Интернет-журнал «Науковедение» ISSN 2223-5167 http://naukovedenie.ru/

Том 8, №3 (2016) http://naukovedenie.ru/index.php?p=vol8-3

URL статьи: http://naukovedenie.ru/PDF/57TVN316.pdf

Статья опубликована 14.06.2016.

Ссылка для цитирования этой статьи:
Трегубов Р.Б., Саитов И.А. Применение алгебры логики для формализации и решения задач анализа надежности структурно-сложных распределенных систем // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 8, №3 (2016) http://naukovedenie.ru/PDF/57TVN316.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 004.047

Трегубов Роман Борисович
ФГКВОУ ВО «Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации», Россия, Орёл[1]
Сотрудник
Кандидат технических наук
E-mail: treba@list.ru

Саитов Игорь Акрамович
ФГКВОУ ВО «Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации», Россия, Орёл
Сотрудник
Доктор технических наук, профессор
E-mail: akramovish@mail.ru

Применение алгебры логики для формализации и решения задач анализа надежности структурно-сложных распределенных систем

Аннотация. В статье предлагается новый подход к формальной постановке и решению задач расчета вероятности работоспособности структурно-сложных распределенных систем, к которым относятся телекоммуникационные, авто- или железнодорожные сети, газотранспортные, нефтепроводные и энергетические системы. Структурная сложность при этом состоит в том, при математическом описании (моделировании) структуры таких систем не могут быть сведены к простым последовательным, параллельным или древовидным структурам.

Разработанный инструментарий базируется на положениях алгебры логики и теории вероятностей, а также на композиции однородных двухзначных логических функций *n* переменных, описывающих условия работоспособного состояния отдельных элементов и системы в целом. Используемая при этом новая функция логического сочетания позволяет не только осуществить компактную формальную постановку задачи, но и аналитически строго, наглядно и удобно произвести ее решение при невысокой вычислительной сложности производимых процедур.

На примере сети связи производится практический расчет параметров надежности структурно-сложной распределенной системы, у которой условия работоспособности записываются в виде дизъюнкции кратчайших маршрутов успешного функционирования. На базе предложенной функции логического сочетания для расчета параметров надежности структурно-сложной распределенной системы осуществляется последовательное использование функ-

---

[1] 302030, г. Орел, улица Приборостроительная, дом 80, кв. 232

ций работоспособности кратчайших маршрутов успешного функционирования, двухполюсных и многополюсных сетей связи.

Ключевые слова: алгебра логики; структурная сложность; распределенные системы; теория вероятностей; функция логического сочетания; надежность; кратчайшие маршруты; функция работоспособности

Общие положения

В настоящее время структурно-сложные распределенные системы, такие как телекоммуникационные, авто- или железнодорожные сети, газотранспортные, нефтепроводные и энергетические системы и пр. имеют стратегическое значение для экономической и национальной безопасности страны. Соответствующие министерства и ведомства постоянно осуществляют мониторинг качества их функционирования. С этой целью осуществляются контроль, учет, моделирование, постановка и решение задач анализа функциональных характеристик [1] структурно-сложных распределенных систем (ССРС), среди которых показатели их стоимости, производительности, устойчивости и пр.

Одним из ведущих показателей функционирования инфраструктурных объектов является их надежность [2]. Здесь и далее под надежностью понимается способность системы сохранять свойства, необходимые для выполнения заданного назначения, при нормальных (повседневных) условиях ее эксплуатации в течение требуемого промежутка времени. Безотказность телекоммуникаций и транспорта, энергетики и топливного снабжения в стране напрямую определяются надежностью соответствующих сетей и систем. Все вышеизложенное свидетельствует о непреходящей актуальности проблематики анализа надежности ССРС.

К настоящему времени накоплен богатый опыт решения различных задач анализа и синтеза (оптимизации) распределенных систем. В проблематике анализа надежности разработано множество методов (точных и приближенных) расчета вероятности безотказности систем [3]. К точным методам расчета принято относить [4] метод полного перебора, метод прямого перебора элементарных путей, метод объединения элементарных путей с учетом эффекта поглощения, метод разложения булевой функции относительно особого элемента, метод двудольных графов и логико-вероятностный метод [5]. Применение этих методов связано с использованием комбинаций (множеств) элементов ССРС с известными характеристиками вероятности безотказного функционирования (или отказа) в различных сочетаниях.

1. Применение алгебры логики для описания условий работоспособности структурно-сложных распределенных систем

Для того чтобы рассчитать надежность инфраструктуры, исследователю (проектировщику) необходимо описать условия работоспособности соответствующей ССРС. В настоящее время это принято осуществлять различными способами [6]: словесно, графически (например, с помощью структурной схемы системы) и/или аналитически (например, с помощью логических функций). В последнем случае логическую функцию, связывающую состояние элементов с состоянием системы в целом, будем называть *функцией работоспособности системы* [6].

Очевидно, что трудности в анализе надежности ССРС начинаются уже на этапе формальной постановки задачи, особенно если условия ее работоспособности заданы словесно и/или графически. Для обеспечения строгости формальной постановки и решения задачи расчета показателей надежности ССРС далее предлагается использовать инструментарий алгебры логики.

