

Интернет-журнал «Наукоедение» ISSN 2223-5167 <http://naukovedenie.ru/>

Том 9, №3 (2017) <http://naukovedenie.ru/vol9-3.php>

URL статьи: <http://naukovedenie.ru/PDF/78TVN317.pdf>

Статья опубликована 22.06.2017

Ссылка для цитирования этой статьи:

Александровский М.В., Захарова Л.В. Особенности алгоритма вариационного метода для нелинейной постановки задачи расчета упругой непологой нити // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 9, №3 (2017) <http://naukovedenie.ru/PDF/78TVN317.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 624.072

Александровский Максим Вячеславович

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Россия, Москва¹

Старший преподаватель

Кандидат технических наук, доцент

E-mail: AleksandrovskiyMV@mgsu.ru

Захарова Лидия Васильевна

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Россия, Москва

Кандидат технических наук, доцент

E-mail: ZaharovaLV@mgsu.ru

Особенности алгоритма вариационного метода для нелинейной постановки задачи расчета упругой непологой нити

Аннотация. В настоящее время, актуальными становятся вопросы, связанные с расчетом систем, у которых в качестве конструктивных элементов выступает упругая нить. В основе решения поставленной задачи лежит вариационная версия метода конечного элемента. Кроме того, расчет предусматривает использование метода последовательных нагружений. В статье рассматривается алгоритм расчёта гибкой непологой растяжимой нити на действие горизонтальных и вертикальных распределённых и сосредоточенных сил. На первом этапе рассматривается равновесие нити под действием собственного веса. Особенность алгоритма заключается в том, что второй этап предусматривает расчет деформированной нити на действие дополнительной нагрузки, которая делится на части и прикладывается ступенями. На каждом этапе нагружения в выражениях для продольной деформации и кривизны сохраняются нелинейные составляющие до второго порядка малости включительно, что приводит к нелинейной системе разрешающих уравнений. Для ее решения может быть использован метод итераций. Особенностью приведенного алгоритма является использование нелинейной матрицы жесткости, что дает возможность не только уточнить решение на каждом шаге нагружения, но и снизить число этапов нагружения за счет увеличения приращение нагрузки.

Ключевые слова: алгоритм расчёта; упругая непологая нить; вариационный метод; метода последовательных нагружений; метод итераций; нелинейная система разрешающих уравнений; нелинейная матрица жесткости

¹ 129337, Россия, Центральный федеральный округ, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26

Введение

В настоящее время, в связи с бурными темпами развития объектов строительства и электроэнергетики все более актуальными становятся вопросы, связанные с расчетом систем, конструктивным элементом которых является упругая нить. Примером таких систем могут служить линии электропередач и различные вантовые конструкции.

Аналитический расчет упругих непологих нитей представляет собой весьма сложную задачу вследствие геометрической нелинейности системы, но современный уровень развития вычислительной техники дает возможность применять для ее решения численные методы.

Несмотря на разнообразие существующих методов по расчету гибких нитей они обычно не связаны между собой и используются для решения частных задач. Например, в работе [1] для решения дифференциального уравнения равновесия непологой нерастяжимой нити используется метод конечных разностей. В работе [2] гибкая нить при расчете на сосредоточенные силы моделируется шарнирной цепью, а в работе [3] для расчета гибкой непологой нити применяется метод конечного элемента.

В статье представлен алгоритм расчета гибкой непологой растяжимой нити на действие вертикальных и горизонтальных сосредоточенных и распределенных сил. Так же как в работе [4], авторами использована вариационная версия метода конечного элемента [5], детально разработанная в [6], одновременно - алгоритмом расчета, заложено использование метода последовательных нагружений, но в отличие от [4], на каждом этапе нагружения в выражениях для деформаций и кривизны сохраняются нелинейные составляющие до второго порядка малости включительно. Это дает возможность уточнить решение по сравнению с линеаризованными уравнениями и увеличить приращение нагрузки на каждом этапе нагружения.

Методология

Расчет упругой нити можно разделить на два этапа. На первом этапе, как обычно проводится расчет на действие собственного веса. Точное решение этой задачи известно и представлено, например, в работах [7] и [8], что дает возможность определить все физические и геометрические характеристики начального состояния нити.

На втором этапе, алгоритмом предусматривается расчет на действие дополнительной вертикальной и горизонтальной распределенной нагрузки, а также вертикальных и горизонтальных сосредоточенных сил. Как уже отмечалось, на каждом шаге нагружения в выражениях для осевой деформации и направляющих косинусов сохраняются малые величины до второго порядка включительно.

