

Интернет-журнал «Наукоедение» ISSN 2223-5167 <http://naukovedenie.ru/>

Том 9, №1 (2017) <http://naukovedenie.ru/vol9-1.php>

URL статьи: <http://naukovedenie.ru/PDF/38TVN117.pdf>

Статья опубликована 24.02.2017

Ссылка для цитирования этой статьи:

Петрова Л.С. Математическое моделирование процессов нагрева кусочно-однородных тел с учетом релаксации теплового потока // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 9, №1 (2017) <http://naukovedenie.ru/PDF/38TVN117.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 519.633:536.21

Петрова Лилия Сергеевна

ФГБОУ ВО «Омский государственный университет путей сообщения», Россия, Омск¹

Доцент кафедры «Высшая математика»

Кандидат педагогических наук

E-mail: petrov.306@mail.ru

РИНЦ: http://elibrary.ru/author_profile.asp?id=687889

Математическое моделирование процессов нагрева кусочно-однородных тел с учетом релаксации теплового потока

Аннотация. Статья посвящена численным методам решения задач нестационарной теплопроводности с учетом релаксации теплового потока. В статье представлена математическая модель на основе системы уравнений теплопроводности гиперболического типа для расчета температурного поля в двухслойной бесконечно-протяженной (неограниченной) пластине с условиями сопряжения идеального контакта.

Рассмотрено применение метода сеток с использованием трехслойной неявной разностной схемы при решении нестационарной задачи для гиперболического уравнения теплопроводности. Получено численное решение нестационарной задачи теплопроводности в двухслойной пластине с учетом конечной скорости распространения тепла на основе методики конечных разностей с использованием метода прогонки. Выведены прогоночные коэффициенты с рассмотрением граничных условий в случае идеального контакта на стыке слоев.

Описана реализация алгоритма расчета с графическим представлением результатов расчета температурного поля в двухслойной неограниченной пластине с учетом конечной скорости распространения тепла и идеального контакта на стыке слоев.

Полученное решение может быть использовано при исследовании тепловых процессов в случае поверхностного упрочнения элементов конструкций и при выборе оптимальных режимов работы установок, используемых при обработке материалов высокоинтенсивными потоками энергии.

Ключевые слова: математическая модель; температурное поле; численные методы; уравнение теплопроводности гиперболического типа; конечная скорость распространения

¹ 644046, Омск, пр. Маркса, 35

тепла; двухслойная неограниченная пластина; метод сеток; неявная разностная схема; метод прогонки; условия сопряжения

Исследование процессов теплопроводности с учетом релаксации теплового потока наиболее актуально для быстро протекающих процессов (например, при нано- и фемто-секундовых лазерных импульсных воздействиях) при исследовании высокоинтенсивных процессов нагрева тел (плазменная, лазерная обработка материалов, высокоинтенсивный нагрев контактных соединений в электрических установках и др.) [6, с. 12].

Заметим, что рассматриваемый эффект конечности скорости распространения теплоты проявляется и в обычных условиях на фронте волны, описывающей распространение возмущения температуры. В частности, передняя часть фронта возмущения моделируется только посредством гиперболического уравнения теплопроводности, которое как раз и описывает распространение тепловых возмущений с конечной скоростью [11, с. 5].

Использование гиперболической формы уравнения теплопроводности, описывающего распространение возмущений с конечной скоростью, отражено в работах Ю.И. Широкого [14], А.И. Губина, Ю.А. Малой [5], О.А. Синкеевича, А.М. Семенова [11], В.Б. Веселовского [1], А.Э. Кузнецовой [3], В.А. Кудинова, И.В. Кудинова [2] и других. Для решения поставленных задач в большинстве исследований используются точные и приближенные аналитические методы.

В работах, посвященных устранению парадокса бесконечной скорости распространения тепла, исследователями А.В. Лыковым [4], P. Vernotte [16], С. Cattaneo [15] рассматривается гипотеза о релаксации теплового потока, учитывающая волновой характер процесса распространения тепла, обусловленного конечной скоростью распространения тепловых волн. Предложенная формула учитывает инерцию теплового потока и является обобщением гипотезы Фурье [13, с. 13]:

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T - \tau_r \frac{\partial \vec{q}}{\partial \tau}, \quad (1)$$

где: \vec{q} – вектор теплового потока; $\operatorname{grad} T$ – градиент температуры; λ – коэффициент теплопроводности; τ_r – время релаксации теплового потока.