Известно [7], что логическими переменными x, y и z называются неопределенные символы, которые могут становится любым элементом множества $\{0,1\}$, т. е. переменные x, y и z являются двухзначными. По отношению к логическим переменным x, y и z элементы множества $\{0,1\}$ являются их значениями. Если в силу каких-нибудь условий значению переменной x ставится в соответствие значение переменной y, то считается, что эти условия определяют y как функцию от x

$$y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in f \Leftrightarrow f : x \mapsto y. \tag{1}$$

где x называется независимой переменной (аргументом), а y – зависимой переменной (функцией). Поскольку при формировании функции $y = f(x)$ в отображении участвуют всего лишь одно множество $\{0,1\}$, следовательно, она является однородной логической функцией.

Ниже будут использоваться однородные двухзначные логические функции n переменных

$$y = f((x_1, x_2, ..., x_n)) \Leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto y \ , \tag{2}$$

т. е. такие, у которых все независимые переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ и сама функция y являются логическими переменными, принимающими значения из одного и того же двухэлементного множества $\{0,1\}$ [7]. Далее вместо $f((x_1, x_2, \ldots, x_n))$ будет применяться упрощенная запись $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Исследования показали, что логические функции целесообразно использовать для компактного описания условий работоспособности ССРС. Для формализованного описания ССРС далее вводится ряд дополнительных понятий и обозначений.

В контексте излагаемого считается, что элементы системы заданы, если определен вектор-строка элементов системы

$$\mathrm{X} = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n], \tag{3}$$

где n – общее число элементов системы; x_i – номер элемента системы.

Нормальное функционирование отдельного элемента системы называется работоспособным состоянием. Состояние, когда, элемент системы не может продолжать выполнение своих функций называется неработоспособным состоянием [8].

Далее используются следующие обозначения: $\hat{\mathrm{X}} = [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \ldots \quad \hat{x}_n]$ – вектор-строка состояний элементов системы, описывающий текущее состояние отдельных элементов системы; $\hat{x}_s \in \{1, 0\}$ – состояние элемента системы с номером s (работоспособное или неработоспособное); $\overline{\overline{\hat{x}_s}}$ – работоспособное состояние s-го элемента системы, другими словами $\hat{x}_s = 1$;

$\overline{\hat{x}_s}$ – неработоспособное состояние s-го элемента сети связи, другими словами $\hat{x}_s = 0$; $p\left(\overline{\overline{\hat{x}_s}}\right)$ – вероятность нахождения s-го элемента сети связи в работоспособном состоянии, другими словами $p(\hat{x}_s = 1)$; $p\left(\overline{\hat{x}_s}\right)$ – вероятность нахождения s-го элемента сети связи в неработоспособном состоянии, другими словами $p(\hat{x}_s = 0)$; $\mathrm{P}\hat{\mathrm{X}} = \left[\, p\left(\overline{\overline{\hat{x}_1}}\right) \quad p\left(\overline{\overline{\hat{x}_2}}\right) \quad \ldots \quad p\left(\overline{\overline{\hat{x}_M}}\right) \right]$ – вектор-строка вероятностей работоспособных состояний отдельных элементов системы.

Методологические вопросы вычисления вероятности работоспособного состояния отдельных элементов системы $p\left(\overline{\overline{\hat{x}_s}}\right)$ выходят за рамки настоящей статьи.

Для наглядности дальнейших рассуждений ниже рассматривается ССРС, имеющая семантику сети связи, представленная графически на рисунке.

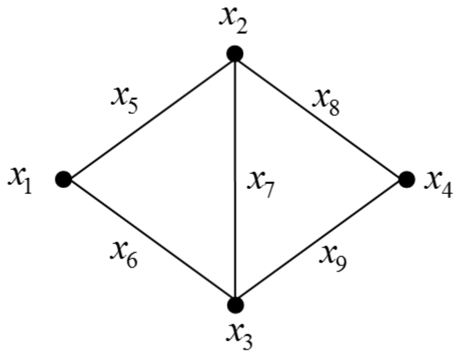

***Рисунок**. Граф исследуемой ССРС – сети связи* (разработано автором)

Для инфраструктурных объектов часто используется термин маршрут. Далее *кратчайший маршрут успешного функционирования* (КМУФ) между вершиной x_s и x_t будет трактоваться как последовательность элементов графа (вершин или ребер), когда нельзя ни один элемент изъять, не нарушив связности между вершинами x_s и x_t [8]. Следовательно, для формального описания ССРС может быть использована $\mathrm{M} = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \ldots \quad \mu_i]$ – вектор-строка КМУФ, описывающий все КМУФ системы, как основные, так и резервные.

Исследования показали, что такой способ описания кроме обеспечения удобного и наглядного с точки зрения условий работоспособности ССРС формализованного представления объекта исследования, позволяет снизить размерность пространства возможных решений при анализе его надежности.