На рис. 1 представлено начальное положение нити Γ^0 и два последовательных очертания Γ^I и Γ^J . Для каждого очертания имеются криволинейные координаты S^J связанные с глобальной системой координат X_i посредством Θ_i^J - направляющих косинусов для дуги S^J по отношению к координатным направлениям X_i .

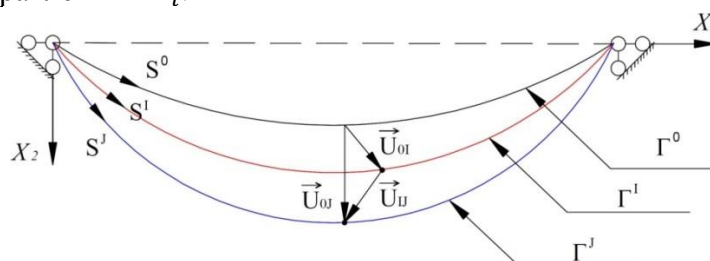


Рисунок 1. Расчетные этапы положения нити (составлено/разработано авторами)

Основная часть. Основные вариационные уравнения при переходе от состояния I к состоянию J согласно [4] можно представить в виде:

$$\delta U^{JI} = \delta A^{JI}. \quad (1)$$

Здесь

$$\delta U^{JI} = \int_{S^I} [\sum_{i=1}^2 (T^J \theta_i^J - T^I \theta_i^I) \frac{dv_i}{ds^I}] ds^I, \quad (2)$$

$$\delta A^{JI} = \int_{S^I} \sum_{i=1}^2 q_i v_i ds^I + \sum_K \left(\sum_{i=1}^2 P_{i(K)} v_{i(K)} \right). \quad (3)$$

Здесь: T^I и T^J - продольные усилия для очертаний I и J, соответственно, v_i ($i = 1, 2$) - возможные перемещения относительно осей X_i , $q_i = q_i^{JI} - q_i^I$ - компоненты приращения распределённой нагрузки, а $P_{i(K)} = P_{i(K)}^J - P_{i(K)}^I$ - приращение сосредоточенных сил.

Изменение физических и геометрических величин при переходе от состояния I к состоянию J можно представить в следующем виде:

$$dS^J = (1 + \varepsilon^{JI}) dS^I; T^J = T^I + EF \varepsilon^{JI}, \quad (4a)$$

$$\theta_i^J = (\theta_i^I + \frac{du_i}{ds^I}) / (1 + \varepsilon^{JI}) dS^I, (i = 1, 2), \varepsilon^{JI} = -1 + [1 + \sum_{i=1}^2 (2\theta_i^I \frac{du_i}{ds^I} + (\frac{du_i}{ds^I})^2)]^{1/2}. \quad (4б)$$

Здесь: ε^{JI} - продольная деформация, E - модуль упругости, F - площадь поперечного сечения, u_i - действительные перемещения при переходе от очертания I к J.

Охраняя в выражениях (4б) малые величины до второго порядка включительно и отбрасывая индекс «I», представим их в следующем виде:

$$\varepsilon^{JI} = \sum_{i=1}^2 [\theta_i \frac{du_i}{ds} + \frac{\theta_j^2}{2} (\frac{du_i}{ds})^2] - \theta_1 \theta_2 \frac{du_1}{ds} \frac{du_2}{ds},$$

$$\theta_i^J = \theta_i + \theta_j^2 \frac{du_i}{ds} - \theta_i \theta_j \frac{du_j}{ds} - \frac{3}{2} \theta_i \theta_j^2 (\frac{du_i}{ds})^2 + \theta_i (1 - \frac{3}{2} \theta_i^2) (\frac{du_j}{ds})^2 + \theta_j (3\theta_i^2 - 1) \frac{du_i}{ds} \frac{du_j}{ds}. \quad (5)$$

$(i = 1, 2)$

Подставив (5) в (2), представим полученное выражение в тензорной форме:

$$\delta U^{JI} = \int_S \frac{dv_i}{ds} (B_{ij} + D_{ij}) \frac{du_i}{ds} ds, \quad (6)$$

