Интернет-журнал «Науковедение» ISSN 2223-5167 http://naukovedenie.ru/

Том 8, №3 (2016) http://naukovedenie.ru/index.php?p=vol8-3

URL статьи: http://naukovedenie.ru/PDF/85TVN316.pdf

Статья опубликована 23.06.2016.

Ссылка для цитирования этой статьи:
Иванова А.Д. Разработка моделей задач математического программирования на основе многослойного графа // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 8, №3 (2016) http://naukovedenie.ru/PDF/85TVN316.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 519.87

Иванова Анастасия Дмитриевна
ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
Россия, Самара[1]
Аспирант
E-mail: hudoj-nik@mail.ru
РИНЦ: http://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=865118

Разработка моделей задач математического программирования на основе многослойного графа

Аннотация. В данной работе рассматривается применение моделирования многослойного графа в задачах математического программирования. Как показывает практика, многие процессы могут быть естественным образом представлены многослойным графом, в котором слои разделяют один и тот же набор вершин (объектов) с различными дугами (отношениями). Опираясь на применение многослойного графа, мы разработали две модели. Первая из них относится к нестандартным многоиндексным задачам транспортного типа и представляет собой задачу организации перевозок несколькими типами транспорта с возможностью их смены в процессе транспортировки продукта. Вторая модель лежит в области математического моделирования транспортных потоков в рамках подхода аналогового моделирования с применением теории игр и теории гидравлических сетей. В статье продемонстрировано построение указанных моделей, начиная со смысловой постановки задачи. Результатом применения в процессе моделирования многослойного графа стало упрощение самих моделей, уменьшение размерности и избавление от дополнительных переменных, что позволило использовать быстрые алгоритмы оптимизации на сетях. Предложенные модели не только иллюстрируют эффективность применения многослойного графа в задачах математического программирования, но и имеют самостоятельную ценность.

Ключевые слова: многослойный граф; оптимизационные задачи на сетях; задачи транспортного типа; теория игр; моделирование дорожных сетей; равновесие по Нэшу; теория гидравлических сетей; транспортные потоки; урбанизированные территории

Введение

Зачастую многие объекты моделирования по своей природе представляются многослойными [1]: одни и те же компоненты их систем могут быть связаны многими отношениями, независимыми между собой. К таким объектам относятся транспортные потоки

[1] 443086, Приволжский федеральный округ, Самарская область, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

в городских сетях [2], сети передачи данных [3], организация маршрутов перевозки продукции, ресурсные сети, системы организации производственных и образовательных процессов [4]. С развитием вычислительной техники задачи оптимизационного моделирования для таких процессов становятся все более актуальными. Возрастающая сложность систем и необходимость отслеживания результатов в реальном времени требуют быстрых, эффективных и легко реализуемых алгоритмов решения. В работе предлагается использовать для поставленных целей концепцию многослойного графа.

Под слоем графа будем понимать часть специальным образом сконструированного графа, выделенную в отдельную подзадачу. Слой может включать часть или все вершины с одним типом отношений.

Предлагается проиллюстрировать концепцию и метод построения многослойного графа на двух разработанных нами моделях. Как будет показано далее, данный подход оказывается актуальным для большинства частично целочисленных многоиндексных задач транспортного типа, в связи с возможностью отказаться от громоздких моделей и разработки узкофункциональных алгоритмов их решения в пользу более простой схемы видоизменения исходного графа транспортной сети. Также стоит отметить, что, не смотря на увеличение количества вершин, количество переменных задачи уменьшается за счет избавления от избыточных переменных и индексов слоя. Применительно к разработанной нами модели организации перевозок несколькими видами транспорта с возможностью их смены в процессе транспортировки избыточными можно считать переменные, отражающие объем продукции, который необходимо перегрузить с одного вида транспорта на другой в промежуточном пункте сети; с учетом того, что данный пункт не является складом (стоком), такая переменная семантически избыточна, что становится очевидно при изменении модели на многослойный граф.

Задача моделирования транспортных потоков изначально строится на многослойном графе, так как в противном случае было бы невозможно рассматривать агентов дорожного движения как единый ток на транспортной сети. Здесь слой выбирается по входящей для агентов вершине (конечному пункту прибытия).

Построение и использование многослойного графа для решения задачи о планировании перевозок несколькими видами транспорта

Дадим смысловую постановку задачи: пусть имеется n продавцов однородного товара, m потребителей этого товара и K видов транспорта, с помощью которого товар доставляется от продавцов к потребителям. Запас i-ого продавца равен a_i. Спрос j-ого потребителя составляет b_j. Продавцы и потребители связаны транспортной сетью с промежуточными узлами l, в которых может происходить выбор и смена вида транспорта, используемого для перевозки, причем в каждом конкретном узле могут быть доступны не все виды транспорта.