Для графа сети связи, изображенного на рисунке 1, вектор-строка КМУФ может быть задан, следующим образом

$$\mathrm{M} = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \quad \mu_4 \quad \mu_5 \quad \mu_6 \quad \mu_7 \quad \mu_8 \quad \mu_9 \quad \mu_{10}$$
$$\mu_{11} \quad \mu_{12} \quad \mu_{13} \quad \mu_{14} \quad \mu_{15} \quad \mu_{16} \quad \mu_{17} \quad \mu_{18} \quad \mu_{19}], \tag{4}$$

где каждый элемент μ_i также является вектором-строкой $\mu_1 = [5]$, $\mu_2 = [6 \quad 7]$, $\mu_3 = [6 \quad 9 \quad 8]$, $\mu_4 = [6]$, $\mu_5 = [5 \quad 7]$, $\mu_6 = [5 \quad 8 \quad 9]$, $\mu_7 = [5 \quad 8]$, $\mu_8 = [6 \quad 9]$, $\mu_9 = [5 \quad 7 \quad 9]$, $\mu_{10} = [6 \quad 7 \quad 8]$,

$\mu_{11}=[7]$, $\mu_{12}=[5\quad 6]$, $\mu_{13}=[8\quad 9]$, $\mu_{14}=[8]$, $\mu_{15}=[7\quad 9]$, $\mu_{16}=[5\quad 6\quad 9]$, $\mu_{17}=[9]$, $\mu_{18}=[7\quad 8]$, $\mu_{19}=[6\quad 5\quad 8]$.

В зависимости от назначения инфраструктурного объекта к ССРС предъявляются требования сохранения работоспособности хотя бы одного КМУФ или некоторой их совокупности. Работоспособное состояние КМУФ – это такое состояние, когда все элементы КМУФ находятся в работоспособном состоянии. Состояние, когда хотя бы один элемент КМУФ неработоспособен, называется неработоспособным состоянием КМУФ [4, 9].

Для описания условий функционирования ССРС, в которой заданы КМУФ целесообразно использовать следующие обозначения: $\hat{\mathrm{M}}=[\hat{\mu}_1\quad \hat{\mu}_2\quad \ldots\quad \hat{\mu}_i]$ – вектор-строка состояний КМУФ, описывающий текущее состояние отдельных КМУФ; $\hat{\mu}_i\in\{1,0\}$ – случайная величина, описывающая состояние i-го КМУФ; $\overline{\overline{\hat{\mu}_i}}$ – работоспособное состояние i-го КМУФ, другими словами $\hat{\mu}_i=1$; $\overline{\hat{\mu}_i}$ – неработоспособное состояние i-го КМУФ, другими словами $\hat{\mu}_i=0$; $p\left(\overline{\overline{\hat{\mu}_i}}\right)$ – вероятность нахождения i-го КМУФ в работоспособном состоянии, другими словами $p(\hat{\mu}_i=1)$; $p\left(\overline{\hat{\mu}_i}\right)$ – вероятность нахождения i-го КМУФ в неработоспособном состоянии, другими словами $p(\hat{\mu}_i=0)$; $\mathrm{P}\hat{\mathrm{M}}=\left[\,p\left(\overline{\overline{\hat{\mu}_1}}\right)\quad p\left(\overline{\overline{\hat{\mu}_2}}\right)\quad \ldots\quad p\left(\overline{\overline{\hat{\mu}_i}}\right)\right]$ – вектор-строка вероятностей работоспособного состояния отдельных КМУФ.

Известно [7], что в алгебре логики существуют такие формы представления логических функций как ортогональная дизъюнктивная нормальная форма (ОДНФ) и совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Их замечательными свойствами является возможность замещения логических переменных вероятностями того или иного состояния этих переменных, а логических операций – арифметическими, например [8]:

$$\left(x_1\wedge\overline{x_2}\right)\vee\left(x_1\wedge x_2\wedge x_3\right)\overset{FR}{\rightarrow}$$

$$\overset{FR}{\rightarrow} p(x_1=1)\cdot p(x_2=0)+p(x_1=1)\cdot p(x_2=1)\cdot p(x_3=1), \tag{5}$$

где

$$FR=\left\{\left(\left\{\ldots,\overline{\overline{\hat{x}_s}},\ldots\right\},\left\{\ldots,p\left(\overline{\overline{\hat{x}_s}}\right),\ldots\right\}\right),\left(\left\{\ldots,\overline{\hat{x}_s},\ldots\right\},\left\{\ldots,p\left(\overline{\hat{x}_s}\right),\ldots\right\}\right),(\wedge,\times),(\vee,+)\right\}. \tag{6}$$

Следовательно, аналитическое описание условий функционирования ССРС, соответствующих сохранению хотя бы одного (m = 1) работоспособного КМУФ средствами алгебры логики, не вызовет затруднений. Однако в последние годы к инфраструктурным объектам все чаще предъявляются более жесткие требования по надежности, заключающиеся в необходимости сохранения в работоспособном состоянии 2, 3 и более КМУФ. Для общего описания как стандартных (m = 1) так и нестандартных (m > 1) условий функционирования ССРС потребовалась разработка и внедрение новой логической функции n логических переменных, которая названа ***логическим сочетанием***.

