

Интернет-журнал «Наукоедение» ISSN 2223-5167 <http://naukovedenie.ru/>

Том 9, №4 (2017) <http://naukovedenie.ru/vol9-4.php>

URL статьи: <http://naukovedenie.ru/PDF/02TVN417.pdf>

Статья опубликована 10.07.2017

**Ссылка для цитирования этой статьи:**

Петрова Л.С. Математическое моделирование процессов нагрева многослойных тел при обработке потоками энергии высокой интенсивности на основе системы нелинейных гиперболических уравнений теплопроводности // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 9, №4 (2017) <http://naukovedenie.ru/PDF/02TVN417.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

**УДК 519.633:536.21**

**Петрова Лилия Сергеевна**

ФГБОУ ВО «Омский государственный университет путей сообщения», Россия, Омск<sup>1</sup>

Доцент кафедры «Высшая математика»

Кандидат педагогических наук

E-mail: [petrov.306@mail.ru](mailto:petrov.306@mail.ru)

РИНЦ: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=687889](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=687889)

**Математическое моделирование процессов нагрева многослойных тел при обработке потоками энергии высокой интенсивности на основе системы нелинейных гиперболических уравнений теплопроводности**

**Аннотация.** Статья посвящена численным методам решения нелинейных задач теплопроводности при обработке концентрированными потоками энергии тел с покрытием. Представлена математическая модель на основе системы нелинейных гиперболических уравнений теплопроводности для расчета температурного поля тела с покрытием при нагреве с учетом релаксации теплового потока и температурной зависимости свойств материалов.

Рассмотрена реализация метода сеток с использованием трехслойной неявной разностной схемы при решении нелинейной гиперболической задачи теплопроводности для случая, когда поглощение энергии излучения моделируется поверхностным источником тепла.

Получено численное решение нелинейной задачи теплопроводности в двухслойном теле с учетом конечной скорости распространения тепла и граничных условий в случае идеального контакта на стыке слоев, основанное на методике конечных разностей с использованием метода прогонки и итерационного уточнения коэффициентов.

Описан алгоритм расчета температурного поля при нагреве тела с покрытием, учитывающий зависимость теплофизических и оптических характеристик материалов от температуры. Проведено сравнение результатов расчетов температурных полей при математическом моделировании на основе системы нелинейных гиперболических уравнений теплопроводности и соответствующей линейной модели с использованием среднеинтегральных значений теплофизических характеристик.

Полученная нелинейная математическая модель может использоваться при исследовании процессов нагрева многослойных тел при воздействии высокоинтенсивных потоков энергии на материалы.

---

<sup>1</sup> 644046, Омск, пр. Маркса, 35

**Ключевые слова:** математическая модель; температурное поле; численные методы; нелинейное гиперболическое уравнение теплопроводности; неявная разностная схема; метод прогонки; условия сопряжения

В современных условиях создания технологических процессов обработки тел потоками энергии высокой интенсивности актуализируется проблема оценки результатов теплового воздействия источника тепла на материал посредством описания распределения температурных полей. Наиболее распространенным методом обработки материалов высокоинтенсивными потоками энергии (лазерному, плазменному воздействию на материалы, комбинированным лазерно-плазменным технологиям) посвящены работы М.Б. Бабенкова [1], В.Б. Веселовского, А.И. Губина [3], Ю.А. Малой [8], Б.А. Кравченко, С.В. Каюкова, А.А. Гусева [4], Ю.С. Борисова, В.Ф. Демченко, А.Б. Лесного, В.Ю. Хаскина [2], А.М. Лыкова [6] и других.

Исследование высокоинтенсивных процессов нагрева тел, приводящее к необходимости учитывать релаксацию теплового потока и температурную зависимость свойств материала при получении соответствующих математических моделей для расчета температурного поля, определяет практическую значимость решения нелинейных задач для гиперболического уравнения теплопроводности.