Для каждой дуги (h,q) и каждого вида транспорта заданы тарифы c_{hqk} на перевозку товара по этой дуге транспортом k. Смена транспорта также связана с дополнительными затратами: для каждого узла l и каждой пары (k,p) видов транспорта тарифы составят d_{lkp}. Требуется таким образом организовать перевозки, чтобы минимизировать суммарные затраты, обеспечить спрос потребителей и баланс запасов и вывоза для продавцов.

Задача отличается от известной в литературе трехиндексной транспортной задачи [5] возможностью смены вида транспорта в процессе перевозки и учетом связанных с этим затрат.

Модель задачи может быть описана как задача частично целочисленного программирования в виде (1)-(5):

$$\sum_{j\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c_{ijk}x_{ijk} + \sum_{i\in I}\sum_{k\in K}\sum_{p\in K} d_{ikp}y_{ikp} \to \min, \quad (1)$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{jik} - \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{ijk} = \begin{cases} -a_i, & если \quad i \in I_0, \\ 0, & если \quad i \notin I_0, J_0, \\ b_i, & если \quad i \in J_0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{p\in K} y_{ikp} = \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{jik}, \quad i \notin I_0, \quad (3)$$

$$y_{ikp} \ge 0, \quad (4)$$

$$x_{ikj} \ge 0. \quad (5)$$

где:

c_{ijk} – тариф на перевозку из i в j транспортом k;

x_{ijk} – объем перевозки из i в j транспортом k;

d_{ikp} – тариф на перегрузку в узле i с транспорта p на k;

y_{ikp} – объем перегрузки в узле i с транспорта p на k;

$I_0=\{a_i\}$ – продавцы;

$J_0=\{b_j\}$ – покупатели;

$K=\{k_l\}$ – вид транспорта;

I, J – множества всех узлов транспортной сети.

Минимизируемая целевая функция (1), выражающая общие затраты, состоит из двух частей: первая сумма – это затраты на перевозку продукции, а вторая – затраты на осуществление перегрузки продукции с одного вида транспорта на другой. Такую перегрузку можно рассматривать как фиктивную перевозку из i в i. Если в пункте i вид транспорта не меняется, то будем считать, что производится перегрузка с затратами d_{ikp}=0. Ограничение (2) описывает условия соответствия количества вывезенной продукции каждого продавца его запасам, полного насыщения спроса потребителей и равенства количества ввозимой и вывозимой продукции в промежуточных пунктах транспортной сети. Условие (3) требует равенства объема всех перегрузок в узле i суммарному завозу в узел. Формулы (4) и (5) накладывают стандартные ограничения неотрицательности переменных, имеющих физический смысл [6].

Однако в таком виде задача оказывается чрезвычайно сложной для решения. Поэтому предлагается специальном образом организовать граф для сведения ее к задаче о потоке минимальной стоимости [7].

Составим отдельные графы транспортной сети для каждого из K видов транспорта. Для наглядности на рисунке 1 показаны графы для некоторых типов транспорта k и $p\neq k$. В общем случае получим K таких графов, по количеству видов транспорта. Следует оговорить, что вершины l_k и l_p, также как и вершины a_{ik} и a_{ip}, b_{jk} и b_{jp}, географически являются одними и теми же пунктами, а разные графы отражают только различные типы транспорта k и p.

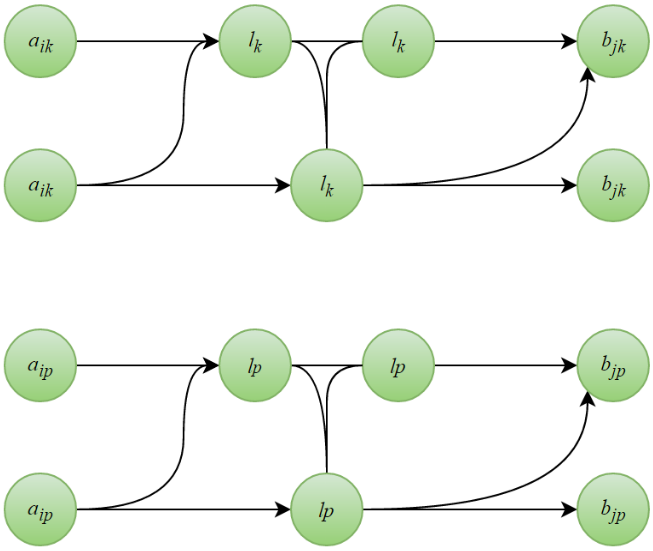

Рисунок 1. *Графы для двух видов транспорта k и p: a_i – продавцы, b_j – склады, l – промежуточные вершины (разработан автором)*

Построим такие графы для каждого из K видов транспорта только с промежуточными вершинами l, исключив из них узлы a_{ik}, a_{ip}, b_{jk} и b_{jp}, т.е. продавцов и потребителей. Смена транспорта k на какой-либо другой вид транспорта $p \neq k$ сопряжена с затратами d_{lkp} для каждой из вершин l, где такая смена типа транспорта возможна. Затраты на смену транспорта d_{lkp} представим как дополнительные дуги, соединяющие вершины l_k и l_p для всех k и $p \neq k$. Графически это проиллюстрировано на рисунке 2.