Стоящие под знаком интеграла слагаемые могут быть записаны в виде следующих выражений:

$$B_{ii} = EF \theta_i^2 + T \theta_j^2, B_{12} = B_{21} = \theta_1 \theta_2 A, D_{11} = \alpha_{11} \omega = -D_{22}, D_{ij} = \alpha_{ij} \omega (i \neq j), \quad (7)$$

где:

$$A = EF - T; \alpha_{11} = \frac{3}{2} \theta_1 \theta_2 A; \alpha_{12} = (1 - \frac{3}{2} \theta_1^2) A; \alpha_{21} = (\frac{3}{2} \theta_2^2 - 1) A;$$

$$\omega = \theta_2 \frac{du_1}{ds} - \theta_1 \frac{du_2}{ds}. \quad (8)$$

Для построения решения вариационного уравнения нить Γ^I разбивается на N криволинейных элементов, каждый из которых ограничивается узловыми точками $(K - 1)$ и $(K + 1)$ и имеет промежуточную точку (K) , расположенную в середине элемента, длина которого составляет h_e (рис. 2). Номер элемента определяется номером правого узла деленным на два.

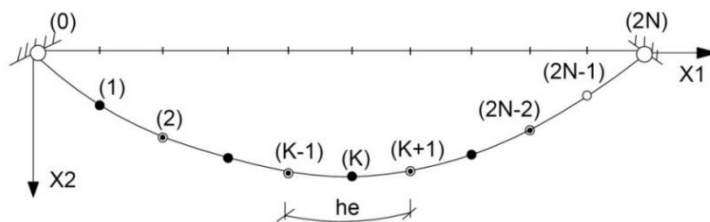


Рисунок 2. Расчетная схема нити (составлено/разработано авторами)

В представленном ниже решении действительные и возможные перемещения непрерывны во всех узловых точках, а остальные величины непрерывны в пределах каждого элемента, но могут иметь скачки на его границах. Сосредоточенные силы располагаются только в узловых точках на границах элементов.

В данной задаче аналогично тому, как в обобщённом методе конечных разностей [9] функция перемещения в пределах элемента описывается квадратной параболой, ординаты которой в узловых точках совпадают с искомыми перемещениями. Применительно к условиям поставленной задачи, эта функция непрерывна в узловых точках, а ее производные могут иметь скачки. Значения производных в этих точках в этом случаях равны:

$$\begin{aligned} u'_{i(K-1)} &= [-3u_{i(K-1)} + 4u_{i(K)} - u_{i(K+1)}]/h_e, \\ u'_{i(K)} &= [-u_{i(K-1)} + u_{i(K+1)}]/h_e, \\ u'_{i(K+1)} &= [u_{i(K-1)} - 4u_{i(K)} + 3u_{i(K+1)}]/h_e. \quad (i = 1,2) \end{aligned} \quad (9)$$

Проинтегрировав с помощью метода Симпсона [9] выражения (6) и (3) в пределах элемента, представим их в следующем виде:

$$\delta U_e^{II} = \{v_e\}^T [K_e] \{u_e\}; \delta A_e^{II} = \{v_e\}^T [\Phi_e] \quad (10)$$

Здесь: $\{u_e\}^T = [u_{1(K-1)} u_{2(K-1)} u_{1(K)} u_{2(K)} u_{1(K+1)} u_{2(K+1)}]$ - вектор перемещений для элемента e . Вектор $\{v_e\}$ имеет такую же структуру. $[K_e]$ - симметричная относительно главной диагонали матрицы жёсткости для элемента порядка (6×6) имеет следующий вид:

$$[K_e] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} K_e^{11} & K_e^{12} & K_e^{13} \\ K_e^{21} & K_e^{22} & K_e^{23} \\ K_e^{31} & K_e^{32} & K_e^{33} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где:

$$[K_e^{nm}] = \begin{bmatrix} K_{11}^{nm(e)} & K_{12}^{nm(e)} \\ K_{21}^{nm(e)} & K_{22}^{nm(e)} \end{bmatrix} \text{ и } [K_e^{nm}] = [K_e^{mn}]. \quad (12)$$