В большей части исследований, в которых рассматриваются методы решения задач для нелинейного уравнения теплопроводности гиперболического типа, реализуются точные и приближенные аналитические методы. Среди российских и иностранных исследователей можно выделить работы И.В. Кудинова [5], А.Г. Шашкова, В.А. Бубнова, С.Ю. Яповского [11], Ю.А. Малой, А.И. Губина [7], С. Wafo Soh [14], М. Pakdemirli, A.Z. Şahin [13], J.A. Lopez Molina, М. Trujillo [12] посвященные рассмотрению методов решения нелинейной гиперболической задачи теплопроводности. В работе [11] используется операционный метод для решения гиперболического уравнения теплопроводности с учетом температурной зависимости коэффициента теплопроводности и с теплоисточником в правой части. В исследовании Ю.А. Малой, А.И. Губина [7] описано применение приближенного аналитического метода, сочетающего метод пространственно-временных квадрантов и операционный метод, для решения системы нелинейных гиперболических уравнений теплопроводности. В работах [13, 14] используется методика группового анализа дифференциальных уравнений на основе построения симметрий гиперболического уравнения теплопроводности.

Необходимо отметить, что применение приведенных методов приводит к резкому возрастанию трудоемкости выполнения преобразований с увеличением числа сред и недостаточно развито в отношении решения нелинейной гиперболической задачи теплопроводности для многослойных конструкций.

Использование численных методов решения задач для гиперболического уравнения теплопроводности представлено в работах В.Ф. Очкова, Л.А. Мержиевского, А.Н. Корчагиной, А.П. Солодова, Н.И. Никитенко и др. При этом описание применения данных методов ограничивается решением задач для линейного уравнения теплопроводности гиперболического типа. Исследований посвященных численным методам решения нелинейных задач теплопроводности в многослойном теле с учетом конечной скорости распространения тепла нами не обнаружено.

Реализация численных методов решения краевых задач для нелинейного уравнения теплопроводности параболического типа отражена в исследованиях направленных на использование явной разностной схемы (А.В. Геренштейн, М.З. Харисламов, Г.В. Кузнецов,

М.А. Шеремет и др.), а также неявных разностных схем с нелинейностью на нижнем и верхнем слоях (Р.В. Гришаев, Ф.Х. Мирзаде, М.Д. Хоменко, Н.Г. Карлыханов, А.В. Уракова, Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет, Т.А. Нагорнова и др.). В работах с использованием явно-неявной схемы (разностная схема с нелинейностью на нижнем слое) исследователями применяется метод «замороженных коэффициентов» с учетом условия, ограничивающего шаг по времени. Для реализации чисто неявной схемы (разностная схема с нелинейностью на верхнем слое) используется итерационное уточнение коэффициентов.

Рассмотрим задачу о нагреве тела с покрытием при обработке концентрированными потоками энергии, с учетом идеального контакта на стыке слоев. Из предположения, что диаметр области нагрева намного больше глубины проникновения тепла, задачу можно рассматривать в одномерном приближении по пространственной координате. Для случая, когда поглощение энергии излучения моделируется поверхностным источником тепла (учитывается значительная разница между глубиной проникновения теплоты и толщиной слоя, в котором поглощается энергия излучения), задается плотность потока энергии

$$q_0(\tau) = q_{\max} \sin \frac{\pi \tau}{\tau_d}$$

излучения как функция времени  $q_0(\tau)$ , где  $q_{\max}$  – максимальное значение плотности теплового потока,  $q_{\max} = 3,7 \cdot 10^{10}$  Вт/м<sup>2</sup>,  $\tau_d$  – длительность импульса,  $\tau_d = 50$  мкс.

Время релаксации тепловых потоков  $\tau_{r,1} = \tau_{r,2} = 5 \cdot 10^{-10}$  с. На внешних границах заданы граничные условия второго рода. Температура в начальный момент времени является постоянной и равной 300 К, а скорость изменения температуры в начальный момент времени принимается равной нулю. В качестве материалов покрытия и основы были взяты молибден и сталь 40Х соответственно. Толщина слоя покрытия  $L_1 = 0,025$  мм, основы –  $L_2 = 0,075$  мм.