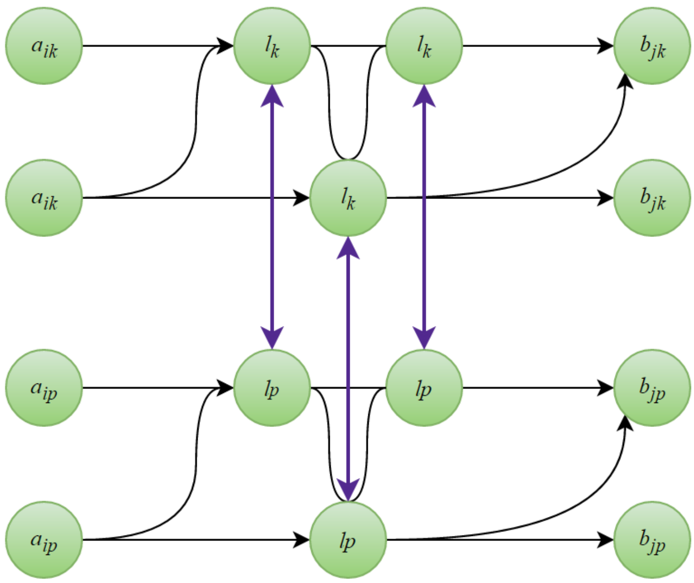

Рисунок 2. *Объединение слоев в многослойный граф на примере двух типов транспорта k и p (разработан автором)*

Таким образом, если общее количество промежуточных вершин транспортной сети в исходной задаче составляет $L'=L\text{-}m\text{-}n$, то получим граф с KL' вершинами, где K – количество различных видов транспорта. Далее присоединим к получившемуся графу n вершин, соответствующих продавцам a_i, и m вершин, соответствующих покупателям b_j, как показано на рисунке 3. Тогда получаем граф, состоящий из $(KL'+m+n)=\overline{L}$ вершин.

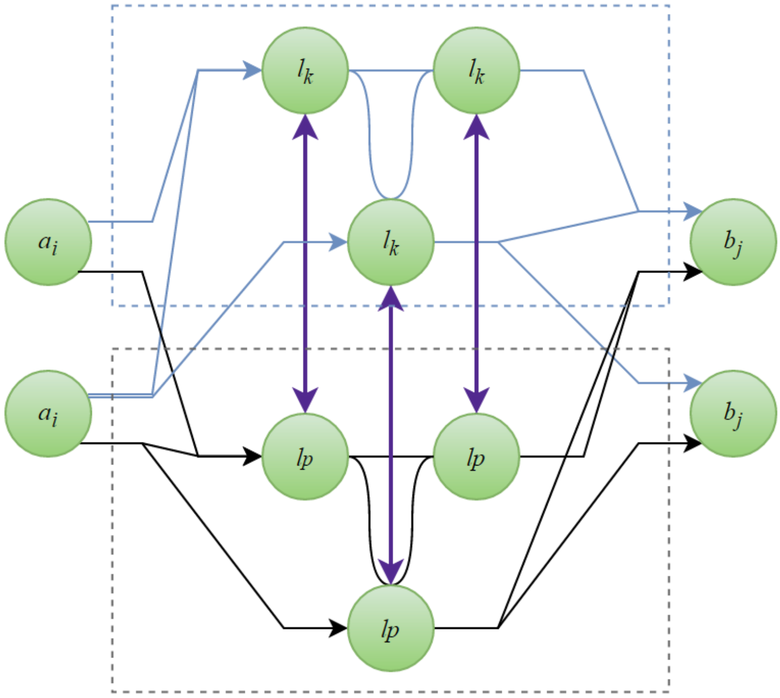

Рисунок 3. *Построение многослойного графа для двух видов транспорта k и p (разработан автором)*

При этом следует отметить, что на пропускные способности дуг, которые ведут от продавцов к промежуточным вершинам, нужно наложить ограничения вида (6), которые означают, что нельзя вывести больше товара, чем есть у продавца:

$$\sum_{l=1}^{\overline{L}} x_{a_i l} \le a_i, \quad \forall i \in I \quad . \qquad (6)$$

Очевидно, что это условие эквивалентно условию 1 для классической транспортной задачи. Аналогичные ограничения накладываются на те дуги, которые соединяют промежуточные пункты с потребителями [8].

