Рисунок 4. Осциллограмма и фазовая траектория, рассчитанные по формуле (7)

Необходимо отметить, что на осциллограмме (рис. 4а) колебания для этого примера происходят с постоянной, но с раздвоенной амплитудой (рис. 4а). Такая осциллограмма похожа на осциллограммы для эрдитарного осциллятора Дуффинга, полученные в работах [13, 15], а также напоминает осциллограмму для другого эрдитарного нелинейного осциллятора - осциллятора Ван дер Поля [35]. Аналогично дело обстоит с фазовой траекторией (рис. 4б). Мы видим, что фазовая траектория выходит на предельный цикл и так как амплитуда колебаний раздвоенная, то мы видим на нем две симметричные петли, это характерно для автоколебательной эрдитарной системы Ван-дер-Поля [35].

На рис. 5 приведены другие расчетные осциллограмма и фазовая траектория, которые получены по формуле (8).

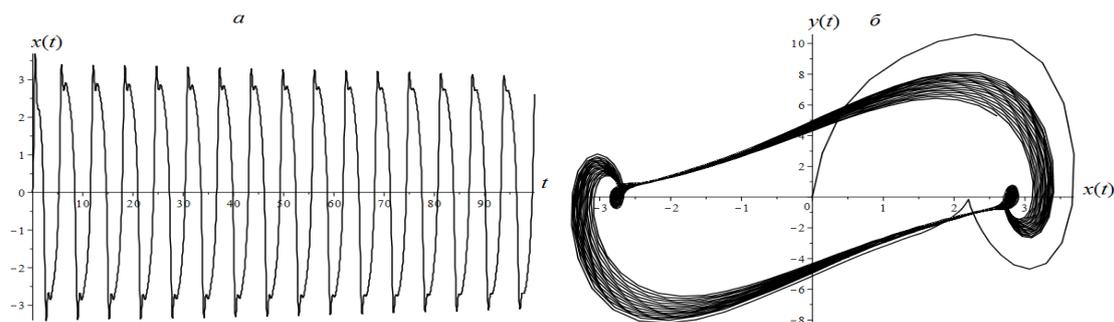


Рисунок 5. Осциллограмма и фазовая траектория, рассчитанные по формуле (8)

Осциллограмма и фазовая траектория на рис. 5 схожа с осциллограммой и фазовой траекторией на рис. 4, поэтому можно использовать формулы (7) и (8) для численного счета соответствующих дифференциальных задач Коши (3), (6) и (5), (6). Действительно, проведем исследование этих схем с помощью правила Рунге. Результаты приведены в следующей таблице.

Таблица 2

Исследование схем (7) и (8)

N	τ	ERR ₁	ERR ₂	p_1	p_2
20	0.05	0.1307	0.1308	0.679	0.678
40	0.025	0.0947	0.0948	0.6388	0.6384
80	0.0125	0.0715	0.0716	0.6019	0.6013
160	0.00625	0.0533	0.0535	0.5774	0.576
200	0.005	0.0482	0.0484	0.5719	0.5713

Из табл. 2 мы видим, что с увеличением количества расчетных узлов N , абсолютная по модулю ошибка уменьшается, вычислительные точности схем p_1 и p_2 меньше единицы и тоже уменьшается с увеличением N . Фрагменты расчетных кривых, которые соответствуют данным табл. 2 на отрезке $t \in [0,1]$ приведены на рис. 6.