Теплофизические и оптические характеристики молибдена задавались следующим образом:

$$\lambda_1(T) = 173,8 - 9,2 \cdot 10^{-2} \cdot T + 4,29 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 - 7,59 \cdot 10^{-9} \cdot T^3, \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), \quad (1)$$

$$c_1(T) = 216,7 + 0,103 \cdot T - 6,8 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 + 2,01 \cdot 10^{-8} \cdot T^3, \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \quad (2)$$

$$\rho_1(T) = 1,02 \cdot 10^4 - 3,8 \cdot 10^{-2} \cdot T, \text{ кг}/\text{м}^3; \quad A(T) = 0,99 \cdot 10^{-4} \cdot T. \quad (3)$$

Температурные зависимости свойств стали имеют вид:

$$\lambda_2(T) = 40,62 + 0,013 \cdot T - 4,847 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 + 2,405 \cdot 10^{-8} \cdot T^3, \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), \quad (4)$$

$$c_2(T) = 364,726 + 0,507 \cdot T - 1,048 \cdot 10^{-4} \cdot T^2, \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \quad (5)$$

$$\rho_2(T) = 7,918 \cdot 10^3 - 0,032 \cdot T, \text{ кг}/\text{м}^3. \quad (6)$$

В случае рассмотрения поверхностного поглощения, математическая модель для расчета температурного поля тела с покрытием при нагреве с учетом релаксации теплового потока и температурной зависимости свойств материалов включает в себя однородные нелинейные гиперболические уравнения теплопроводности [8, с. 143-144]:

$$\tau_{r,1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( c_1(T_1) \rho_1(T_1) \frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial \tau} \right) + c_1(T_1) \rho_1(T_1) \frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial x} \right), \quad 0 < x < x^*; \quad (7)$$

$$\tau_{r,2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( c_2(T_2) \rho_2(T_2) \frac{\partial T_2(x, \tau)}{\partial \tau} \right) + c_2(T_2) \rho_2(T_2) \frac{\partial T_2(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_2(T_2) \frac{\partial T_2(x, \tau)}{\partial x} \right), \quad (8)$$

$$x^* < x < L;$$

$$0 < \tau \leq \tau_m;$$

начальные условия:

$$T_v(x, 0) = T_0, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial T_v(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0; \quad (10)$$

$$x \in [0, L]; \quad v = \overline{1, 2};$$

условия на внешних границах:

$$-\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left( A(T_1) q_0(\tau) + \tau_{r,1} \frac{\partial}{\partial \tau} (A(T_1) q_0(\tau)) \right) \Big|_{x=0}, \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial T_2(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_m; \quad (12)$$

граничные условия на стыке слоев:

$$T_1(x^*, \tau) = T_2(x^*, \tau), \quad (13)$$

$$\lambda_1(T_1) \left. \frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=x^*} + \tau_{r,2} \frac{d}{d\tau} \left( \lambda_1(T_1) \left. \frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=x^*} \right) = \lambda_2(T_2) \left. \frac{\partial T_2(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=x^*} + \tau_{r,1} \frac{d}{d\tau} \left( \lambda_2(T_2) \left. \frac{\partial T_2(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=x^*} \right), \quad (14)$$

$$0 < \tau \leq \tau_m;$$

где:  $T_v(x, \tau)$  – температура тела в точке  $x$  в момент времени  $\tau$  для соответствующего слоя,  $\lambda_1(T), \lambda_2(T)$  – коэффициенты теплопроводности,  $c_1(T), c_2(T)$  – теплоемкости,  $\rho_1(T), \rho_2(T)$  – плотности веществ,  $\tau_{r,v}$  – время релаксации теплового потока для соответствующего слоя,  $A(T_1)$  – поглощательная способность материала,  $q_0(\tau)$  – плотность потока энергии излучения.