2. Исследование применимости функции логического сочетания для расчета вероятности работоспособного состояния системы и ее элементов

Для удобства аналитической записи условий работоспособности ССРС, в которых требуется сохранения не менее m КМУФ предлагается использовать новую логическую функцию обозначаемую следующим образом

$$\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^{(m)} \tag{7}$$

Правила работы этой логической функции формулируется следующим образом: логическое сочетание n логических переменных по m равно единице, тогда и только тогда, когда число логических переменных, равных единице, равно m или более.

Ниже демонстрируется логика работы данной функции на примере одной, двух и трех переменных:

$$\left(x_1\right)^{(0)} = 1, \quad \left(x_1\right)^{(1)} = x_1, \ \left(x_1\right)^{(2)} = 0,$$

$$\left(x_1, x_2\right)^{(0)} = 1, \ \left(x_1, x_2\right)^{(3)} = 0,$$

$$\left(x_1, x_2\right)^{(1)} = x_1 \vee x_2, \ \left(x_1, x_2\right)^{(2)} = x_1 \wedge x_2, \tag{8}$$

$$\left(x_1, x_2, x_3\right)^{(0)} = 1, \quad \left(x_1, x_2, x_3\right)^{(1)} = x_1 \vee x_2 \vee x_3, \ \left(x_1, x_2, x_3\right)^{(2)} = \left(x_1 \wedge x_2\right) \vee \left(x_1 \wedge x_3\right) \vee \left(x_2 \wedge x_3\right),$$

$$\left(x_1, x_2, x_3\right)^{(3)} = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3, \ \left(x_1, x_2, x_3\right)^{(4)} = 0.$$

Для формирования функции отрицания можно воспользоваться следующим выражением

$$\left(x_1\right)^{(2\cdot x_1)} = \overline{x_1}, \tag{9}$$

при этом $\left(2 \cdot x_1\right)$ это арифметическое произведение, то есть $2 \cdot 0 = 0, \ 2 \cdot 1 = 2$.

Поскольку с помощью предложенной функции *логического сочетания* можно записать основные функции одной и двух переменных: отрицание (9), конъюнкцию и дизъюнкцию (8); следовательно, эта функция, как и функции "штрих Шеффера" и "стрелка Пирса" достаточна для записи любой логической функции одного и двух независимых логических переменных.

Ниже представлено аналитическое выражение с помощью которого можно найти дизъюнктивную нормальную форму любого логического сочетания для случая когда $0 < m \le n$

$$\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^{(m)} = \bigvee_{i_{m-1}=1}^{n-[m-1]} x_{i_{m-1}} \wedge \left[\bigvee_{i_{m-2}=i_{m-1}+1}^{n-[m-2]} x_{i_{m-2}} \wedge \left[\ \ldots \wedge \left[\bigvee_{i_{m-m}=i_{m-m+1}+1}^{n-[m-m]} x_{i_{m-m}} \right] \ldots \ \right] \right]. \tag{10}$$

Конструктивность предложенной выше функции (7) ниже демонстрируется на простом примере методом полного перебора для определения вероятности работоспособного состояния всх КМУФ для графа сети связи, изображенного на рисунке 1. Исходные данные для расчета представлены ниже с помощью матрицы смежности,

$$M_{\text{вер}}^{\text{смежн}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0{,}9 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}9 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 0{,}9 & 1 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}9 & 1 \end{Vmatrix} \quad (11)$$

в которой хранятся вероятности работоспособного состояния его вершин и ребер (если элемента нет или он находится в неработоспособном состоянии, тогда его вероятность работоспособного состояния равна нулю) и матрицы смежности, в которой хранятся номера соответствующих элементов графа

$$M_{\text{номера}}^{\text{смежн}} = \begin{Vmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 9 \\ 0 & 8 & 9 & 4 \end{Vmatrix}. \quad (12)$$

Кроме того, для данной ССРС задано все множество корреспондирующих пар. В терминах теории сетей связи это значит, что заданы все двухполюсные сети связи (ДСС) [10], т. е. определен вектор-строка $\Upsilon = [\upsilon_1 \quad \upsilon_2 \quad \upsilon_3 \quad \upsilon_4 \quad \upsilon_5 \quad \upsilon_6]$, элементами которого являются вектора-строки, описывающих ДСС как совокупность КМУФ:

$$\upsilon_1 = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3],\ \upsilon_2 = [\mu_4 \quad \mu_5 \quad \mu_6],\ \upsilon_3 = [\mu_7 \quad \mu_8 \quad \mu_9 \quad \mu_{10}],$$

$$\upsilon_4 = [\mu_{11} \quad \mu_{12} \quad \mu_{13}],\ \upsilon_5 = [\mu_{14} \quad \mu_{15} \quad \mu_{16}],\ \upsilon_6 = [\mu_{17} \quad \mu_{18} \quad \mu_{19}].$$

Такое описание ДСС несколько отличается от традиционного подхода [4, 9], принятого в предметной области. Однако такое формальное представление, как показали исследования, способствует значительному снижению вычислительной сложности задачи расчета параметров надежности ССРС.