Т.к. задача строится на графе, необходимо ввести условие баланса: для промежуточных вершин сумма всех входящих в них потоков должна быть равна сумме выходящих из них потоков. Формально это можно записать как (7):

$$\sum_{h\in L} x_{gh} - \sum_{q\in L} x_{qg} = 0, \quad g \ne a_i, b_j \quad . \qquad (7)$$

Но для продавцов и потребителей сохраняется условия полного насыщения спроса и вывоза всего объема товаров. Таким образом, получаем (8) с обязательным ограничением в виде (9):

$$\sum_{j\in J} x_{kj} - \sum_{i\in J} x_{ik} = \begin{cases} a_i, & p(k) = a_i \\ 0, & p(k) \ne a_i, b_j, \quad k = \overline{1,l} \\ b_j, & p(k) = b_j, \end{cases} \quad , \qquad (8)$$

$$x_{ij} \geq 0. \tag{9}$$

Необходимо окончательно свести задачу к задаче о потоке минимальной стоимости в форме многослойного графа. Всем дугам в соответствие должны быть поставлены транспортные тарифы c_{hqk}, для вершин $h,q \in \overline{L}$, $k \in K$, и d_{lkp}, для всех $k,p \in K$, $l \in \overline{L}$.

Ко всем продавцам искусственно присоединятся источник S, причем цены на транспортировку из источника к продавцам будут нулевыми, как указано в формуле (10):

$$c_{si} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Аналогично вводится сток T, который соединён со всеми покупателями, транспортные тарифы здесь опять же равны нулю по формуле (11):

$$c_{jt} = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{11}$$

Необходимо найти поток из источника S в сток T, имеющий заданную величину v и обладающий минимальной стоимостью. Тогда ограничения на пропускные способности будут иметь только дуги, которые идут от источника к продавцам и от покупателей к стоку, т.е. пропускные способности дуг из источника s к i-ому продавцу равны его запасу a_i, а пропускная способность дуги от j-ого потребителя к стоку t равна его спросу b_j, как указано в формулах (12) и (13):

$$e_{si} = a_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{12}$$

$$e_{jt} = b_j, \quad j = \overline{1,m}. \tag{13}$$

Для всех остальных дуг, соединяющих промежуточные вершины между собой и с продавцами и потребителями, пропускные способности будут бесконечны, как в формуле (14):

$$e_{qh} = \infty, \quad q \neq s, \ h \neq t. \tag{14}$$

Формально задача ставится следующим образом (15)-(17):

$$\sum_h \sum_q c_{hq} x_{hq} \to min, \tag{15}$$

$$\sum_h x_{hl} - \sum_q x_{lq} = \begin{cases} -v, & l = s \\ 0, & l \neq s,t, \quad l = \overline{1,L} \\ v, & l = t \end{cases}, \tag{16}$$

$$0 \leq x_{hq} \leq e_{hq}. \tag{17}$$

Условие (18) можно расписать в виде:

$$x_{kl} \geq 0,$$
$$x_{kl} \leq \begin{cases} a_i, & k = S, l = i, \\ b_j, & k = j, l = T, \\ \infty, & k = i, l = j. \end{cases} \tag{18}$$

При этом подразумевается, что величина v не превышает величины максимального потока, иначе задача не имеет решения [9]. Будем полагать величину потока равной: см. формула (19):

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \quad (19)$$

На графе задача имеет вид, как на рисунке 4.