Для решения нелинейной задачи (7)-(14) методом сеток с применением конечно-разностных аппроксимаций (метод конечных разностей) используем прямоугольную пространственно-временную сетку  $G_{x\tau} = \{x_i = ih, i = \overline{1, N}; \tau_j = jk, j = \overline{0, M}\}$ . Число узлов по пространственной координате определяется из соотношения  $N = N_1 + N_2 + 1$ , где  $N_v$  – количество промежутков, на которые разбивается слой покрытия ( $v = 1$ ) или основы ( $v = 2$ ).

Для получения трехслойной неявной разностной схемы, подставляем формулы соответствующих разностных аналогов частных производных по времени и пространству [10, с. 455] в гиперболические уравнения теплопроводности. В этом случае разностные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} & \gamma_{v,i}^{j+1} \frac{T_{v,i}^{j+1} - T_{v,i}^j}{k} + \frac{\tau_{r,v}}{k} \left( \frac{\gamma_{v,i}^{j+1} + \gamma_{v,i}^j}{2} \cdot \frac{T_{v,i}^{j+1} - T_{v,i}^j}{k} - \frac{\gamma_{v,i}^{j-1} + \gamma_{v,i}^j}{2} \cdot \frac{T_{v,i}^j - T_{v,i}^{j-1}}{k} \right) = \\ & = \frac{1}{h} \left( \frac{\lambda_{v,i}^{j+1} + \lambda_{v,i+1}^{j+1}}{2} \cdot \frac{T_{v,i+1}^{j+1} - T_{v,i}^{j+1}}{h} - \frac{\lambda_{v,i-1}^{j+1} + \lambda_{v,i}^{j+1}}{2} \cdot \frac{T_{v,i}^{j+1} - T_{v,i-1}^{j+1}}{h} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где:  $\gamma_{v,i}^{j+1} = c_v(T_{v,i}^{j+1}) \rho_v(T_{v,i}^{j+1}) \cdot 10^{-3}$ ,  $\lambda_{v,i}^{j+1} = \lambda_v(T_{v,i}^{j+1}) \cdot 10^{-3}$ ,  $c_v(T_{v,i}^{j+1})$ ,  $\rho_v(T_{v,i}^{j+1})$ ,  $\lambda_v(T_{v,i}^{j+1})$

вычисляются по формулам (1)-(6),  $i = \overline{2, N-1}$ ,  $j = \overline{1, M-1}$ .

Для решения полученной системы нелинейных уравнений используем итерационное уточнение коэффициентов, применяя метод простой итерации. При этом на каждом шаге по времени расчет температурного поля происходит до тех пор, пока оно не перестает отличаться от предыдущего приближения. На каждой итерации уравнения системы являются линейными относительно  $T_{v,i}^{s+1}$  и принимают вид:

$$\begin{aligned} & 2kh^2 \gamma_{v,i}^s (T_{v,i}^{s+1} - T_{v,i}^j) + \tau_{r,v} h^2 \left[ (\gamma_{v,i}^s + \gamma_{v,i}^j) \cdot (T_{v,i}^{s+1} - T_{v,i}^j) - (\gamma_{v,i}^{j-1} + \gamma_{v,i}^j) \cdot (T_{v,i}^j - T_{v,i}^{j-1}) \right] = \\ & = k^2 \left[ (\lambda_{v,i}^s + \lambda_{v,i+1}^s) \cdot (T_{v,i+1}^{s+1} - T_{v,i}^{s+1}) - (\lambda_{v,i-1}^s + \lambda_{v,i}^s) \cdot (T_{v,i}^{s+1} - T_{v,i-1}^{s+1}) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где:  $s$  – номер итерации. Для определения нового приближения с применением метода прогонки, систему (16) приводят к виду:

$$A_{v,i} \cdot T_{v,i+1}^{s+1} - B_{v,i} \cdot T_{v,i}^{s+1} + C_{v,i} \cdot T_{v,i-1}^{s+1} = F_{v,i}, \quad (17)$$