Приведенное соотношение при отсутствии внутреннего источника тепла приводит к уравнению теплопроводности гиперболического типа [13, с. 38]:

$$\frac{\partial T(M, \tau)}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial \tau^2} = a \nabla^2 T(M, \tau), \quad (2)$$

где: a – коэффициент температуропроводности, $T(M, \tau)$ – температура тела в точке M в момент времени τ .

Развитие современных технологий обуславливает необходимость использования многослойных (составных) конструкций, имеющих разные механические и теплофизические характеристики. Математическое моделирование процессов теплопроводности в многослойных телах при высокоинтенсивном импульсном нагреве, лазерном воздействии и др. актуализирует проблему разработки методов решения краевых задач для систем гиперболических уравнений теплопроводности. Например, математическая модель для

многослойной пластины будет содержать дифференциальные уравнения теплопроводности гиперболического типа для каждого из слоев [6, с. 42]:

$$\tau_{r,v} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(c_v(T_v) \rho_v(T_v) \frac{\partial T_v(x, \tau)}{\partial \tau} \right) + c_v(T_v) \rho_v(T_v) \frac{\partial T_v(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_v(T_v) \frac{\partial T_v(x, \tau)}{\partial x} \right) + W_v(x, \tau, T_v) + \tau_{r,v} \frac{\partial W_v(x, \tau, T_v)}{\partial \tau}, \quad (3)$$

где: $W_v(x, \tau, T_v)$ – мощности внутренних источников тепла, $T_v(x, \tau)$ – температура тела в точке x в момент времени τ , $\lambda_v(T_v)$ – коэффициенты теплопроводности, $c_v(T_v)$ – теплоемкости, $\rho_v(T_v)$ – плотности веществ, $\tau_{r,v}$ – время релаксации теплового потока, v – номер слоя.

При математическом моделировании такого рода задач основные затруднения возникают вследствие необходимости реализации граничных условий на стыке слоев. Выполнение условий сопряжения при использовании метода разделения переменных связано с затруднениями при нахождении собственных чисел задачи и приводит к неэффективности точных аналитических методов. Использование операционного метода при решении краевых задач в случае линейного и радиального потоков теплоты приводит к резкому возрастанию трудоемкости выполнения преобразований с увеличением числа сред. Применение приближенного аналитического метода, сочетающего метод пространственно-временных квадрантов и операционный метод представлено в работе [6].

Численные методы решения задач гиперболической теплопроводности остаются мало исследованными [7, 8, 9, 12]. В работе [7] применение численных методов для решения задач теплопроводности с учетом конечной скорости распространения тепла ограничивается рассмотрением гиперболического уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной и граничными условиями первого рода. Использование явной разностной схемы для одномерного гиперболического уравнения теплопроводности описано в работах [8, 9]. Исследований по тематике применения численных методов решения задач теплопроводности с учетом релаксации теплового потока для многослойных тел нами не обнаружено.

Рассмотрим задачу о нагреве двухслойной неограниченной пластины с учетом конечной скорости распространения тепла, идеального контакта на стыке слоев и отсутствия внутреннего источника тепла. Из предположения, что радиус пятна нагрева больше глубины проникновения, можно использовать гиперболическое уравнение теплопроводности с одной пространственной переменной. В начальный момент времени температура является постоянной и равна 0 °С, скорость изменения температуры равна нулю. На внешней границе с

$$f_1(\tau) = \frac{q_{\max}}{\tau_d} (\tau_d - \tau) \tau,$$

одной стороны плотность теплового потока задается функцией времени, где q_{\max} – максимальное значение плотности теплового потока, $q_{\max} = 18,5 \cdot 10^{13}$ Вт/м², τ_d – длительность импульса, $\tau_d = 5 \cdot 10^{-11}$ с, с другой стороны $f_2(\tau) = 0$. В качестве материалов пластины взяты титан и сталь 15. Теплофизические характеристики стали: $\lambda_1 = 55$ Вт/м·К, $c_1 = 565$ Дж/кг·К, $\rho_1 = 7860$ кг/м³. Теплофизические характеристики титана: $\lambda_2 = 17$ Вт/м·К,

$c_2 = 586 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$, $\rho_1 = 4500 \text{ кг/м}^3$. Время релаксации тепловых потоков $\tau_{r,1} = \tau_{r,2} = 10^{-11} \text{ с}$.
 Толщина каждого слоя $L_1 = L_2 = 10^{-7} \text{ м}$.