Суммарная матрица жесткости для элемента равна:

$$[K_e] = [R_e] + [G_e], \quad (13)$$

Здесь: $[R_e]$ - линейная составляющая матрицы жесткости, а $[G_e]$ - нелинейная составляющая матрицы жесткости. Элементы $[G_e]$ зависят от перемещений $\{u_e\}$ и определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} g_{ij(e)}^{11} &= [9D_{ij(K-1)}^{II} + 4D_{ij(K)} + D_{ij(K+1)}^{II}]/h_e, \\ g_{ij(e)}^{12} &= -4 [3D_{ij(K-1)}^{II} + D_{ij(K+1)}^{II}]/h_e, \\ g_{ij(e)}^{13} &= [3D_{ij(K-1)}^{II} - 4D_{ij(K)} + 3D_{ij(K+1)}^{II}]/h_e, \end{aligned} \quad (14)$$

$$g_{ij(e)}^{22} = 16 [D_{ij(K-1)}^{\Pi} + D_{ij(K+1)}^{\Lambda}] / h_e,$$

$$g_{ij(e)}^{23} = -4 [D_{ij(K-1)}^{\Pi} + 3D_{ij(K+1)}^{\Lambda}] / h_e,$$

$$g_{ij(e)}^{33} = [D_{ij(K-1)}^{\Pi} + 4D_{ij(K)} + 9D_{ij(K+1)}^{\Lambda}] / h_e.$$

Здесь и далее верхние индексы Π и Λ указывают значение рассматриваемой функции справа или слева относительно узла.

Так как матрица $[R_e]$ имеет такую же структуру как и матрица $[G_e]$, то ее элементы можно получить заменой D_{ij} на B_{ij} .

Следует отметить, что согласно [4]

$$\{\Phi_e\}^T = \frac{h_e}{6} [q_{1(K-1)}^{\Pi} q_{2(K-1)}^{\Pi} 4q_{1(K)} 4q_{2(K)} q_{1(K+1)}^{\Lambda} q_{2(K+1)}^{\Lambda}]. \quad (15)$$

Суммирование по элементам в выражениях (10), а также учет произвольности виртуальных перемещений $\{v_e\}$, дает возможность свести уравнения (1) к следующей системе нелинейных уравнений относительно узловых перемещений:

$$[K]\{u\} = \{f\}, \text{ где } \{f\} = \{\Phi_e\} + 6\{P\}, \quad (16)$$

где: $[K]$ - нелинейная матрица жесткости, $\{f\}$ - вектор приращения внешних сил при не смещающихся опорах, что отражено в условии $u_{i(0)} = u_{i(2N)} = 0$.

В этом случае $[K]$ - квадратная симметричная матрица порядка $(4N - 2)$, $\{u\}$ - вектор перемещений, $\{\Phi\}$ - обобщенный вектор приращения распределённой нагрузки, $\{P\}$ - вектор приращения узловых сосредоточенных сил, состоящие из $(4N - 2)$ элементов и имеющие следующую структуру:

$$\{u\} = [u_{1(1)} u_{2(1)} \dots u_{1(K)} u_{2(K)} \dots u_{1(2N-1)} u_{2(2N-1)}]^T,$$

$$\{P\} = [0 \ 0 \ P_{1(2)} P_{2(2)} \dots P_{1(m)} P_{2(m)} \dots P_{1(N-2)} P_{2(N-2)} \ 0 \ 0]^T.$$

Здесь: $P_{i(m)} = 0$ при нечётном m .

Вектор $\{\Phi\}$ имеет следующий вид:

$$\{\Phi\} = [\Phi_{1(1)} \Phi_{2(1)} \dots \Phi_{1(n)} \Phi_{2(n)} \dots \Phi_{1(2N-1)} \Phi_{2(2N-1)}]^T,$$

где $\begin{cases} \Phi_{i(n)} = 4q_{i(n)} h_{(n+1)/2} - \text{для нечётного } n, \\ \Phi_{i(n)} = q_{i(n)}^{\Lambda} h_{(n/2)} + q_{i(n)}^{\Pi} h_{(n/2+1)} - \text{для чётного } n \end{cases} \quad (17)$

Для решения системы нелинейных уравнений (16) может быть использован метод итераций, детально рассмотренный в работе [10]. В этом случае

$$\{u_i\} = [K_{i-1}]^{-1} \{f\}. \quad (18)$$

Здесь: i - номер итерации. В качестве первого приближения берется решение линейной задачи. Повторяя это процесс можно получить решение с любой степенью точности. Затем по формулам (4) определяются физические и геометрические характеристики для нового очертания нити.

Величина приращения нагрузки на каждом этапе нагружения определяется в зависимости от требуемой точности расчёта.