где:

$$\begin{aligned} & A_{v,i} = k^2 (\lambda_{v,i}^s + \lambda_{v,i+1}^s), \quad B_{v,i} = k^2 (\lambda_{v,i-1}^s + 2\lambda_{v,i}^s + \lambda_{v,i+1}^s) + 2kh^2 \gamma_{v,i}^s + \tau_{r,v} h^2 (\gamma_{v,i}^s + \gamma_{v,i}^j), \\ & C_{v,i} = k^2 (\lambda_{v,i}^s + \lambda_{v,i-1}^s), \quad F_{v,i} = \tau_{r,v} h^2 T_{v,i}^{j-1} (\gamma_{v,i}^j + \gamma_{v,i}^{j-1}) - h^2 T_{v,i}^j \left[ 2k\gamma_{v,i}^s + \tau_{r,v} (\gamma_{v,i}^s + 2\gamma_{v,i}^j + \gamma_{v,i}^{j-1}) \right]. \end{aligned}$$

Формулы для расчета прогоночных коэффициентов на каждом слое получаем, подставляя в уравнение (17) соотношение прогонки  $T_{v,i-1}^{s+1} = \alpha_{i-1} \cdot T_{v,i}^{s+1} + \beta_{i-1}$ :

$$\alpha_i = \frac{A_{v,i}}{B_{v,i} - C_{v,i} \cdot \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{C_{v,i} \cdot \beta_{i-1} - F_{v,i}}{B_{v,i} - C_{v,i} \cdot \alpha_{i-1}}. \quad (18)$$

Используя соотношение для фиктивного узла  $T_i^{-1} = T_i^0$ , полученное из аппроксимации начального условия (10), определяем коэффициенты  $F_{v,i}$  на первом временном слое:

$$F_{v,i}^1 = -h^2 T_{v,i}^0 \left[ 2k\gamma_{v,i}^s + \tau_{r,v} (\gamma_{v,i}^s + \gamma_{v,i}^0) \right]. \quad (19)$$

Определяя начальные прогоночные коэффициенты  $\alpha_1, \beta_1$ , находим формулу для фиктивного узла из аппроксимации левого граничного условия:

$$-\lambda_{1,1}^s \frac{T_{1,2}^{s+1} - T_{1,0}^{s+1}}{2h} = q^s, \quad (20)$$

где: 
$$q^s = A(T_{1,1}^s) q_{\max} \sin \frac{\pi k j}{\tau_d} + \tau_{r,1} \left[ 0,99 \cdot 10^{-4} \frac{T_{1,1}^s - T_{1,1}^j}{k} q_{\max} \sin \frac{\pi k j}{\tau_d} + A(T_{1,1}^s) \frac{\pi q_{\max}}{\tau_d} \cos \frac{\pi k j}{\tau_d} \right],$$

$$A(T_{1,1}^s)$$
 вычисляется по формуле (3). Следовательно, 
$$T_{1,0}^{s+1} = T_{1,2}^{s+1} + \frac{2hq^s}{\lambda_{1,1}^s}.$$

Подставляя полученное соотношение для фиктивного узла в уравнение (16) записанное при  $i=1, v=1$ , выводим формулы для определения начальных прогоночных коэффициентов  $\alpha_1, \beta_1$ :

$$\alpha_1 = \frac{k^2 (2\lambda_{1,1}^s + \lambda_{1,0}^s + \lambda_{1,2}^s)}{2kh^2\gamma_{1,1}^s + \tau_{r,1}h^2(\gamma_{1,1}^s + \gamma_{1,1}^j) + k^2 (2\lambda_{1,1}^s + \lambda_{1,0}^s + \lambda_{1,2}^s)}, \quad (21)$$