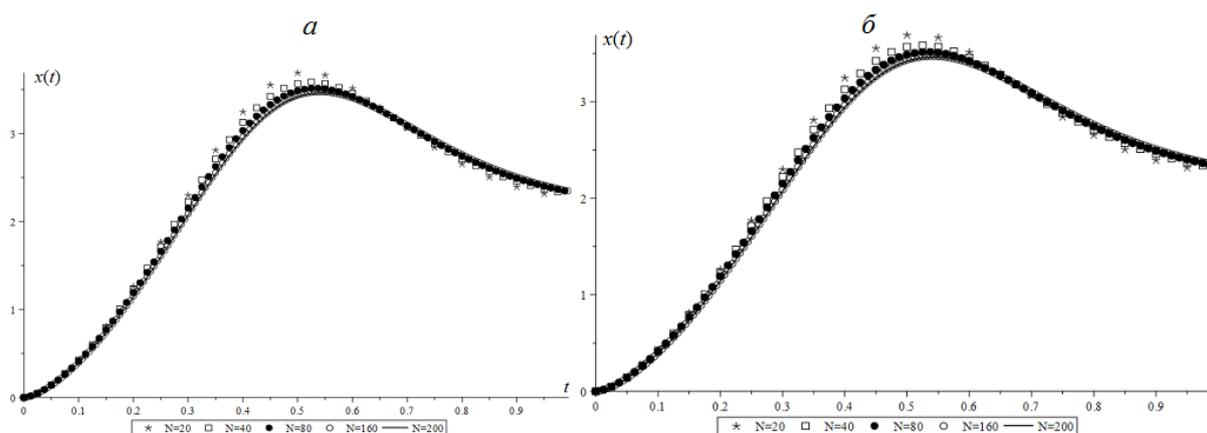


Рисунок 6. Фрагмент расчетных кривых, полученных по формуле (7) и по формуле (8)

На рис. 6 видно, что расчетные кривые при уменьшении шага τ стремятся к более устойчивой кривой, что говорит о сходимости схем (7) и (8). Поэтому эти схемы вполне можно использовать в численном моделировании эредитарного осциллятора Дуффинга с переменными дробными порядками.

Пример 3. Управляющие параметры $\lambda = 0.3$, $\delta = 10$, $\omega = 1$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $T = 100$, $N = 2000$, $\beta(t) = 1.8 - 0.001 \cdot t \cos(\omega t)$, $\gamma(t) = 0.8 - 0.005 \cdot t \sin(\omega t)$.

На рис. 7 приведены расчетные кривые и фазовая траектория, полученные по формуле (7).

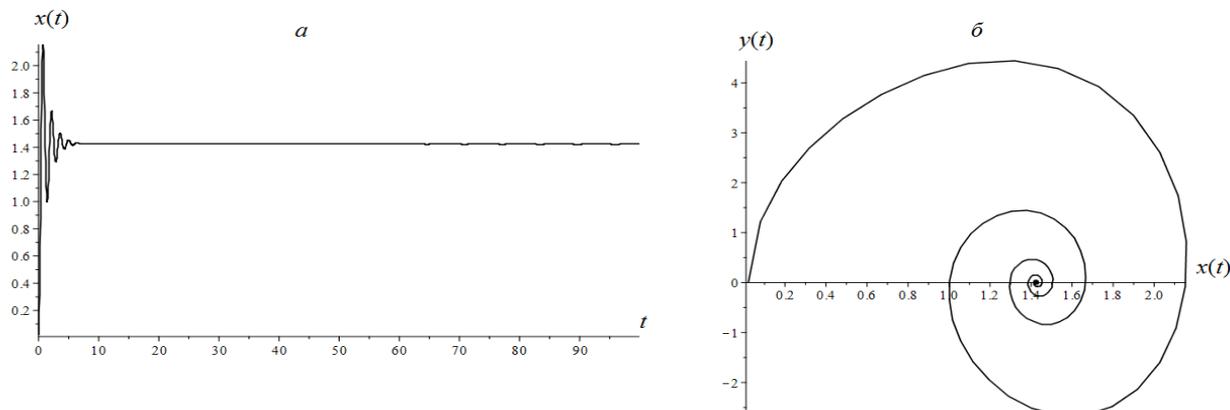


Рисунок 7. Фрагмент расчетных кривых, полученных по формуле (7) и по формуле (8)

Отметим, что в этом случае амплитуда колебаний затухает (рис. 7а), а фазовая траектория имеет вид закручивающейся спирали (рис. 7б), т.е. фазовая траектория не выходит на предельный цикл как это было в предыдущих случаях, даже с внешней периодической силой. Обычно, если в правой части эредитарного уравнения отсутствует правая часть, то колебания являются затухающими. Однако это не совсем так. Как показали исследования эредитарных автоколебательных систем типа Ван-дер-Поля [35], колебания со временем начинают происходить с постоянной амплитудой даже при отсутствии внешнего воздействия, а фазовая траектория выходит на предельный цикл.