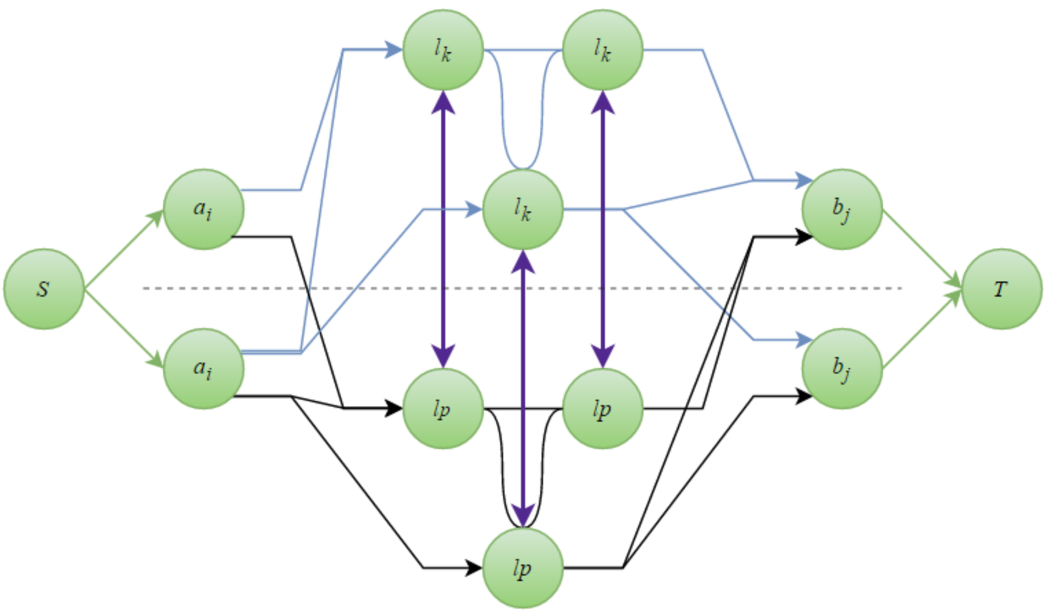

Рисунок 4. *Задача о потоке минимальной стоимости в виде многослойного графа (разработан автором)*

С учетом (18) и (19) задачу можно представить в виде:

$$\sum_h \sum_q c_{hq} x_{hq} \to min, \quad (20)$$

$$\sum_h x_{hl} - \sum_q x_{lq} = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} a_i = -\sum_{j=1}^{m} b_j, & l = s, \\ 0, \quad l \neq s,t, & \\ \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j, & l = t, \end{cases} \quad l = \overline{1,L}, \quad (22)$$

$$0 \le x_{kl} \le \begin{cases} a_i, & k = S, l = i, \\ b_j, & k = j, l = T, \\ \infty, & k = i, l = j. \end{cases} \quad (23)$$

Задачу (20)-(23) предлагается решать алгоритмами поиска потока заданной величины минимальной стоимости. Наилучший по скорости сходимости результат для такого рода задач получен для алгоритма Басакера-Гоуэна [9], но, в случае появления циклов отрицательной стоимости, может быть использован алгоритм Клейна. Полученный результат решения задачи (20)-(23) необходимо интерпретировать в терминах задачи (1)-(5). Для этого исключаются искусственно введенные вершины источника и стока, дополнительный граф вновь распадается на слои, а пересадка учитывается в отдельной таблице.

Построение и использование многослойного графа для моделирования городских транспортных потоков

Опишем движение транспорта в городе [10] как ориентированный граф с множеством точек выезда (источников) и въезда (стоков), соединенный ориентированными дугами с ограниченной пропускной способностью. Поток по сети представим как множество токов, управляемых агентами (транспортными единицами условно одинаковой длины L), т.е. игроками, каждому из которых в соответствие поставлена стратегия. Выгодой игрока будем считать минимизацию времени движения из источника в сток. Для определения скорости движения по участку графа будем использовать фундаментальную диаграмму [11] для потока x: $x = s\ w\ \rho_{Max}\left(1 - w/w_{Max}\right)$, задав линейную зависимость между плотностью (ρ) и скоростью w как $w/w_{max} + \rho/\rho_{maa} = 1$ и обозначив количество полос на участке дороги как s. В результате мы получаем игру в нормальной форме:

$$G = \left\langle \begin{array}{l} I;\quad \chi_\gamma, \gamma \in I;\quad \varphi_\gamma(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_\gamma, \ldots, \xi_{|I|}) \underset{\xi_\gamma \in \chi_\gamma}{\Rightarrow} \\ min, (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_\gamma, \ldots, \xi_{|I|}) \in \chi = \prod\limits_{k \in I} \chi_k, \gamma \in I \end{array} \right\rangle$$

Под равновесием в этой игре будем понимать равновесие по Нешу [12]

