Интернет-журнал «Науковедение» ISSN 2223-5167 http://naukovedenie.ru/
Том 7, №3 (2015) http://naukovedenie.ru/index.php?p=vol7-3
URL статьи: http://naukovedenie.ru/PDF/50TVN315.pdf
DOI: 10.15862/50TVN315 (http://dx.doi.org/10.15862/50TVN315)

УДК 624.04

Шеин Александр Иванович
ФБГОУ ВПО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства»
Россия, Пенза[1]
Зав. кафедрой «Механика»
Доктор технических наук
Профессор
E-mail: Shein-ai@yandex.ru

Монахов Владимир Андреевич
ФБГОУ ВПО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства»
Россия, Пенза
Профессор кафедры «Механика»
Доктор технических наук
E-mail: monahovnn@mail.ru

Алгоритм построения геометрической матрицы стержневой системы

[1] 440028, Пенза, ул. Титова, 28

Аннотация. Предложен алгоритм автоматизированного формирования геометрической матрицы на основе графа стержневой системы в сочетании с матричными преобразованиями векторов перемещений при переходе от локальных систем координат к глобальной. Композиция всего лишь трёх матриц стержневой системы: матрицы инцидентности графа, характеризующей топологическую структуру расчётной схемы, матрицы вращения вектора перемещений и матрицы длин стержней полностью решает проблему автоматического построения геометрической матрицы с использованием ПЭВМ. Значимость геометрической матрицы, а в силу статико – геометрической аналогии между усилиями и перемещениями стержневой системы, и статической матрицы, в строительной механике общеизвестна.

Ключевые слова: стержневая система; вектор узловых нагрузок; геометрическая матрица; граф рамы; матрица инцидентности; матрица равновесия, вектор перемещений.

Ссылка для цитирования этой статьи:

Шеин А.И., Монахов В.А. Алгоритм построения геометрической матрицы стержневой системы // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 7, №3 (2015) http://naukovedenie.ru/PDF/50TVN315.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/50TVN315

Представляя стержневую систему в виде набора отдельных упругих элементов, связанных в точках дискретизации (расчётных сечениях или узлах) упругоподатливыми «шарнирами» (рис. 1,а, б) [1], напряжённо – деформированное состояние механической системы можно описать системой уравнений, представленной в матричной записи [2], а именно:

- уравнением равновесия –

$$[V]\overline{N} = \overline{P}, \quad (1)$$

где [*V*] - матрица равновесия, $\overline{N}$ - вектор - столбец внутренних усилий в расчётных сечениях стержневой системы, куда, наряду с изгибающими моментами, входят также и продольные силы; $\overline{P}$ - вектор - столбец внешней нагрузки, приведенной к узловой. Последний может содержать не только силы, но и сосредоточенные моменты; в общем случае порядок вектора $\overline{P}$ определяется числом степеней свободы принятой дискретной модели стержневой системы, а порядок вектора $\overline{N}$ совпадает с числом элементов, полученным при дискретизации;

- геометрическими соотношениями -

$$\overline{\chi} = [\Gamma]\overline{\zeta}, \quad (2)$$

где $\overline{\chi}$ - вектор-столбец сосредоточенных узловых деформаций, как угловых, так и линейных, $[\Gamma]$ - геометрическая матрица, $\overline{\zeta}$ - вектор – столбец узловых перемещений, заданных в глобальной системе координат $\eta\Omega\theta$ (рис. 1,в), и

- физическими зависимостями -

$$\overline{N} = [r]\overline{\chi}, \quad (3)$$

$[r]$ - квазидиагональная матрица внутренней жёсткости системы, составленная из ячеек жёсткости элементов $[r_j] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{2E_jI_j}{d_j}$, E_jI_j - изгибная жёсткость элемента, d_j - его длина. На основе уравнений состояния распределение внутренних усилий в рассматриваемой стержневой системе может быть установлено в одной из форм:

$$1.\ \overline{N} = [r][\Gamma]\left([\Gamma]^T[r][\Gamma]\right)^{-1}\overline{P}, \quad (4)$$