На рис. 8 приведены осциллограмма и фазовая траектория, полученные по формуле (8).

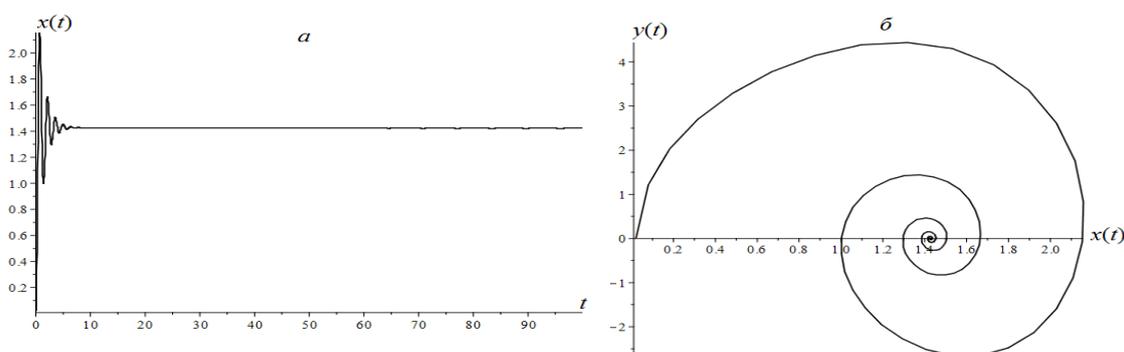


Рисунок 8. Осциллограмма и фазовая траектория, полученные по второй схеме, формула (8)

Расчетные осциллограмма и фазовая траектория на рис.8 имеют одинаковые формы, а более детальный анализ схем (7) и (8) приведен в следующей табл. 3.

Таблица 3

Исследование схем (7) и (8)

N	τ	ERR_1	ERR_2	p_1	p_2
20	0.05	0.0683	0.0686	0.895	0.894
40	0.025	0.0437	0.439	0.848	0.846
80	0.0125	0.0279	0.0281	0.816	0.814

N	τ	ERR ₁	ERR ₂	p_1	p_2
160	0.00625	0.0176	0.0178	0.795	0.792
200	0.005	0.0151	0.0156	0.79	0.787

Из табл. 3 можно сделать вывод, что обе конечно-разностные схемы работают примерно одинаково. При увеличении числа узловых точек N значения ошибок для схем (7) и (8) уменьшаются, вычислительные точности p_1 и p_2 меньше единицы и тоже уменьшаются. Поэтому можно сделать вывод о том, что обе схемы работают одинаково для этого примера (рис. 9).