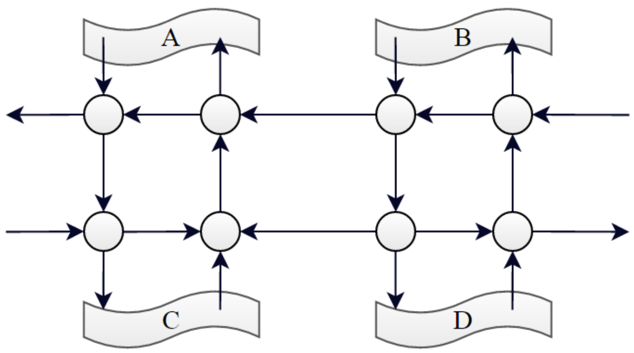

Рисунок 5. *Въезд-выезд из квартала (разработан автором)*

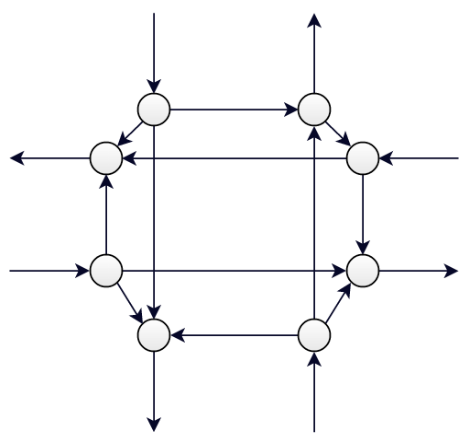

Рисунок 6. *Пример перекрестка (разработан автором)*

Введем понятия слоя и балансового соотношения слоя в задаче. Пусть имеется орграф $G=\langle E,V,H\rangle$, где элементы множества E представляют собой конечное множество вершин графа, элементы V – конечное множество дуг графа G. H – отображение $H{:}V\rightarrow E\times E$ такое, что для каждой дуги $v\in V$: $H(v)=(h1(v), h2(v))$, где $h1(v)$ – начало дуги v, $h2(v)$ – конец. Обозначим $V^{+}(i)=\{v\in V\,|\,h2(v)=i\}$ - множество дуг, входящих в вершину i, $V^{-}(i)=\{v\in V\,|\,h1(v)=i\}$ - множество дуг, выходящих из вершины i.

Для каждой пары (i, j) вершин заданы числа Q_{ij}, задающие величину потока из вершины - источника i в вершину - сток j. Эти потоки разлагаются на отдельные токи и распределяются по сети, в результате для каждой дуги $v\in V$ получаем q_{ij}^{v} - поток по дуге v, перемещаемой из источника i в сток j.

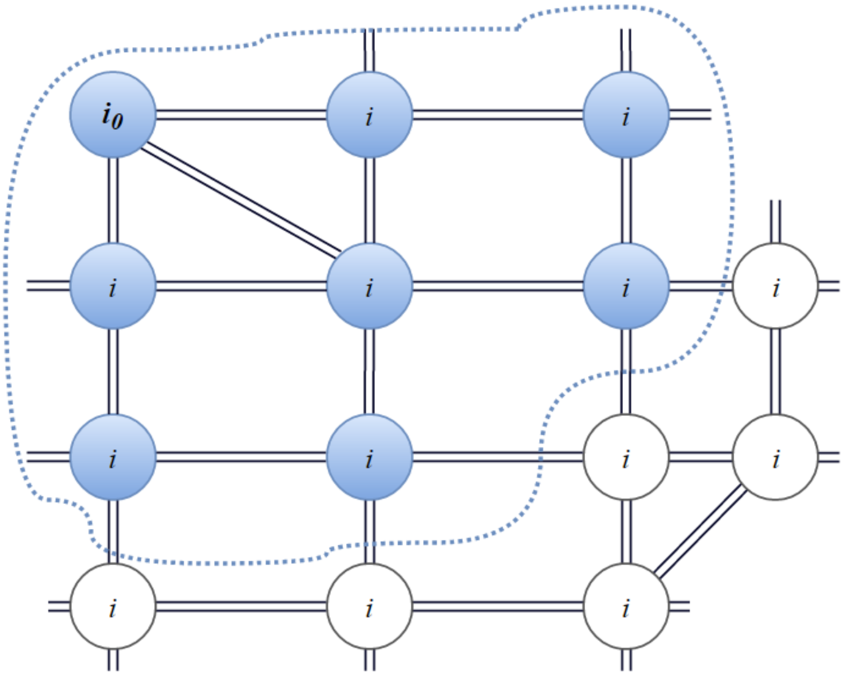

Рисунок 7. *Пример i₀-слоя для дорожной сети (разработан автором)*

Возьмем вершину i_0, которая является источником потока в другие вершины. Потоки, входящие в вершины $i\in E$ обозначим $q_i(i_0)$, для вершины $i_0\in E$ будет $q_{i_0}(i_0)$. Совокупность $S(i_0)=\langle G;i_0;q_i(i_0),i\in E;x_v(i_0),v\in V\rangle$ будем называть слоем i_0. Для каждой вершины справедливо утверждение (24):

$$\sum_{v\in V^{+}(i)}x_v(i_0)-\sum_{v\in V^{-}(i)}x_v(i_0)=q_i(i_0),\qquad i\in E \tag{24}$$

Для вершины i_0 будет справедливо также (25):

$$q_{i_0}(i_0)=-\sum_{i\in E\setminus\{i_0\}}q_i(i_0) \tag{25}$$

Соотношение (23) является Первым правилом Кирхгофа сети [13].