либо

$$2.\ \overline{N} = [r][V]^T\left([V][r][V]^T\right)^{-1}\overline{P}, \quad (5)$$

либо

$$3.\ \overline{N} = [\Lambda]\overline{P}, \quad (6)$$

поскольку матрица влияния внутренних усилий $[\Lambda]$, равновесия системы $[V]$ и геометрическая матрица $[\Gamma]$ в силу принципа двойственности связаны между собой соотношением следующего вида

$$[\Gamma]^{-1} = \left([V]^T\right)^{-1} = \left([V]^{-1}\right)^T = [\Lambda]^T. \quad (7)$$

Таким образом, усилия в стержневой системе могут быть найдены, если известна хотя бы одна из трёх указанных матриц.

Перемещения стержневых систем, представленные вектор - столбцом $\overline{Y}$, находят по формуле

$$\overline{Y} = [\Delta]\overline{P}, \tag{8}$$

где $[\Delta]$ - матрица внешней податливости, равная

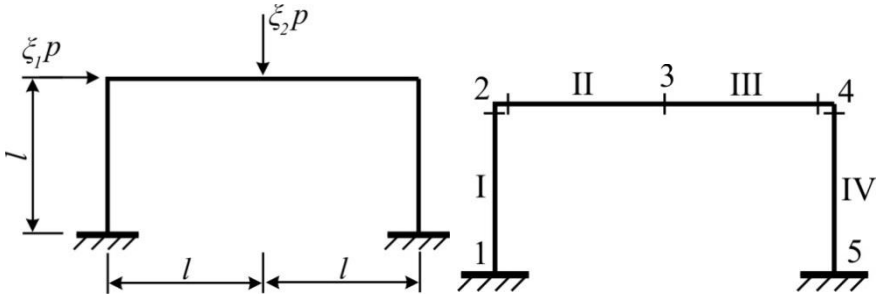
$$[\Delta] = [\Lambda]^T[\delta][\Lambda] = \left([\Gamma]^T[r][\Gamma]\right)^{-1}, \tag{9}$$

$[\delta] = [r]^{-1}$ - матрица внутренней податливости; $\overline{P}$ - вектор нагрузки. Очевидно, что при определении перемещений рамы согласно (8) используются всё те же матрицы $[\Lambda]$ и $[\Gamma]$.

Как известно, при расчёте балок наиболее просто формируется матрица влияния усилий $[\Lambda]$ для консольных балок или равновесия [*V*] - для шарнирно опёртых. Поэтому эти матрицы обычно и используются при расчёте балок [3]. Для рам в некоторых случаях возможно применение матрицы влияния $[\Lambda]$ в качестве основы расчёта. В общем случае в качестве базовой матрицы при расчёте рам рекомендуется пользоваться геометрической матрицей $[\Gamma]$, т.к. её формирование может быть выполнено в автоматическом режиме на основе графа рамы.

Далее приводится обоснование алгоритма формирования геометрической матрицы на примере расчётной схемы рамы, показанной на рисунке 1,а.

а б



в г

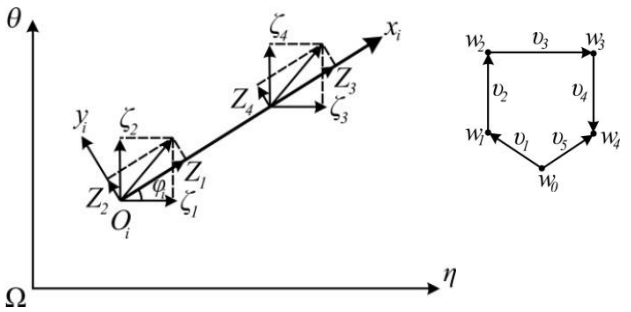


Рис. 1. *Обоснование алгоритма формирования геометрической матрицы на примере расчётной схемы рамы*

Изгибающие моменты при действии нагрузки, характеризуемой вектором $\overline{P} = (\xi_1, -\xi_2)p$, находят по формуле (4), где фигурируют матрица внутренней жёсткости рамы

$$[r]=\begin{bmatrix}2&1&0&0&0\\1&4&1&0&0\\0&1&4&1&0\\0&0&1&4&1\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}\cdot\frac{2EI}{l}$$

и геометрическая матрица $[\Gamma]$; ξ_1, ξ_2 - безразмерные параметры уровня нагрузки p (отрицательный знак ξ_2 обусловлен принятым правилом знаков), изгибная жёсткость EI поперечного сечения ригеля рамы в два раза превышает жёсткость стоек. Рамки статьи ограничены рассмотрением чисто изгибных деформаций стержневой системы, на что указывает структура матрицы $[r]$.