Математическая модель процесса теплопроводности в двухслойной пластине с учетом конечной скорости распространения тепла включает в себя линейные однородные дифференциальные уравнения для каждого из слоев [5]:

$$\tau_{r,1} \frac{\partial^2 T_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} + \frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda_1}{c_1 \rho_1} \cdot \frac{\partial^2 T_1(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < x^*; \quad (4)$$

$$\tau_{r,2} \frac{\partial^2 T_2(x, \tau)}{\partial \tau^2} + \frac{\partial T_2(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda_2}{c_2 \rho_2} \cdot \frac{\partial^2 T_2(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad x^* < x < L; \quad (5)$$

начальные условия:

$$T_v(x, 0) = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial T_v(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0; \quad (7)$$

$$x \in [0, L]; \quad v = \overline{1, 2};$$

условия на внешних границах:

$$-\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{q_{\max}}{\tau_d} (\tau_d - \tau) \tau + \tau_{r,1} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{q_{\max}}{\tau_d} (\tau_d - \tau) \tau \right), \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial T_2(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0; \quad (9)$$

граничные условия на стыке слоев:

$$T_1(x_s, \tau) = T_2(x_s, \tau), \quad (10)$$

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=x^*} + \tau_{r,2} \lambda_1 \left. \frac{\partial^2 T_1(x, \tau)}{\partial x \partial \tau} \right|_{x=x^*} = \lambda_2 \left. \frac{\partial T_2(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=x^*} + \tau_{r,1} \lambda_2 \left. \frac{\partial^2 T_2(x, \tau)}{\partial x \partial \tau} \right|_{x=x^*}. \quad (11)$$

Для решения задач (4) - (11) применяем метод сеток с использованием конечно-разностных аппроксимаций (метод конечных разностей). Вводим прямоугольную пространственно-временную сетку $G_{x\tau} = \{x_i = ih, i = \overline{1, N}; \tau_j = jk, j = \overline{0, M}\}$, при этом число узлов по пространственной координате определяется соотношением $N = N_1 + N_2 + 1$, где N_v – количество промежутков, на которые разбивается первый или второй слой. При получении трехслойной неявной разностной схемы подставляем формулы соответствующих разностных аналогов частных производных по времени и пространству [10, с. 37-38] в гиперболическое уравнение теплопроводности для каждого слоя. В этом случае разностное уравнение имеет вид:

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{k} + \tau_{r,v} \frac{T_i^{j+1} - 2T_i^j + T_i^{j-1}}{k^2} = a_v \frac{T_{i+1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i-1}^{j+1}}{h^2}, \quad (12)$$

где $a_v = \frac{\lambda_v}{c_v \rho_v}$, $v = \overline{1, 2}$, $i = \overline{2, N-1}$, $j = \overline{0, M-1}$.

Полученную систему приводим к системе линейных алгебраических уравнений, имеющей трехдиагональную структуру и решаемой методом прогонки:

$$A_i \cdot T_{i+1}^{j+1} - B_i \cdot T_i^{j+1} + C_i \cdot T_{i-1}^{j+1} = F_i, \quad (13)$$

где $A_i = C_i = \frac{a_v k^2}{h^2}$, $B_i = k + \tau_{r,v} + \frac{2a_v k^2}{h^2}$, $F_i = \tau_{r,v} \cdot T_i^{j-1} - T_i^j (k + 2\tau_{r,v})$.

Подставляя основное соотношение прогонки $T_i^{j+1} = \alpha_i \cdot T_{i+1}^{j+1} + \beta_i$ с уменьшенным на единицу нижним индексом в уравнение (13), получаем формулы для расчета прогоночных коэффициентов:

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{C_i \cdot \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_{i-1}}. \quad (14)$$

Для определения коэффициентов F_i на первом временном слое вместо значения сеточной функции в фиктивном узле T_i^{-1} используем соотношение $T_i^{-1} = T_i^0$, полученное из аппроксимации второго начального условия:

$$F_i^1 = -T_i^0 (k + \tau_{r,v}). \quad (15)$$

Формулы для определения начальных прогоночных коэффициентов α_1, β_1 находим из аппроксимации левого граничного условия с погрешностью $O(h^2)$. Используя разложение сеточной функции в ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$ до членов второго порядка относительно h и разностное уравнение (12), получаем соотношение:

$$\frac{T_2^{j+1} - T_1^{j+1}}{h} - \frac{h}{2a_1} \left[\frac{T_1^{j+1} - T_1^j}{k} + \tau_{r,1} \frac{T_1^{j+1} - 2T_1^j + T_1^{j-1}}{k^2} \right] = -\frac{q}{\lambda_1}, \quad (16)$$

где $q = -\frac{q_{\max}}{\tau_d} (\tau - \tau_d + 2\tau_{r,1}) \tau + \tau_{r,1} \cdot q_{\max}$.