$$\beta_1 = \frac{-\tau_{r,1}h^2T_{1,1}^{j-1}(\gamma_{1,1}^j + \gamma_{1,1}^{j-1}) + T_{1,1}^j [2kh^2\gamma_{1,1}^s + \tau_{r,1}h^2(\gamma_{1,1}^s + 2\gamma_{1,1}^j + \gamma_{1,1}^{j-1})] + \frac{2k^2hq^s}{\lambda_{1,1}^s} (\lambda_{1,0}^s + \lambda_{1,1}^s)}{2kh^2\gamma_{1,1}^s + \tau_{r,1}h^2(\gamma_{1,1}^s + \gamma_{1,1}^j) + k^2 (2\lambda_{1,1}^s + \lambda_{1,0}^s + \lambda_{1,2}^s)} \quad (22)$$

где 
$$\lambda_{1,0}^s = \lambda(T_{1,0}^s) = \lambda \left( T_{1,2}^s + \frac{2hq^s}{\lambda_{1,1}^s} \right)$$
 вычисляется по формуле (1).

Определяя коэффициент  $\beta_1$  на первом временном слое, соотношение (22) записываем при  $j=0$  и подставляем значение сеточной функции для фиктивного узла  $T_{1,1}^{-1} = T_{1,1}^0$ :

$$\beta_1^1 = \frac{T_{1,1}^0 [2kh^2\gamma_{1,1}^s + \tau_{r,1}h^2(\gamma_{1,1}^s + \gamma_{1,1}^j)] + \frac{2k^2hq^s}{\lambda_{1,1}^s} (\lambda_{1,0}^s + \lambda_{1,1}^s)}{2kh^2\gamma_{1,1}^s + \tau_{r,1}h^2(\gamma_{1,1}^s + \gamma_{1,1}^j) + k^2 (2\lambda_{1,1}^s + \lambda_{1,0}^s + \lambda_{1,2}^s)} \quad (23)$$

Значение температуры на правой границе определяем из уравнения (16) записанного при  $i=N, v=2$ , подставляя соотношение для фиктивного узла  $T_{2,N+1}^{s+1}$ , полученное из аппроксимации правого граничного условия с погрешностью  $O(h^2)$ :

$$T_{2,N}^{s+1} = \frac{2k^2\beta_{N-1}(\lambda_{2,N}^s + \lambda_{2,N-1}^s) + T_{2,N}^j h^2 [ \gamma_{2,N}^s (2k + \tau_{r,2}) + \tau_{r,2} (2\gamma_{2,N}^j + \gamma_{2,N}^{j-1}) ] - \tau_{r,2} h^2 T_{2,N}^{j-1} (\gamma_{2,N}^j + \gamma_{2,N}^{j-1})}{2kh^2\gamma_{2,N}^s + \tau_{r,2}h^2(\gamma_{2,N}^s + \gamma_{2,N}^j) + 2k^2(\lambda_{2,N}^s + \lambda_{2,N-1}^s)(1 - \alpha_{N-1})} \quad (24)$$

Определяя значение сеточной функции в узле на правой границе первого временного слоя, используем формулу (24) при условии  $j=0$  и соотношение для фиктивного узла  $T_{2,N}^{-1} = T_{2,N}^0$ :

$$T_{2,N}^1 = \frac{2k^2\beta_{N-1}(\lambda_{2,N}^s + \lambda_{2,N-1}^s) + T_{2,N}^0 h^2 [ \gamma_{2,N}^s (2k + \tau_{r,2}) + \tau_{r,2} \gamma_{2,N}^0 ]}{2kh^2\gamma_{2,N}^s + \tau_{r,2}h^2(\gamma_{2,N}^s + \gamma_{2,N}^0) + 2k^2(\lambda_{2,N}^s + \lambda_{2,N-1}^s)(1 - \alpha_{N-1})} \quad (25)$$