Ниже приведен расчет вероятности работоспособного состояния всех КМУФ первой ДСС с использованием предложенной ранее логической функции сочетания

$$p\left(\overline{\overline{\hat{\mu}_1}}\right) = p\left(\left(\hat{x}_5\right)^{(1)} = 1\right) = P(N_{17}) + P(N_{18}) + P(N_{19}) + P(N_{20}) + P(N_{21}) + P(N_{22}) + P(N_{23}) +$$

$$+ P(N_{24}) + P(N_{25}) + P(N_{26}) + P(N_{27}) + P(N_{28}) + P(N_{29}) + P(N_{30}) + P(N_{31}) + P(N_{32}) = 0{,}9. \quad (13)$$

$$p\left(\overline{\overline{\hat{\mu}_2}}\right) = p\left(\left(\hat{x}_6, \hat{x}_7\right)^{(2)} = 1\right) = P(N_{13}) + P(N_{14}) + P(N_{15}) + P(N_{20}) + P(N_{161}) + P(N_{29}) +$$

$$+ P(N_{30}) + P(N_{31}) + P(N_{32}) = 0{,}81003. \quad (14)$$

$$p\left(\overline{\overline{\hat{\mu}_3}}\right) = p\left(\left(\hat{x}_6, \hat{x}_9, \hat{x}_8\right)^{(3)} = 1\right) = P(N_{12}) + P(N_{16}) + P(N_{28}) + P(N_{32}) = 0{,}72903. \quad (15)$$

В таблице обощены все возможные состояния элементов первой ДСС.

Таблица

Таблица всех состояний для первой ДСС и образующих ее КМУФ (составлено автором)

N	$\hat{x}_5$	$\hat{x}_6$	$\hat{x}_7$	$\hat{x}_8$	$\hat{x}_9$	$P(N)$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{\mu}_3$	$\hat{\upsilon}_1$, $m=1$	$\hat{\upsilon}_1$, $m=2$	$\hat{\upsilon}_1$, $m=3$
1	0	0	0	0	0	0,00001	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	0,00009	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0,00009	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0,00081	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0,00009	0	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	1	0,00081	0	0	0	0	0	0
7	0	0	1	1	0	0,00081	0	0	0	0	0	0
8	0	0	1	1	1	0,00729	0	0	0	0	0	0
9	0	1	0	0	0	0,00009	0	0	0	0	0	0
10	0	1	0	0	1	0,00081	0	0	0	0	0	0
11	0	1	0	1	0	0,00081	0	0	0	0	0	0
12	0	1	0	1	1	0,00729	0	0	1	1	0	0
13	0	1	1	0	0	0,00081	0	1	0	1	0	0
14	0	1	1	0	1	0,00729	0	1	0	1	0	0
15	0	1	1	1	0	0,00729	0	1	0	1	0	0
16	0	1	1	1	1	0,06561	0	1	1	1	1	0
17	1	0	0	0	0	0,00009	1	0	0	1	0	0
18	1	0	0	0	1	0,00081	1	0	0	1	0	0
19	1	0	0	1	0	0,00081	1	0	0	1	0	0
20	1	0	0	1	1	0,00729	1	0	0	1	0	0
21	1	0	1	0	0	0,00081	1	0	0	1	0	0
22	1	0	1	0	1	0,00729	1	0	0	1	0	0
23	1	0	1	1	0	0,00729	1	0	0	1	0	0
24	1	0	1	1	1	0,06561	1	0	0	1	0	0
25	1	1	0	0	0	0,00081	1	0	0	1	0	0
26	1	1	0	0	1	0,00729	1	0	0	1	0	0
27	1	1	0	1	0	0,00729	1	0	0	1	0	0
28	1	1	0	1	1	0,06561	1	0	1	1	1	0
29	1	1	1	0	0	0,00729	1	1	0	1	1	0
30	1	1	1	0	1	0,06561	1	1	0	1	1	0
31	1	1	1	1	0	0,06561	1	1	0	1	1	0
32	1	1	1	1	1	0,59049	1	1	1	1	1	1

Параметры надежности остальных КМУФ расчитываются аналогично. Видно, что расчет на базе логической функции сочетания является строго аналитическим, удобным и наглядным.

Аналогичным образом далее производится анализ надежности ДСС.

Под работоспособным состоянием ДСС далее понимается такое состояние, когда в работоспособном состоянии находится не менее заданного числа КМУФ, образующих данную ДСС. Состояние, когда число работоспособных КМУФ, образующих данную ДСС, менее заданного будет называться неработоспособным состоянием ДСС [4, 9].