Выражая из равенства (16) T_1^{j+1} , получаем формулы для коэффициентов:

$$\alpha_1^{j+1} = \frac{2a_1 k^2}{(\tau_{r,1} + k)h^2 + 2a_1 k^2}, \quad \beta_1^{j+1} = \frac{-\tau_{r,1} h^2 T_1^{j-1} + T_1^j h^2 (k + 2\tau_{r,1}) + 2a_1 h k^2 \frac{q}{\lambda_1}}{(\tau_{r,1} + k)h^2 + 2a_1 k^2} \quad (17)$$

Определяя коэффициент β_1 на первом временном слое, используем соотношение $T_1^{-1} = T_1^0$:

$$\beta_1^1 = \frac{T_1^0 h^2 (k + \tau_{r,1}) + 2a_1 h k^2 \frac{q}{\lambda_1}}{(\tau_{r,1} + k) h^2 + 2a_1 k^2} \quad (18)$$

Значение температуры на правой границе определяем, исходя из аппроксимации правого граничного условия с погрешностью $O(h^2)$.

$$T_N^{j+1} = \frac{2a_2 k^2 \beta_{N-1} + T_N^j h^2 (k + 2\tau_{r,2}) - \tau_{r,2} h^2 T_N^{j-1}}{(\tau_{r,2} + k) h^2 + 2a_2 k^2 (1 - \alpha_{N-1})} \quad (19)$$

Определяя значение температуры в узле T_N^1 , используем формулу (19) при условии $j=0$ и значение сеточной функции в фиктивном узле $T_N^{-1} = T_N^0$:

$$T_N^1 = \frac{2a_2 k^2 \beta_{N-1} + T_N^0 h^2 (k + \tau_{r,2})}{(\tau_{r,2} + k) h^2 + 2a_2 k^2 (1 - \alpha_{N-1})} \quad (20)$$

Прогоночные коэффициенты в точке контакта двух сред выводим из аппроксимации граничного условия четвертого рода, используя разложение сеточной функции в ряд Тейлора в окрестности точки сопряжения $x = x^*$ до членов второго порядка относительно h , разностное уравнение (12) и аппроксимации для смешанных частных производных [10, с. 39]:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \left[\frac{T_{i^*}^{j+1} - T_{i^*-1}^{j+1}}{h} + \frac{h}{2a_1} \left(\frac{T_{i^*}^{j+1} - T_{i^*}^j}{k} + \tau_{r,1} \frac{T_{i^*}^{j+1} - 2T_{i^*}^j + T_{i^*}^{j-1}}{k^2} \right) \right] + \tau_{r,2} \lambda_1 \frac{T_{i^*}^{j+1} - T_{i^*-1}^{j+1} - T_{i^*}^j + T_{i^*-1}^j}{hk} = \\ & = \lambda_2 \left[\frac{T_{i^*+1}^{j+1} - T_{i^*}^{j+1}}{h} - \frac{h}{2a_2} \left(\frac{T_{i^*+1}^{j+1} - T_{i^*+1}^j}{k} + \tau_{r,2} \frac{T_{i^*+1}^{j+1} - 2T_{i^*+1}^j + T_{i^*+1}^{j-1}}{k^2} \right) \right] + \tau_{r,1} \lambda_2 \frac{T_{i^*+1}^{j+1} - T_{i^*+1}^j - T_{i^*}^j + T_{i^*}^j}{hk} \end{aligned} \quad (21)$$

Выражая из соотношения (21) $T_{i^*}^{j+1}$, получаем формулы для прогоночных коэффициентов в точке $x = x^*$:

$$\alpha_{i^*}^{j+1} = \frac{2a_1 a_2 (\lambda_2 k^2 + \tau_{r,1} \lambda_2 k)}{2a_1 a_2 k [\lambda_1 (1 - \alpha_{i^*-1}^*) (k + \tau_{r,2}) + \lambda_2 (k + \tau_{r,1})] + hk^2 (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1) + h^2 (\lambda_1 a_2 \tau_{r,1} + \lambda_2 a_1 \tau_{r,2})} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \beta_{i^*}^{j+1} = & \frac{2a_1 a_2 k [\lambda_1 \beta_{i^*-1}^* (k + \tau_{r,2}) + \tau_{r,2} \lambda_1 (T_{i^*}^j - T_{i^*-1}^j) + \tau_{r,1} \lambda_2 (T_{i^*}^j - T_{i^*+1}^j)]}{2a_1 a_2 k [\lambda_1 (1 - \alpha_{i^*-1}^*) (k + \tau_{r,2}) + \lambda_2 (k + \tau_{r,1})] + hk^2 (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1) + h^2 (\lambda_1 a_2 \tau_{r,1} + \lambda_2 a_1 \tau_{r,2})} + \\ & + \frac{h^2 T_{i^*}^j [k (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1) + 2\lambda_1 a_2 \tau_{r,1} + 2\lambda_2 a_1 \tau_{r,2}] - h^2 T_{i^*}^{j-1} (\lambda_1 a_2 \tau_{r,1} + \lambda_2 a_1 \tau_{r,2})}{2a_1 a_2 k [\lambda_1 (1 - \alpha_{i^*-1}^*) (k + \tau_{r,2}) + \lambda_2 (k + \tau_{r,1})] + hk^2 (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1) + h^2 (\lambda_1 a_2 \tau_{r,1} + \lambda_2 a_1 \tau_{r,2})} \end{aligned} \quad (23)$$

На первом временном слое коэффициент $\beta_{i^*}^*$ в точке сопряжения имеет вид:

$$\beta_{i^*}^1 = \frac{2a_1a_2k \left[\lambda_1\beta_{i^*-1}^0(k + \tau_{r,2}) + \tau_{r,2}\lambda_1(T_{i^*}^0 - T_{i^*-1}^0) + \tau_{r,1}\lambda_2(T_{i^*}^0 - T_{i^*+1}^0) \right]}{2a_1a_2k \left[\lambda_1(1 - \alpha_{i^*-1}^0)(k + \tau_{r,2}) + \lambda_2(k + \tau_{r,1}) \right] + kh^2(\lambda_1a_2 + \lambda_2a_1) + h^2(\lambda_1a_2\tau_{r,1} + \lambda_2a_1\tau_{r,2})} + \frac{h^2T_{i^*}^0 \left[k(\lambda_1a_2 + \lambda_2a_1) + \lambda_1a_2\tau_{r,1} + \lambda_2a_1\tau_{r,2} \right]}{2a_1a_2k \left[\lambda_1(1 - \alpha_{i^*-1}^0)(k + \tau_{r,2}) + \lambda_2(k + \tau_{r,1}) \right] + kh^2(\lambda_1a_2 + \lambda_2a_1) + h^2(\lambda_1a_2\tau_{r,1} + \lambda_2a_1\tau_{r,2})} . \quad (24)$$

Полученные формулы используются при реализации прямой и обратной прогонки для описания процедуры расчета значений функции на верхнем (промежуточном и первом) временном слое. При этом алгоритм расчета предусматривает сначала определение прогоночных коэффициентов для первой среды, затем на границе i^* , используя соотношения (22), (23) или (24), далее задаются прогоночные коэффициенты для второй среды. Определение температуры на правой границе происходит по формулам (19) или (20) в соответствии с временным слоем (промежуточным или первым). Расчет температурного поля T_i^{j+1} проводится с применением основного соотношения прогонки. Выполнение условия $(|\alpha_i| < 1, i = \overline{1, N-1})$ и необращение знаменателей прогоночных коэффициентов в нуль обеспечивает успешное применение метода прогонки и позволяет реализовать алгоритм решения задачи с применением данного метода, учитывая безусловную устойчивость предложенной неявной разностной схемы с погрешностью аппроксимации $O(\tau + h^2)$.

Программа для численного решения поставленной задачи реализовывалась в системе MathCAD и в среде программирования Dev-C++. Вывод результатов в виде графиков распределения температуры по толщине пластины при $\tau = 0,0375$ нс и функции изменения температуры при $x = 0,02$ мкм представлен на рисунках 1 - 2.