Прогоночные коэффициенты в точке контакта двух сред получаем из аппроксимации граничного условия четвертого рода, используя аппроксимации для смешанных частных производных [10]:

$$\lambda_{1,i}^s \frac{T_{1,i}^{s+1} - T_{1,i}^{s+1}}{h} + \frac{\tau_{r,2}}{h} \left[ \frac{\lambda_{1,i}^s + \lambda_{1,i}^j}{2} \cdot \frac{T_{1,i}^{s+1} - T_{1,i}^j}{k} - \frac{\lambda_{1,i}^{s-1} + \lambda_{1,i}^{j-1}}{2} \cdot \frac{T_{1,i}^{s+1} - T_{1,i}^{j-1}}{k} \right] =$$

$$= \lambda_{2,i}^s \frac{T_{2,i}^{s+1} - T_{2,i}^{s+1}}{h} + \frac{\tau_{r,1}}{h} \left[ \frac{\lambda_{2,i}^s + \lambda_{2,i}^j}{2} \cdot \frac{T_{2,i}^{s+1} - T_{2,i}^j}{k} - \frac{\lambda_{2,i}^{s-1} + \lambda_{2,i}^{j-1}}{2} \cdot \frac{T_{2,i}^{s+1} - T_{2,i}^{j-1}}{k} \right] \quad (26)$$

Подставляя в уравнение (26) соотношение прогонки  $T_{1,i}^{s+1} = \alpha_{i-1}^* \cdot T_{1,i}^{s+1} + \beta_{i-1}^*$  и выражая  $T_{i}^{s+1} = T_{1,i}^{s+1} = T_{2,i}^{s+1}$ , получаем формулы для прогоночных коэффициентов в точке  $x = x^*$ :

$$\alpha_i^{j+1} = \frac{2k\lambda_{2,i}^s + \tau_{r,1}(\lambda_{2,i}^{s+1} + \lambda_{2,i}^{j+1})}{2k\lambda_{1,i}^s(1 - \alpha_{i-1}^*) + 2k\lambda_{2,i}^s - \alpha_{i-1}^* \tau_{r,2}(\lambda_{1,i}^{s-1} + \lambda_{1,i}^{j-1}) + \tau_{r,2}(\lambda_{1,i}^s + \lambda_{1,i}^j) + \tau_{r,1}(\lambda_{2,i}^s + \lambda_{2,i}^j)} \quad (27)$$

$$\beta_i^{j+1} = \frac{\beta_{i-1}^* [2k\lambda_{1,i}^s + \tau_{r,2}(\lambda_{1,i}^{s-1} + \lambda_{1,i}^{j-1})] + T_{i-1}^j [\tau_{r,2}(\lambda_{1,i}^s + \lambda_{1,i}^j) + \tau_{r,1}(\lambda_{2,i}^s + \lambda_{2,i}^j)]}{2k\lambda_{1,i}^s(1 - \alpha_{i-1}^*) + 2k\lambda_{2,i}^s - \alpha_{i-1}^* \tau_{r,2}(\lambda_{1,i}^{s-1} + \lambda_{1,i}^{j-1}) + \tau_{r,2}(\lambda_{1,i}^s + \lambda_{1,i}^j) + \tau_{r,1}(\lambda_{2,i}^s + \lambda_{2,i}^j)}$$

$$- \frac{T_{1,i}^{j-1} \tau_{r,2}(\lambda_{1,i}^{s-1} + \lambda_{1,i}^{j-1}) + T_{2,i}^{j-1} \tau_{r,1}(\lambda_{2,i}^{s-1} + \lambda_{2,i}^{j-1})}{2k\lambda_{1,i}^s(1 - \alpha_{i-1}^*) + 2k\lambda_{2,i}^s - \alpha_{i-1}^* \tau_{r,2}(\lambda_{1,i}^{s-1} + \lambda_{1,i}^{j-1}) + \tau_{r,2}(\lambda_{1,i}^s + \lambda_{1,i}^j) + \tau_{r,1}(\lambda_{2,i}^s + \lambda_{2,i}^j)} \quad (28)$$