Диагональная матрица длин элементов $[L]$, как и матрица направляющих косинусов, находятся без труда

$$[L]=\begin{bmatrix}l&&&\\&l&&\\&&l&\\&&&l\end{bmatrix},$$

$$[C]=\begin{bmatrix}\cos\varphi_1&&&\\&\cos\varphi_2&&\\&&\cos\varphi_3&\\&&&\cos\varphi_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

l - длина элемента, φ_i $(i=1,2,3,4)$ – углы наклона элементов рамы. Подробности их построения на основе матрицы инцидентности $[S_0]$ графа рамы (рис. 1,г)

$$[S_0]_{(4\times5)}=\begin{bmatrix}-1&1&0&0&0\\0&-1&1&0&0\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

изложены в статьях [4], [5]. Здесь, как и в упомянутой работе, вершинам графа w_i $(i=1,2,3,4)$ соответствуют элементы рамы I – IV, вершине w_0 - основание рамы, а граням υ_j $(j=1,...,5)$ - расчётные сечения (узлы) 1- 5.

При формировании геометрической матрицы рамы важную роль играет вспомогательная матрица

$$[G]_{(4\times10)}=\begin{bmatrix}1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&-1&0&1&0\end{bmatrix},$$

которая получается из матрицы

$$[\Gamma]_{(8\times10)} = [S]^{T}{}_{(8\times16)}[\Theta]_{(16\times10)}$$

путём вычёркивания в ней нечётных строк, что объясняется пренебрежением продольными деформациями стержней.

При вычислении геометрической матрицы $[\Gamma]_{(8\times10)}$, связывающей узловые перемещения $\bar{\zeta}$ в глобальной системе координат с деформациями элементов согласно (2), используются развёрнутая матрица инцидентности (augmented branch-node incidence matrix [6]) $[S]_{(8\times16)}$ графа стержневой системы и блочная матрица вращения $[\Theta]_{(16\times10)}$, структуры которых имеют вид:

$$[S]^{T}_{(8\times16)} = \begin{bmatrix}
-1 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
 & -1 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & -1 & 0 & 1 & & & & & & 0 & & & \\
 & & & & & -1 & 0 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & -1 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & 0 & & & & & & -1 & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & -1 & 0 & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & & -1 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$$[\Theta]_{(16\times10)} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & & & & & & & & \\
-1 & 0 & & & & & & & & \\
 & & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & -1 & 0 & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & & & 0 & & \\
 & & & & 1 & 0 & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 0 & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
 & & 0 & & & & 0 & -1 & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & & \\
 & & & & & & & & 0 & -1 \\
 & & & & & & & & 1 & 0
\end{bmatrix}.$$

Блоки последней матрицы, очевидно, образованы из пары ячеек (матриц) вращения векторов перемещений концов отдельного элемента при переходе от локальных систем координат $x_iO_iy_i$ $(i=1,2,3,4)$ к глобальной [7], [8]

$$[\phi_j] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{bmatrix} \quad (j=1,2,3,4).$$

Формирование матрицы инцидентности на основе графа можно выполнить программным способом [9].