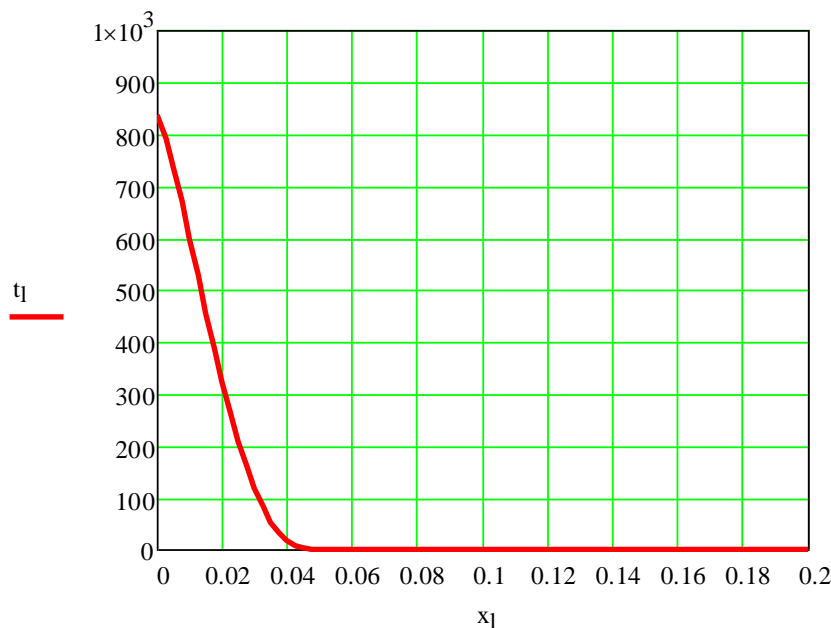


Рисунок 1. Распределение температуры по толщине пластины при $\tau = 0,0375$ нс
 (разработано автором)

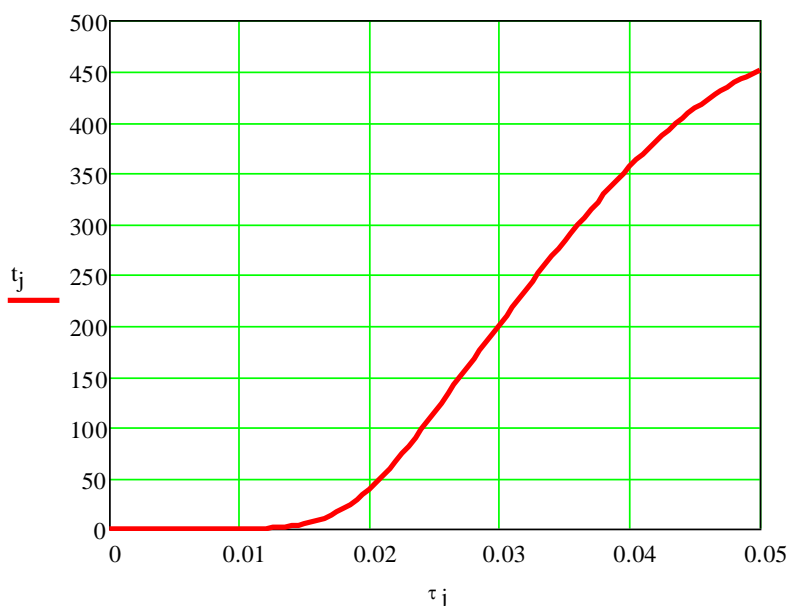


Рисунок 2. Изменение температуры во времени при $x = 0,02$ мкм (разработано автором)

Оценка точности результатов производилась путем сравнения значений температур на данном временном промежутке с их значениями, полученными операционным методом для аналогичной двухслойной пластины в работе [6, с. 100 - 102]. Проведенный расчет и сравнимость температурных полей в кусочно-однородном теле, полученных при решении предложенным численным методом с аналитическим решением обосновывает достоверность полученных результатов.

Проведенное численное исследование нестационарной задачи теплопроводности в двухслойной пластине с учетом релаксации теплового потока может использоваться для численного решения нелинейных краевых задач на основе систем уравнений теплопроводности гиперболического типа. Полученные результаты могут применяться при исследовании высокоинтенсивных процессов нагрева многослойных тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Веселовский В.Б. Математическое моделирование при интенсификации процесса нагрева твердых тел / Труды V Минского международного форума по теплообмену: тезисы докл. (Минск, 19 - 23 мая 2008 г.) - Минск, 2004. - С. 4 - 8.
2. Кудинов В.А. Об одном методе получения точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности на основе использования ортогональных методов / В.А. Кудинов, И.В. Кудинов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. - 2010. - №5 (21). - С. 159 - 169.
3. Кузнецова А.Э. Разработка численно-аналитических методов решения задач теплопереноса и термоупругости для однослойных и многослойных тел: дис. ... канд. тех. наук: - Самара, 2014. - 145 с.
4. Лыков А.В. Теплообмен: Справочник / А.В. Лыков. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Энергия, 1978. - 479 с.
5. Малая Ю.А. Математическое моделирование лазерного нагрева тел с покрытиями на основе нелинейного гиперболического уравнения теплопроводности / Ю.А. Малая, А.И. Губин // Вестник Национального технического университета