Обозначим через $X_v=\sum_{i_0\in E}x_v(i_0)$ суммарный поток, идущий по дуге v. Из (23) следует:

$$\sum_{v\in V^+(i)} X_v - \sum_{v\in V^-(i)} X_v = \sum_{i_0\in E} q_i(i_0), \qquad i\in E \tag{26}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что каждая вершина образует слой, если для некоторой вершины i_0 его нет, то это означает, что $q_i(i_0)=0, i\in E$. В городской транспортной сети утверждения (24), (25) выполняются для всех $i_0 \in E$. Из выполнимости (26) не следует справедливость (24).

Для поиска начального допустимого потока предлагается использовать алгоритм Форда-Фолкерсона поиска максимального потока минимальной стоимости. Найденный поток необходимо привести к оптимальному путем инвариантах преобразований [14].

Построим характеристическую функцию для цикла C с произвольным направлением обхода

$$sign_u(v) = \begin{cases} 0, \text{ если } v \notin C \\ +1, v\in C, \text{ направление дуги совпадает с направлением обхода цикла,} \\ -1, v\in C, \text{ направление дуги проитвоположно направлению обхода цикла.} \end{cases}$$

По второму правилу Кирхгофа [13] из теории гидравлических сетей в состоянии равновесия сумма изменения времени движения потока по циклу равна нулю, т.е. $\sum_{v\in V} sign_C^u(v)\left(\tau_v\left(x_v\right)\right)=0$, что, используя инвариантное преобразование потоков, можно записать как $NB_u(\theta)=\sum_{v\in V} sign_C^u(v)\left(\tau_v\left(x_v+sign_C^u(v)\theta\right)\right)$. Тогда задача увязки цикла заключается в определении θ, такого что $NB_u(\theta)=0$.

Заключение

В статье представлена концепция многослойного графа для математического моделирования процессов различной природы. Мы проиллюстрировали возможность использования многослойного графа, разработав на его основе две модели задач математического программирования: транспортного типа и задачи моделирования транспортных потоков.

В первой модели мы использовали слои для избавления от кратностных ребер при одновременном сохранении ограничений транспортной задачи. Во второй модели слои использовались для многошаговой оптимизации транспортных потоков.

Полученные результаты могут применяться для исследования сложно организованных процессов, а также на производстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boden B. et al. Mining coherent subgraphs in multi-layer graphs with edge labels //Proceedings of the 18th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. ACM. 2012. С. 1258-1266.

2. Hassan F.H., Swift S., Tucker A. Using Heuristic Search with Pedestrian Simulation Statistics to Find Feasible Spatial Layout Design Elements // Journal of Algorithms. 2014. Т. 2. №4. С. 86-104.

3. Агеев Д.В. Проектирование современных телекоммуникационных систем с использованием многоуровневых графов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2010. Т. 4. №2 (46). С. 75-77.

4. Черкасов Р.В. О принципах организации образовательного сетевого сообщества // Вестник Самарского государственного технического университета. 2010. №6 (14). С. 177-183.

5. Костенко Д.А. Реализация модели трехиндексной транспортной задачи в программной среде MathCad // European science. 2016. №2 (12). С. 56-59.

6. Монтлевич В.М., Бородинова И.А. О некоторых постановках многопродуктовых транспортных задач // Вестник Самарского государственного университета. Самара: Изд.-во Самарского университета. 2008. №7 (66). С. 86-93.

7. Иванова А.Д. Решение задачи планирования перевозок несколькими видами транспорта сведением к задаче о потоке минимальной стоимости // Математическое моделирование в экономике, страховании и управлении рисками: сборник материалов IV Международной молодежной науч.-практ. конф.: в 2 т. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та 2015. С. 103-109.

8. Герасименко Е.М. Нахождение потоков в транспортных сетях в условиях нечеткости и частичной неопределенности: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.13.17: защищена 5.12.2014; Южный федеральный университет. Таганрог, 2014. С. 20.

9. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М.: Наука, 1974. С. 368.

10. Muthuswamy P.K. et al. Inter-domain traffic engineering as bi-level network flow optimization // Information Sciences and Systems (CISS), 2012 46th Annual Conference on. IEEE, 2012. С. 1-6.

11. Benaïm M., Hofbauer J., Sorin S. Perturbations of set-valued dynamical systems, with applications to game theory // Dynamic Games and Applications. 2012. Т. 2. №2. С. 195-205.

12. Dong X. et al. Clustering with multi-layer graphs: A spectral perspective // Signal Processing, IEEE Transactions on. 2012. Т. 60. №11. С. 5820-5831.

13. Коваленко А.Г. Теоретико-игровой подход и теория гидравлических сетей в проблеме моделирования движения городских транспортных потоков // Вестник Самарского государственного университета. 2013. №1 (102). С. 177-185.

14. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. М.: мир, 1981. 323 С.

15. Смирнов А.В. Задача о наибольшем кратном потоке в делимой сети и ее частные случаи // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22. №4. С. 533-545.

Ivanova Anastasiia Dmitrievna
Samara national research university, Russia, Samara
E-mail: hudoj-nik@mail.ru

Development models of mathematical programming problems on the basis of multi-layer graph

Abstract. This paper deals with the application of multi-layer graph modeling to mathematical programming problems. Experience shows, many processes can be naturally represented by a multi-layer graph consisting of several layers separating the same set of nodes (objects) with various arcs (relationships). Based on this concept of a multi-layer graph, we have developed two models. The first model refers to a non-standard multi-index problem of transport type and represents the task of organizing transport multiple types of transport with the possibility to change the type during transportation of product. The second model belongs to the field of mathematical modeling of traffic flows within the framework of analog simulation approaches by using game theory and the theory of hydraulic networks. The article demonstrates the construction of these models, beginning with the formulation of the problem of meaning. The results of applying a multi-layer graph for modeling are the simplification of the models themselves, reducing the dimensions and disposal of additional variables, it has allowed us to use fast optimization algorithms on networks. The proposed models not only illustrate the effectiveness of the multi-layer graph in mathematical programming problems, but they also have an intrinsic value.

Keywords: multilayer graph; optimization problems on networks; transport-type problems; game theory; modeling of road networks; Nash equilibrium; theory of hydraulic networks; traffic flows; urban areas

REFERENCES

1. Boden B. et al. Mining coherent subgraphs in multi-layer graphs with edge labels //P roceedings of the 18th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. ACM. 2012. S. 1258-1266.
2. Hassan F.H., Swift S., Tucker A. Using Heuristic Search with Pedestrian Simulation Statistics to Find Feasible Spatial Layout Design Elements // Journal of Algorithms. 2014. T. 2. №4. S. 86-104.
3. Ageev D.V. Proektirovanie sovremennykh telekommunikatsionnykh sistem s ispol'zovaniem mnogourovnevykh grafov // Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy. 2010. T. 4. №2 (46). S. 75-77.
4. Cherkasov R.V. O printsipakh organizatsii obrazovatel'nogo setevogo soobshchestva // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2010. №6 (14). S. 177-183.
5. Kostenko D.A. Realizatsiya modeli trekhindeksnoy transportnoy zadachi v programmnoy srede MathCad // European science. 2016. №2 (12). S. 56-59.
6. Montlevich V.M., Borodinova I.A. O nekotorykh postanovkakh mnogoproduktovykh transportnykh zadach // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Samara: Izd.-vo Samarskogo universiteta. 2008. №7 (66). S. 86-93.

7. Ivanova A.D. Reshenie zadachi planirovaniya perevozok neskol'kimi vidami transporta svedeniem k zadache o potoke minimal'noy stoimosti // Matematicheskoe modelirovanie v ekonomike, strakhovanii i upravlenii riskami: sbornik materialov IV Mezhdunarodnoy molodezhnoy nauch.-prakt. konf.: v 2 t. Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta 2015. S. 103-109.

8. Gerasimenko E.M. Nakhozhdenie potokov v transportnykh setyakh v usloviyakh nechetkosti i chastichnoy neopredelennosti: avtoref. dis. ... kand. tekhn. nauk: 05.13.17: zashchishchena 5.12.2014; Yuzhnyy federal'nyy universitet. Taganrog, 2014. S. 20.

9. Basaker R., Saati T. Konechnye grafy i seti. M.: Nauka, 1974. S. 368.

10. Muthuswamy P.K. et al. Inter-domain traffic engineering as bi-level network flow optimization // Information Sciences and Systems (CISS), 2012 46th Annual Conference on. IEEE, 2012. S. 1-6.

11. Benaïm M., Hofbauer J., Sorin S. Perturbations of set-valued dynamical systems, with applications to game theory // Dynamic Games and Applications. 2012. T. 2. №2. S. 195-205.

12. Dong X. et al. Clustering with multi-layer graphs: A spectral perspective // Signal Processing, IEEE Transactions on. 2012. T. 60. №11. S. 5820-5831.

13. Kovalenko A.G. Teoretiko-igrovoy podkhod i teoriya gidravlicheskikh setey v probleme modelirovaniya dvizheniya gorodskikh transportnykh potokov // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. 2013. №1 (102). S. 177-185.

14. Maynika E. Algoritmy optimizatsii na setyakh i grafakh. M.: mir, 1981. 323 C.

15. Smirnov A.V. Zadacha o naibol'shem kratnom potoke v delimoy seti i ee chastnye sluchai // Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem. 2015. T. 22. №4. S. 533-545.