Принимая во внимание неподвижность опор и непрерывность ригеля в третьем сечении, в матрице $[G]_{(4\times10)}$ следует удалить по два крайних столбца с каждой стороны, а также средний – нулевой; в итоге приходят к матрице

$$[G_0]_{(4\times5)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Произведение транспонированной матрицы инцидентности

$$[S_0]^T_{(5\times4)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

на матрицу $[G_0]_{(4\times5)}$ определяет матрицу

$$[H_0]_{(5\times5)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{EI}{l} \ .$$

Но, поскольку влияние продольных деформаций в стойках рамы не учитывается, то из этой матрицы следует исключить второй и четвёртый столбцы. А так как вектор нагрузки содержит только две компоненты, то крайние столбцы можно объединить в один. В таком случае геометрическая матрица сокращается и принимает компактный вид

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В этой форме геометрическая матрица встречается в работе [10].

При определении перемещений согласно (8) используется матрица податливости рамы (9)

$$[\Delta] = [R]^{-1} = \left([H]^T[r][H]\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}0625 & 0 \\ 0 & 0{,}0313 \end{bmatrix} \cdot \frac{l}{2EI}.$$

Следовательно, перемещения точек приложения сил равны

$$\overline{Y} = [\Delta]\overline{P} = \begin{bmatrix} 0{,}0625 & 0 \\ 0 & 0{,}0313 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{l}{2EI} p = \begin{pmatrix} 0{,}0625 \\ -0{,}0313 \end{pmatrix} \frac{pl}{2EI} \ .$$

В итоге горизонтальное перемещение ригеля составляет $y_1 = 0{,}0313\,pl/EI$, а прогиб под вертикальной силой - $y_2 = -0{,}0152\,pl/EI$.

Величины изгибающих моментов в расчётных сечениях рамы, представленные столбцами матрицы влияния $[\Lambda]$, находят по формуле (4) с учётом определения (9)

$$\overline{M} = [r][H][R]^{-1}\overline{P} = [\Lambda]\overline{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{2EI}{l} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0{,}0625 & 0 \\ 0 & 0{,}0313 \end{bmatrix} \cdot \frac{l}{2EI} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -\xi_2 \end{pmatrix} p = \begin{bmatrix} 0{,}1875 & 0{,}0313 \\ -0{,}3125 & -0{,}1875 \\ 0 & 0{,}3125 \\ 0{,}3125 & -0{,}1875 \\ -0{,}1875 & 0{,}0313 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -\xi_2 \end{pmatrix} p.$$

Эпюры изгибающих моментов при раздельном действии внешних сил показаны на рис. 2,а,б.

а б

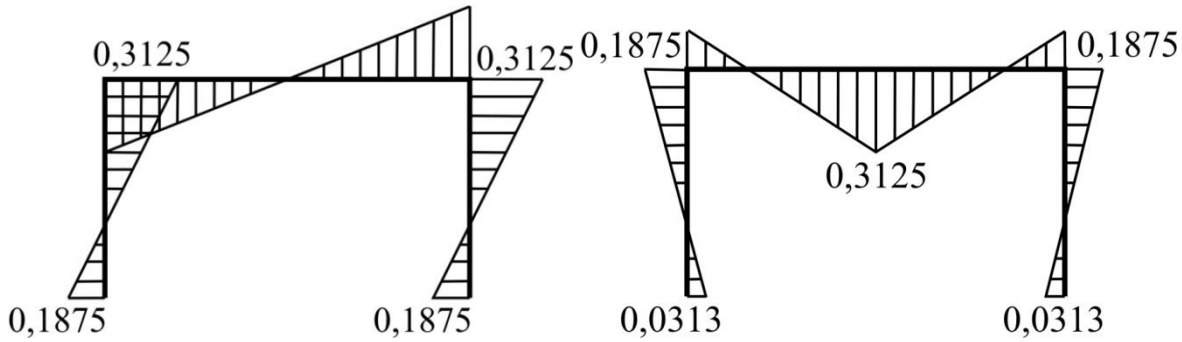


Рис. 2. *Эпюры изгибающих моментов при раздельном действии внешних сил*

Выводы.