- «Харьковский политехнический институт». Сборник научных работ. Тематический выпуск «Энергетические и теплотехнологические процессы и оборудование». - Харьков: НТУ «ХПИ». - 2012. - №7. - С. 174 - 181.
6. Малая Ю.А. Математическое моделирование процессов теплопроводности с учетом релаксации теплового потока: дис. ... канд. тех. наук: - Днепропетровск, 2015. - 183 с.
 7. Мержиевский Л.А. Численное моделирование распространения теплового импульса во фрактальной среде / Л.А. Мержиевский, А.Н. Корчагина // Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», Новосибирск, 30 мая - 4 июня 2011 г. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/38636/46433/Корчагина-Расширенные%20тезисы.pdf>. - Загл. с экрана.
 8. Никитенко Н.И. Проблемы теории и моделирования интенсивных нестационарных процессов тепло- и массопереноса / Н.И. Никитенко // Промышленная теплотехника. - 1997. - Т. 19, №4-5. - С. 131 - 137.
 9. Петрова Л.С. Численное решение смешанной задачи для гиперболического уравнения теплопроводности / Л.С. Петрова, Е.В. Заец // Материалы II Международной научно-практической конференции «Наука XXI века: опыт прошлого - взгляд в будущее», ФГБОУ ВО СибАДИ, Омск, 25 апреля 2016 г. - Омск, 2016. - С. 872 - 876.
 10. Рындин Е.А. Основы численных методов: теория и практика / Е.А. Рындин, И.В. Куликова, И.Е. Лысенко / ФГАОУ ВО ЮФУ - Таганрог, 2015. - 217 с. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://inep.sfedu.ru/wp-content/uploads/2015/07/учебное_пособие_численные_методы.pdf. - Загл. с экрана.
 11. Синкеевич О.А. Решение уравнения Больцмана методом разложения функции распределения в ряд Энскога по параметру Кнудсена в случае наличия нескольких масштабов зависимости функции распределения от времени и координат / О.А. Синкеевич, А.М. Семенов // Журнал технической физики. - 2003. - Т. 73, №10. - С. 1-5.
 12. Солодов А.П. Mathcad: Дифференциальные модели / А.П. Солодов, В.Ф. Очков / МЭИ. - М., 2002. - 239 с.
 13. Шашков А.Г. Волновые явления теплопроводности: Системно-структурный подход. Изд. 2-е, доп. / А.Г. Шашков, В.А. Бубнов, С.Ю. Яповский. - М.: Едиториал УРСС, 2004. - 296 с.
 14. Широкий Ю.В. Оценка режимов лазерной обработки, при которых необходимо учитывать конечную скорость распространения тепла при решении совместной задачи теплопроводности и термоупругости // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. - 2013. - №58. - С. 33 - 39.
 15. Cattaneo C. A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 247 (1958), 431 - 433.
 16. Vernotte P. Les paradoxes de la threorie continue de l'equation de la chaleur, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 246 (1958), 3154 - 3155.

Petrova Liliya Sergeevna

Omsk state transport university, Russia, Omsk

E-mail: petrov.306@mail.ru

Mathematical modeling of processes heat piecewise homogeneous objects with heat flow relaxation

Abstract. The article is devoted to numerical methods for solving non-stationary heat conductivity problems with heat flow relaxation. In the article presents a mathematical model on the basis of hyperbolic heat conduction equations for calculation of the temperature field in a two-layer extended infinitely (unlimited) plate with conjugation conditions ideal contact.

The application of the method of nets using a three-layer implicit difference scheme for solving the nonstationary problem for a hyperbolic equation of heat conduction. The numerical solution of nonstationary heat conduction problem in a two-layer plate with allowance for the finite speed of heat distribution on the basis of the finite difference method using of the sweep method. Prognostic coefficients derived from the consideration of the boundary conditions for an ideal contact at the junction the layers.

Describe the realization of the algorithm of calculation with graphical representation of the results of the calculation of the temperature field in a two-layer infinite plate with allowance for finite of heat distribution speed and ideal contact at the junction the layers.