Далее используются следующие обозначения: $\hat{\Upsilon} = [\hat{\upsilon}_1 \quad \hat{\upsilon}_2 \quad \ldots \quad \hat{\upsilon}_r]$ – вектор-строка состояний ДСС, описывающий текущее состояние отдельных ДСС; $\hat{\upsilon}_i \in \{1, 0\}$ – случайная величина, описывающая состояние i-й ДСС; $\overline{\overline{\hat{\upsilon}_i}}$ – работоспособное состояние i-й ДСС, другими словами $\hat{\upsilon}_i = 1$; $\overline{\hat{\upsilon}_i}$ – неработоспособное состояние i-й ДСС, другими словами $\hat{\upsilon}_i = 0$; $p\left(\overline{\overline{\hat{\upsilon}_i}}\right)$ – вероятность нахождения i-й ДСС в работоспособном состоянии, другими словами $p(\hat{\upsilon}_i = 1)$; $p\left(\overline{\hat{\upsilon}_i}\right)$ – вероятность нахождения i-й ДСС в неработоспособном состоянии, другими словами $p(\hat{\upsilon}_i = 0)$; $\mathrm{P}\hat{\Upsilon} = \left[\, p\left(\overline{\overline{\hat{\upsilon}_1}}\right) \quad p\left(\overline{\overline{\hat{\upsilon}_2}}\right) \quad \ldots \quad p\left(\overline{\overline{\hat{\upsilon}_i}}\right)\right]$ – вектор-строка вероятностей работоспособного состояния отдельных ДСС.

Значение логической переменной $\hat{\upsilon}_i$ может быть найдено с помощью логической функции сочетания (7) следующего вида

$$\hat{\upsilon}_i = \Big(\underbrace{\hat{\mu}_r, \hat{\mu}_k, \ldots, \hat{\mu}_t}_{j}\Big)^{(m)}, \tag{16}$$

при этом переменная $1 \le m \le j$ (т.е. она меньше либо равна числа КМУФ, образующих данную ДСС).

Используя данные таблицы 1, далее рассчитывается вероятность работоспособного состояния первой ДСС для графа сети связи (рис. 1).

Для m = 1 (стандартные условия):

$$p\left(\overline{\overline{\hat{\upsilon}_1}} \,|\, m = 1\right) = p\left((\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3)^{(1)} = 1\right) = P(N_{12}) + P(N_{13}) + P(N_{14}) + P(N_{15}) + P(N_{16}) +$$
$$+ P(N_{17}) + P(N_{18}) + P(N_{19}) + P(N_{20}) + P(N_{21}) + P(N_{22}) + P(N_{23}) + P(N_{24}) + P(N_{25}) +$$
$$+ P(N_{26}) + P(N_{27}) + P(N_{28}) + P(N_{29}) + P(N_{30}) + P(N_{31}) + P(N_{32}) = 0{,}98829\,. \tag{17}$$

Для m = 2:

$$p\left(\overline{\overline{\hat{\upsilon}_1}} \,|\, m = 2\right) = p\left((\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3)^{(2)} = 1\right) =$$
$$= P(N_{16}) + P(N_{28}) + P(N_{29}) + P(N_{30}) + P(N_{31}) + P(N_{32}) = 0{,}86022\,. \tag{18}$$

Для m = 3:

$$p\left(\overline{\overline{\hat{\upsilon}_1}} \,|\, m = 3\right) = p\left((\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3)^{(3)} = 1\right) = P(N_{32}) = 0{,}59049\,. \tag{19}$$

Параметры надежности остальных ДСС расчитываются аналогично.

Ту же логическую функцию (7) можно использовать для оценки параметров надежности ССРС в целом. В терминах теории сетей связи это значит, что на рисунке 1 задана некая многополюсная сеть связи (МСС) [10]. В этом случае работоспособное состояние МСС – это такое состояние, когда в работоспособном состоянии находится не менее заданного числа

ДСС, образующих данную МСС. Состояние, когда число работоспособных ДСС, образующих данную МСС, менее заданного называется неработоспособным состоянием МСС [4, 9].

Пусть используются следующие обозначения: $\hat{\mathrm{W}} = \begin{bmatrix} \hat{w}_1 & \hat{w}_2 & \ldots & \hat{w}_r \end{bmatrix}$ – вектор-строка состояний МСС, описывающий текущее состояние отдельных МСС; $\hat{w}_i$ – случайная величина, описывающая состояние i-й МСС; $\overline{\overline{\hat{w}_i}}$ – работоспособное состояние i-й МСС, другими словами $\hat{w}_i = 1$; $\overline{\hat{w}_i}$ – неработоспособное состояние i-й МСС, другими словами $\hat{w}_i = 0$; $p\left(\overline{\overline{\hat{w}_i}}\right)$ – вероятность нахождения i-й МСС в работоспособном состоянии, другими словами $p(\hat{w}_i = 1)$; $p\left(\overline{\hat{w}_i}\right)$ – вероятность нахождения i-й МСС в неработоспособном состоянии, другими словами $p(\hat{w}_i = 0)$; $\mathrm{P}\hat{\mathrm{W}} = \left[p\left(\overline{\overline{\hat{w}_1}}\right) \quad p\left(\overline{\overline{\hat{w}_2}}\right) \quad \ldots \quad p\left(\overline{\overline{\hat{w}_i}}\right) \right]$ – вектор-строка вероятностей работоспособного состояния отдельных МСС.