1. Показано, что формирование геометрической матрицы можно осуществлять в матричной форме на основе графа расчётной схемы стержневой системы.
2. Анализ напряжённо – деформированного состояния статически неопределимых стержневых систем с помощью геометрической матрицы рекомендуется выполнять в автоматическом режиме с помощью ПЭВМ без обращения к классическим методам строительной механики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Покровский А.А. Смешанная форма метода конечных элементов в линейных задачах: Учебное пособие. – Пенза. Изд ПГУАС. – 100 с.
2. Александров А.В., Потапов В.Д., Зылёв В.Б. Строительная механика. Кн. 2. Учебное пособие для вузов. – М.: «Высшая школа», 2008. – 384 с.
3. Ржаницын А.Ф. Строительная механика. – М.: «Высшая школа», 1982. – 400 с.
4. Сподарёв Ю.П. Матричный метод расчёта статически определимых конструкций // Строительная механика и расчёт сооружений, 1975, №3,. – С. 13-18.
5. Рекша В.В. Применение теории графов в матричной форме метода перемещений // Строительная механика и расчет сооружений. – 1978. – №1. – С. 33-35.
6. Fenves S.J., Branin F.H. Network-topological formulation of structures analysis // Journal of structural division. – 1963, vol. 89. – ST4, pp. 189-214.
7. Монахов В.А., Потапова Т.Ю. Формирование матрицы скорости сложного движения точки “Известия вузов. Строительство” // №4. – 2012. – с. 87–93.
8. Монахов В.А. Теоретическая механика. Матричная форма анализа сложного движения точки: учеб. пособие. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 80 с.
9. Зубов В.С. Программирование на языке TURBO PASCAL. М:, информ. - изд. дом «ФИЛИНЪ». - 1997. – 320 с.
10. Проценко А.М. Теория идеально-упругопластических систем. – М.: «Наука», – 1982. – 287 с.

Рецензент: Ласьков Н.Н., зав. кафедрой «Строительные конструкции» ПГУАС, доктор технических наук, профессор.

Shein Aleksandr Ivanovich
FBGOU VPO "Penza State University of Architecture and Construction"
Russia, Penza
E-mail: shein-ai@yandex.ru

Monakhov Vladimir Andreevich
FBGOU VPO "Penza State University of Architecture and Construction"
Russia, Penza
E-mail: monahovnn@mail.ru

Algorithm Construction of Geometrical Matrix Rod System

Abstract. The author offers a method of automatic geometrical matrix formation on the basis of frame system graph in combination with matrix transformation of vector displacement at transition from local system of coordinate to global one. Composition of three basic matrixes of frame system: incidence graph, which characterizes typological structure of the calculated scheme, frames length matrixes and matrix of displacement vectors completely solve the problem of automatic formation of geometrical matrix using computers. The value of geometrical matrix and static matrix due to static and geometrical analogue between efforts and frame system displacement is well known in structural mechanics.

Keywords: main load vector; geometric matrix; frame graph; deformation; incidence matrix; equilibrium matrix; displacement; framed system.

REFERENCES

1. Pokrovsky A.A. Mixed form of the finite element method in linear problems: the manual. - Penza. PGUAS Univ. - 100 sec.
2. Alexandrov A.V., Potapov A.D., V.B. Zylëv Structural Mechanics. Bk. 2. Textbook for high schools. - M.: "High School", 2008. - 384 p.
3. Rzhanitsin A.F. Road system calculation using the principle of duality.// Researches on the theory of structure, Issue XXIV. – 1980. – P. 10-23.
4. Reksha V.V. Application of group theory in matrix form of displacement method. // Structural mechanics and calculation of buildings. – 1978. – N 1. – P. 33-35.
5. Fenves S.J., Branin F.H. Network-topological formulation of structures analysis // Journal of structural division. –1963, vol. 89. – ST4, pp. 189-214.
6. MMonakhov V.A., Potapova T.Ju. Matrix velocites of the Complex motion of a point. News of Building University // №4. – 2012. – c. 87 – 94.
7. V. Monahov, A.Teoreticheskaya mechanics. The matrix form of the complex analysis of the point: Textbook. allowance. - Penza: PGUAS, 2014. - 80 p.
8. Dental V.S. Programming TURBO PASCAL. M., Inf. - Ed. House "Filin". - 1997. - 320 p.
9. Prozenko A.M. Theory elastic – plastic system. – M., «Nauka», 1982. - 288 p.