The obtained solution can be used in the study of heat processes in the case of surface hardening structure elements and when choosing a optimal operating conditions facilities used in the processing of materials by high-intensity energy flows.

Keywords: mathematical model; temperature field; numerical methods; hyperbolic type heat conduction equation; final of heat distribution speed; unlimited two-layer plate; net method; implicit difference scheme; sweep method; the conjugation conditions

REFERENCES

1. Veselovsky V.B. Mathematical modeling with the intensification of the process of heating of solids / Proceedings of V Minsk International Forum on Heat and Mass Transfer: Abstracts. (Minsk, 19 - 23 May 2008) - Minsk, 2004. - P. 4 - 8.
2. Kudinov V.A. A method for obtaining an exact analytical solution of the hyperbolic equation of heat conduction through the use of orthogonal methods / V.A. Kudinov, I.V. Kudinov // Vestn. Sam. state. tehn. Univ. Ser. Fiz-math. Sci. science. - 2010. - №5 (21). - P. 159 - 169.
3. Kuznetsova A.E. Development of numerical and analytical methods for solving problems of heat and mass transfer and thermoelasticity for single-layer and multi-layer bodies: dis. ... cand. teh. sciences: - Samara, 2014. - 145 p.
4. Lykov A.V. Heat and Mass Transfer: Guide / A.V. Lykov. - 2 nd ed., Revised. and ext. - M.: Energia, 1978 - 479 p.
5. Malaya Y.A. Mathematical modeling of laser heating bodies with coatings based on nonlinear hyperbolic heat equation / Y.A. Malaya, A.I. Gubin // Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Collection of scientific papers. The thematic issue of "Energy and thermal technological processes and equipment." - Kharkov: NTU "KPI". - 2012. - №7. - P. 174 - 181.

6. Malaya Y.A. Mathematical modeling of heat conductivity processes with heat flow relaxation: dis. ... cand. teh. sciences: - Dnepropetrovsk, 2015. - 183 p.
7. Merzhievsky L.A. Numerical modeling of distribution of the thermal pulse in a fractal medium / L.A. Merzhievsky, A.N. Korchagin // International Conference "Modern Problems of Applied Mathematics and Mechanics: Theory, Experiment and Applications", Novosibirsk, Russia, May 30 - 4 June 2011 [electronic resource]. - Access: http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/38636/46433/Korchagin-Advanced20%_tezisy.pdf. - Caps. screen.
8. Nikitenko N.I. Problems of the theory and modeling of non-stationary processes of intensive heat and mass transfer / N.I. Nikitenko // Industrial heating engineering. - 1997. - Т. 19, №4-5. - P. 131 - 137.
9. Petrova L.S. Numerical solution of a mixed problem for a hyperbolic equation of heat conduction / L.S. Petrova, E.V. Zaets // Proceedings of the II International scientific-practical conference "Science of the XXI century: the experience of the past - look into the future", FGBOU IN SibADI, Omsk, April 25, 2016 - Omsk, 2016. - P. 872 - 876.
10. Ryndin E.A. Bases of numerical methods: Theory and Practice / E.A. Ryndin, I.V. Kulikova, I.E. Lysenko / FGAOU IN SFU - Taganrog, 2015. - 217 p. [Electronic resource]. Access: http://inep.sfedu.ru/wp-content/uploads/2015/07/учебное_пособие_численные_методы.pdf. - Caps. the screen.
11. Sinkeevich O.A. Solution of the equation of the Boltzmann by method of expanding function of distribution in abreast Enskogin by the parameter Knudsen in the case of several scales depending on the distribution function of the time and coordinates / O.A. Sinkeevich, A.M. Semenov // Technical Physics. - 2003. - Т. 73, №10. - P. 1-5.
12. Solodov A.P. Mathcad: Differential models / A.P. Solodov, V.F. Ochkov / MEI. - M., 2002. - 239 p.
13. Shashkoff A.G. Wave phenomenon of thermal conductivity: system-structural approach. Ed. 2nd, ext. / A.G. Shashkoff, V.A. Bubnov, S.Y. Yapovsky. - M.: Editorial URSS, 2004. - 296 p.
14. Shirokiy J.V. Assessment of laser processing regimes in which you must take into account the finite speed of propagation of heat in the solution of the joint problem of heat conduction and thermoelasticity // Public information and computer integrated tehnologii. - 2013. - №58. - P. 33 - 39.
15. Cattaneo C. A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 247 (1958), 431 - 433.
16. Vernotte P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 246 (1958), 3154 - 3155.