Вероятность работоспособного состояния МСС, т. е. значение логической переменной $\hat{w}_i$, и в этом случае может быть найдено с помощью предложенной ранее новой логической функции (7). Можно записать

$$\hat{w}_i = \left(\underbrace{\hat{\upsilon}_r, \hat{\upsilon}_k, \ldots, \hat{\upsilon}_t}_{j} \right)^{(m)}, \tag{20}$$

при этом переменная $1 \le m \le j$ (т.е. она меньше либо равна числа ДСС, образующих данную МСС). Случай, когда $m = j$ при этом будет считаться стандартным требованием для работоспособного состояния инфраструктурного объекта. Можно показать, что для исследуемого графа сети связи (рис. 1):

$$p\left(\overline{\overline{\hat{w}_1}} \mid m = 6\right) = p\left(\left(\hat{\upsilon}_1 \mid m=1, \hat{\upsilon}_2 \mid m=1, \hat{\upsilon}_3 \mid m=1, \hat{\upsilon}_4 \mid m=1, \hat{\upsilon}_5 \mid m=1, \hat{\upsilon}_6 \mid m=1\right)^{(6)} = 1\right) =$$

$$= P(N_{12}) + P(N_{14}) + P(N_{15}) + P(N_{16}) + P(N_{20}) + P(N_{22}) + P(N_{23}) + P(N_{24})$$

$$+ P(N_{26}) + P(N_{27}) + P(N_{28}) + P(N_{30}) + P(N_{31}) + P(N_{32}) = 0{,}97686\,. \tag{21}$$

$$p\left(\overline{\overline{\hat{w}_2}} \mid m = 1\right) = p\left(\left(\hat{\upsilon}_1 \mid m=1, \hat{\upsilon}_3 \mid m=1\right)^{(1)} = 1\right) =$$

$$= P(N_{10}) + P(N_{12}) + P(N_{13}) + P(N_{14}) + P(N_{15}) + P(N_{16}) + P(N_{17}) + P(N_{18}) +$$

$$+ P(N_{19}) + P(N_{20}) + P(N_{21}) + P(N_{22}) + P(N_{23}) + P(N_{24}) + P(N_{25}) + P(N_{26}) + P(N_{27}) +$$

$$+ P(N_{28}) + P(N_{29}) + P(N_{30}) + P(N_{31}) + P(N_{32}) = 0{,}9891\,. \tag{22}$$

Видно, что расчет параметров надежности ССРС на базе функции логического сочетания (7) предполагает последовательное использование функций работоспособности в следующем порядке: КМУФ, ДСС и МСС. Аналогично рассуждая можно показать, что выбранный композиционный подход целесообразно применять для анализа надежности отдельных ДСС и

ССРС в целом у которых условия работоспособности записываются не только в виде дизъюнкции КМУФ, но и в виде дизъюнкции минимальных остовных деревьев, кратчайших гамильтоновых циклов и др. типов подграфов [10].

Заключение

Представленный в статье подход к формальной постановке и решению задач расчета вероятности работоспособности элементов структурно-сложных распределенных систем базируется на положениях алгебры логики и теории вероятностей, а также на композиции логических функций, описывающих условия работоспособного состояния КМУФ, ДСС и МСС. Используемая при этом новая логическая функция логического сочетания позволяет не только осуществить компактную формальную постановку задачи, но и аналитически строго, наглядно и удобно произвести ее решение. Об этом свидетельствует не только пример сети связи, представленный в статье, но и имеющиеся к настоящему времени результаты частнопроблемных исследований, например [11].

Достоинством предложенного инструментария является возможность учета нестандартных требований для работоспособного состояния инфраструктурного объекта, таких как многопутевость (многомаршрутность), многоадресность и т. п. Кроме того, как показала практика применения полученного инструментария, существенно упростился процесс разработки соответствующих программных средств анализа надежности ССРС.

Исследования показали, что областью применения предложенных инноваций является проблематика анализа как надежности, так и безопасности структурно-сложных распределенные систем [8], к которым наряду с телекоммуникационными сетями следует также отнести авто- или железнодорожные сети, газотранспортные, нефтепроводные и энергетические системы и пр., которые при математическом описании (моделировании) не могут быть сведены к последовательным, параллельным или древовидным структурам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саитов И.А. Методологические основы синтеза полимодальных инфокоммуникационных систем государственного управления / И.А. Саитов, О.О. Басов, А.А. Карпов. – Орел: Академия ФСО России, 2015. – 271 с.
2. Тихонов А.Н., Иванников А.Д., Соловьев И.В. и др. Основы управления сложной организационно-технической системой. Информационный аспект: монограф. // М.: МАКС Пресс. – 2010. – 136 с.
3. Phillips, D. and Garcia-Diaz, A. Fundamentals of Network Analysis. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, 1981. – 474 p.
4. Филин, Б.П. Методы анализа структурной надежности сетей связи / Б.П. Филин. – М.: Радио и связь, 1988. – 208 с.
5. Рябинин, И.А. Основы теории и расчета надежности судовых электроэнергетических систем / И.А. Рябинин. – Л.: Судостроение, 1967. 362 с.
6. Рябинин, И.А. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем / И.А. Рябинин, Г.Н. Черкесов. – М.: Радио и связь, 1981. – 264 с.
7. Айзерман, М.А. Логика. Автоматы. Алгоритмы / М.А. Айзерман, Л.А. Гусев, Л.И. Розоноэр, И.М. Смирнова, А.А. Таль. – М.: Физматгиз, 1963. – 556 с.
8. Рябинин, И.А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем / И.А. Рябинин. – СПб.: Политехника, 2000. – 248 с.
9. Надежность и живучесть систем связи / Б.Я. Дудник, В.Ф. Овчеренко, В.К. Орлов и др.; Под ред. Б.Я. Дудника. – М.: Радио и связь, 1984. – 216 с.
10. Christofides, N. Graph Theory. An Algorithmic Approach. Academic Press, New York, London, San Francisco, 1975. – 432 p.
11. Алексиков, Ю.Г. Аналитико-алгоритмическая модель сети обмена данными управления телекоммуникационной системы, учитывающая вариативность интенсивности поступления потока управляющей информации / Ю.Г. Алексиков. – Интернет-журнал Науковедение, Выпуск 1 (20), 2014. – 17 с.