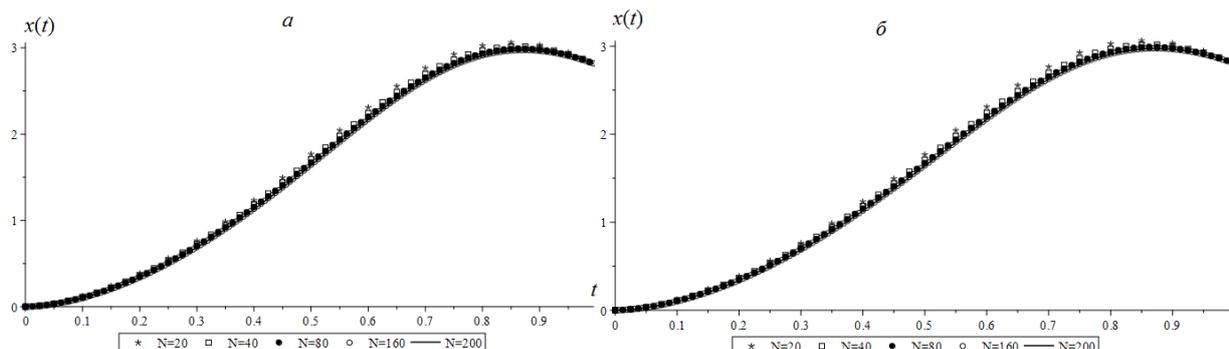


Рисунок 9. Фрагмент расчетных кривых, полученных по формуле (7) и по формуле (8)

Заключение

В работе рассмотрена модель эредитарного осциллятора Дуффинга с переменными дробными порядками. Предложены две явные конечно-разностные схемы для численного решения соответствующих дифференциальных задач Коши. С помощью этих схем были построены в зависимости от различных значений управляющих параметров, осциллограммы и фазовые траектории колебательного процесса.

Широкий выбор функциональных зависимостей дробных порядков $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ может привести к новым колебательным режимам или режимам характерным для других колебательных систем, что может быть использовано в технических системах.

Также был проведен анализ, предложенных конечно-разностных схем, который показал на конкретных примерах, что эти схемы можно использовать в исследовании эредитарного колебательного процесса Дуффинга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra V. Sur les 'equations int'egro-diff'erentielles et leurs applications // Acta Mathematica. 1912. Vol. 35, no. 1. pp. 295–356.
2. Leitman M.J., Mizel V.J. Hereditary Laws and Nonlinear integral Equations on the Line // Advances in mathematics, 1976. Vol. 22. pp. 220-266.
3. Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation. New York: Springer, 2011. 218 p.
4. Uchaikin V.V. Fractional derivatives for physicists and engineers. Volume I. Background and theory. Berlin: Springer, 2013. 373 p.

5. Uchaikin V.V. Fractional derivatives for physicists and engineers. Volume II. Applications. Berlin: Springer, 2013. 476 p.
6. Usmonov B. A numerical solution of hereditary equations with a weakly singular kernel for vibration analysis of viscoelastic systems // Proceedings of the Latvian academy of sciences. Section B. 2015. Vol. 69, No. 6 (699), pp. 326–330.
7. Паровик Р.И. Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2015. 178 с.
8. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
9. Oldham K.B., Spanier J. The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. London: Academic Press, 1974. 240 p.
10. Miller K.S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: A Wiley-Interscience publication, 1993. 384 p.
11. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
12. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
13. Дробышева И.В. Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов на примере осциллятора Дуффинга с дробными производными в смысле Римана-Лиувилля // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2016. №2 (13). С. 43-49.
14. Ким В.А. Осциллятор Дуффинга с внешним гармоническим воздействием и производной переменного дробного порядка Римана-Лиувилля, характеризующая вязкое трение // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2016. №2 (13). С. 50-54.
15. Дробышева И.В., Паровик Р.И. Эредитарный осциллятор Дуффинга с затуханием // Международный научно-исследовательский журнал. 2016. №6-2 (48). С. 59-64.
16. Паровик Р.И. Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2015. №1 (10). С. 18-24.
17. Syta A., Litak G., Lenci S., Scheffler M. Chaotic vibrations of the Duffing system with fractional damping // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2014. vol. 24. issue 1. 013107.
18. Gao X., Yu J. Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing's oscillators // Chaos, Solitons & Fractals. 2005. vol. 24. issue 4. pp. 1097–1104.
19. Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results // Applied Mechanics Reviews. 2010. T. 63. issue 1. 010801.
20. Padovan, J., Sawicki, J.T. Non-Linear Vibrations of Fractionally Damped // Systems, Nonlinear Dynamics, 1998. vol. 16. pp. 321-336.