Выводы

В статье разработан алгоритм расчёта упругих непологих нитей на действие вертикальных и горизонтальных сосредоточенных сил, и распределённой нагрузки в нелинейной постановке. Следует отметить, что использование МПА, идеи которого представлены в работе [11], привело бы к более точным результатам при одинаковом числе элементов, но значительно усложнило расчетные формулы.

Примером такой системы, использующей указанный конструктивный элемент, может служить кабель канатной дороги. Следует отметить, что учёт распределённой горизонтальной нагрузки для таких систем имеет большое значение. Использование нелинейной матрицы жесткости в вариационном методе даёт возможность не только уточнить решение на каждом шаге нагружения, но и увеличить приращение нагрузки, то есть уменьшить число этапов нагружения.

Представленную работу, по нашему мнению, можно рассматривать как определенное развитие вариационной версии метода конечного элемента применительно к расчету гибких непологих нитей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захарова Л.В., Уварова Н.Б. К расчету гибкой непологой нерастяжимой нити с помощью обобщенного метода конечных разностей // Научное обозрение 2016. №12. С. 72-75.
2. Скворцов А.В. Расчёт непологой гибкой линейно деформируемой нити на сосредоточенные воздействия: Тр. научно-практ. конф. «Неделя науки - 99». - М.: МИИТ, 1999 - с. II - 22 - II - 23.
3. Leonard J.W. and W.W. Recker (1972). Nonlinear dynamics of cables with low initial tension // Journal of Engineering Mechanics Division, American Society of Civil Engineers, Vol. 98, No. EM2, pp. 293-309.
4. Захарова Л.В., Александровский М.В. Об алгоритме расчета упругой непологой нити с использованием вариационного метода // Научное обозрение 2017. №6. С. 33-39.
5. Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике. Мир. М. 1975. - 541 с.
6. Захарова Л.В. Исследование нелинейных колебаний нити с учётом изгибной жёсткости. Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук. - М., 1977. - С. 191.
7. Качурин В.К. Статический расчёт винтовых систем. - Л.: Стройиздат, 1969. - 142 с.
8. Киреенко В.И. Всякие трубопроводные переходы / В.И. Киреенко, В.Н. Шимановский, Д.А. Коршунов, Ю.В. Смирнов. - К.: Будівельник, 1968, - 158 с.
9. Габбасов Р.Ф. Численное построение разрывных решений задач строительной механики / Р.Ф. Габбасов, А.Р. Габбасов, В.В. Филатов. - М.: Изд-во АСВ, 2008. 230 с.
10. Захарова Л.В., Уварова Н.Б. Расчет жестких нитей численным методом последовательных аппроксимаций на действие произвольных разрывных нагрузок. - Известия вузов. Строительство и архитектура, №1. 1994. с. 21-23.
11. Габбасов Р.Ф. К расчету стержней и стержневых систем методом последовательных аппроксимаций. Изв. ВУЗов. Стр-во и архитектура, № 4, 1980, с. 30-35.

Aleksandrovskiy Maksim Vyacheslavovich

Moscow state university of civil engineering (National research university), Russia, Moscow
E-mail: AleksandrovskiyMV@mgsu.ru

Zaharova Lydia Vasilevna

Moscow state university of civil engineering (National research university), Russia, Moscow
E-mail: ZaharovaLV@mgsu.ru

Features of the algorithm of the variational method for the nonlinear formulation of the problem of calculating an elastic non-flat filament

Abstract. At the present time, urgent are questions connected with calculation of systems at that have elastic threads as structural elements. The solution of the problem is based on the variational version of the finite element method. Besides, the calculation involves the use of the method of consecutive loadings. The article deals with the algorithm for calculating a flexible non-flat extensible thread on the action of horizontal and vertical distributed and concentrated forces. At the first stage, the equilibrium of the filament under the influence of its own weight is considered. The peculiarity of the algorithm is that the second stage involves calculating the deformed filament on the action of the additional load, which is divided into parts and is put step by step. At each stage of loading, the expressions for longitudinal deformation and curvature preserve nonlinear components up to the second order of smallness inclusive, which leads to a nonlinear system of resolving equations. For her decision the method of iterations can be used. Feature of the given algorithm is use of a nonlinear matrix of rigidity that gives the chance not only to do the decision more precisely, but also to reduce the number of loading stages due to an increase in the increment of the load.

Keywords: calculation algorithm; elastic non-flat filament; variational method; successive loading method; iteration method; non-linear system of resolving equations; non-linear stiffness matrix