Tregubov Roman Borisovich
The Academy of the Federal guard service of the Russian Federation, Russia, Orel
E-mail: treba@list.ru

Saitov Igor Akramovich
The Academy of the Federal guard service of the Russian Federation, Russia, Orel
E-mail: akramovish@mail.ru

Application of Boolean algebra for formalization and the solution of tasks of analysis of reliability of structural and difficult distributed systems

Abstract. In article new approach to the problem definition and the solution of tasks of calculation of probability of working capacity of structural and difficult distributed systems to which belong telecommunication, a car - or railway networks, gas transmission, petrowire and power systems is offered. Structural complexity consists in that, in case of the mathematical description (modeling) of structure of such systems can't be brought together to simple sequential, parallel or tree structures.

The developed tools are based on provisions of Boolean algebra and probability theory, and also on composition of homogeneous double-valued logic functions of *n*-variables describing conditions of an operable status of separate elements and system in general. The new function of a logical combination used at the same time allows not only to realize a compact formal problem definition, but also it is analytically strict, evident and convenient to make its decision in case of low computing complexity of the made procedures.

On the example of a communication network practical calculation of parameters of reliability of structural and difficult distributed system at which conditions of working capacity written in the form of a disjunction of the shortest routes of successful functioning is made. On the basis of the offered function of a logical combination for calculation of parameters of reliability of structural and difficult distributed system sequential use of working capacity functions of the shortest routes of successful functioning, bipolar and multi-pole communication networks is carried out.

Keywords: boolean algebra; structural complexity; distributed systems; probability theory; function of a logical combination; reliability; the shortest routes; working capacity function

REFERENCES

1. Saitov I.A. Metodologicheskie osnovy sinteza polimodal'nykh infokommunikatsionnykh sistem gosudarstvennogo upravleniya / I.A. Saitov, O.O. Basov, A.A. Karpov. – Orel: Akademiya FSO Rossii, 2015. – 271 s.
2. Tikhonov A.N., Ivannikov A.D., Solov'ev I.V. i dr. Osnovy upravleniya slozhnoy organizatsionno-tekhnicheskoy sistemoy. Informatsionnyy aspekt: monograf. // M.: MAKS Press. – 2010. – 136 s.
3. Phillips, D. and Garcia-Diaz, A. Fundamentals of Network Analysis. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, 1981. – 474 p.
4. Filin, B.P. Metody analiza strukturnoy nadezhnosti setey svyazi / B.P. Filin. – M.: Radio i svyaz', 1988. – 208 s.
5. Ryabinin, I.A. Osnovy teorii i rascheta nadezhnosti sudovykh elektroenergeticheskikh sistem / I.A. Ryabinin. – L.: Sudostroenie, 1967. 362 s.
6. Ryabinin, I.A. Logiko-veroyatnostnye metody issledovaniya nadezhnosti strukturno-slozhnykh sistem / I.A. Ryabinin, G.N. Cherkesov. – M.: Radio i svyaz', 1981. – 264 s.
7. Ayzerman, M.A. Logika. Avtomaty. Algoritmy / M.A. Ayzerman, L.A. Gusev, L.I. Rozonoer, I.M. Smirnova, A.A. Tal'. – M.: Fizmatgiz, 1963. – 556 s.
8. Ryabinin, I.A. Nadezhnost' i bezopasnost' strukturno-slozhnykh sistem / I.A. Ryabinin. – SPb.: Politekhnika, 2000. – 248 s.
9. Nadezhnost' i zhivuchest' sistem svyazi / B.Ya. Dudnik, V.F. Ovcherenko, V.K. Orlov i dr.; Pod red. B.Ya. Dudnika. – M.: Radio i svyaz', 1984. – 216 s.
10. Christofides, N. Graph Theory. An Algorithmic Approach. Academic Press, New York, London, San Francisco, 1975. – 432 p.
11. Aleksikov, Yu.G. Analitiko-algoritmicheskaya model' seti obmena dannymi upravleniya telekommunikatsionnoy sistemy, uchityvayushchaya variativnost' intensivnosti postupleniya potoka upravlyayushchey informatsii / Yu.G. Aleksikov. – Internet-zhurnal Naukovedenie, Vypusk 1 (20), 2014. – 17 s.