21. Mickens R.E., Oyedeji K.O., Rucker S.A. Analysis of the simple harmonic oscillator with fractional damping // *Journal of sound and vibration*. 2003. Т. 268. №4. С. 839-842.
22. Machado J.A.T. et al. Fractional order dynamical systems and its applications. Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications. 2007. 40 p. URL: http://www.academia.edu/download/45914277/Fractional_Order_Dynamical_Systems_and_i20160524-27836-1kyf0y4.pdf.
23. Seredyńska M., Hanyga A. Nonlinear differential equations with fractional damping with applications to the 1dof and 2dof pendulum // *Acta Mechanica*. 2005. Т. 176. №3-4. С. 169-183.
24. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
25. Val'erio D., Costa J.S. Da. Variable-order fractional derivatives and their numerical approximations // *Signal Processing*. 2011. Vol. 91, no. 3. P. 470–483.
26. Sun H., Chen W., Li Ch., Chen Y. Finite difference schemes for variable-order time fractional diffusion equation // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2012. Vol. 22, no. 04.
27. Sun H.G., Chen W., Wei H., Chen Y.Q. A comparative study of constant-order and variable-order fractional models in characterizing memory property of systems // *The European Physical Journal-Special Topics*. 2011. Vol. 193, no. 1. P. 185–192.
28. Yufeng Xu, Vedat Suat Erturk. A finite difference technique for solving variable-order fractional integro-differential equations // *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*. 2014. Vol. 40, no. 3. P. 699–712.
29. Shichang Ma, Yufeng Xu, Wei Yue. Numerical solutions of a variable-order fractional financial system // *Journal of Applied Mathematics*. 2012.
30. Sheng H., Sun H.G., Coopmans C. et al. A physical experimental study of variable-order fractional integrator and differentiator // *The European Physical Journal Special Topics*. 2011. Vol. 193, no. 1. P. 93–104.
31. Coimbra C.F.M. Mechanics with variable-order differential operators // *Annalen der Physik*. 2003. Vol. 12, no. 11-12. P. 692–703.
32. Паровик Р.И. О численном решении уравнения фрактального осциллятора с производной дробного переменного порядка от времени // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2014. №1 (8). С. 60-65.
33. Паровик Р.И. Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2015. Т. 2. №11. С. 88-95.
34. Паровик Р.И. Численное решение задачи Коши для модельного уравнения эрдитарного нелинейного осциллятора с переменными порядками // В сборнике: Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики Материалы 7-й научно-практической internet-конференции. отв. ред. Ю.С. Нагорнов. 2016. С. 151-155.
35. Паровик Р.И. Математическое моделирование фрактального осциллятора Ван-дер-Поля // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*. 2015. Т. 17. №2. С. 57-62.

Parovik Roman Ivanovich

Vitus Bering Kamchatka state university, Russia, Petropavlovsk-Kamchatskiy
Institute of cosmophysical research and radio wave propagation of the Far Eastern branch of Russian academy
of science, Russia, Paratunka
E-mail: romanparovik@gmail.com

Hereditarity duffing oscillator with variable fractional order

Abstract. The paper presents a mathematical model hereditarity Duffing nonlinear oscillator with variable fractional-order derivatives, included in the original equation. This model generalizes the earlier well-known mathematical models hereditarity Duffing oscillator, as well as the classical model of Duffing oscillator. Depending on the definition of derived variables of fractional order, of course offered two distinct difference schemes for the numerical solution of the corresponding Cauchy problem. With the double conversion method has been shown that the proposed explicit finite-difference scheme can be used when modeling hereditarity Duffing oscillation process. By means of computer experiments, depending on various control parameters of the vibrational system of functions and fractional order time derivatives of displacement and in the original equation, we were built and investigated and the waveform for the phase trajectories hereditarity Duffing oscillator. With a wide range of functional dependencies of fractional order on time, or even function we provide solutions to new vibrational modes or other modes of vibration systems, which can be used in various technical applications. Simulation results are in good agreement with previous results.

Keywords: hereditarity; Duffing oscillator; a finite-difference schemes; waveforms; phase trajectories; the limit cycle