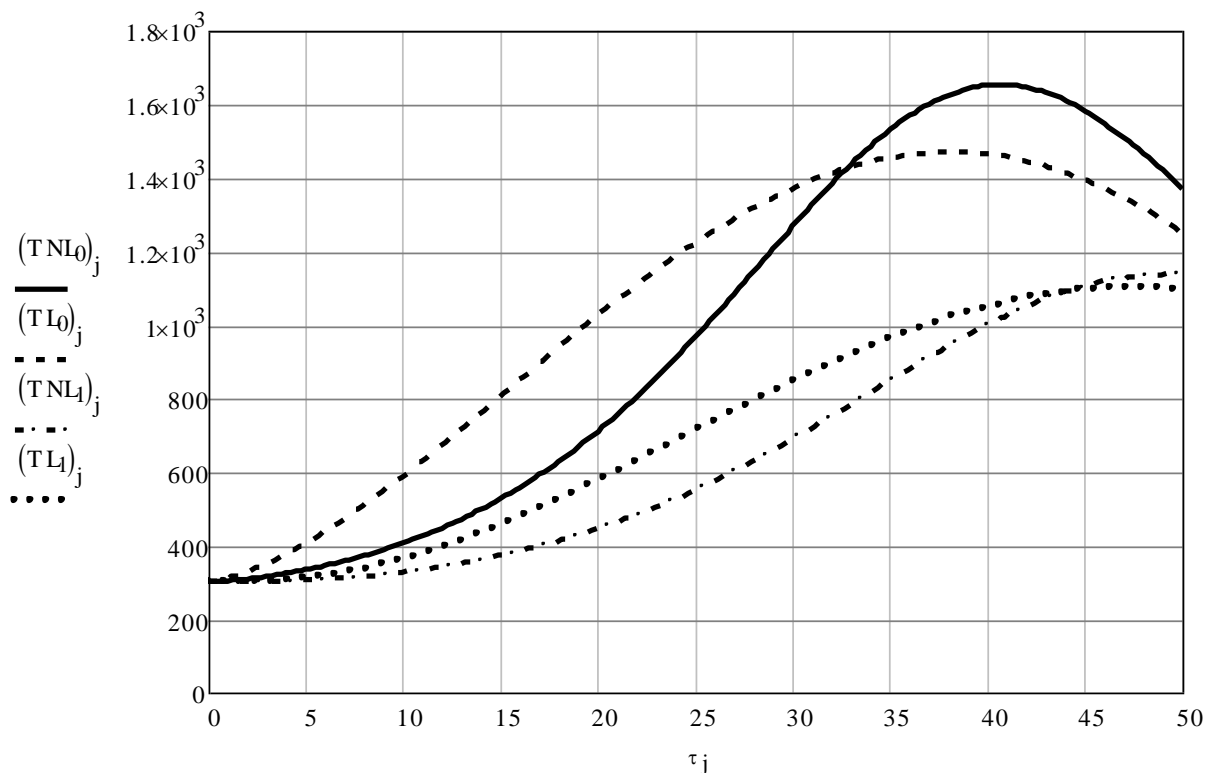
В алгоритме используется процедура расчета значений сеточной функции на верхнем (промежуточном и первом) временном слое предусматривающая реализацию прямой и обратной прогонки. При этом сначала определяются прогоночные коэффициенты для поверхностного слоя, затем на границе  $x = x^*$ , используя соотношения (27)-(28), далее задаются прогоночные коэффициенты для материала основы.

Расчет температурного поля начинается с вычисления значений температуры на правой границе по формулам (24) или (25) для промежуточного или первого слоя соответственно. Во всех остальных узлах на текущей итерации вычисления осуществляются с использованием основного соотношения прогонки. Определение температурного поля на каждом временном слое осуществляется до тех пор, пока максимальная разность между значениями температуры на текущей и предыдущей итерации не станет минимальной. При выполнении условия  $\max_i |T_i^{s+1} - T_i^s| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – точность вычислений, полученные на текущей итерации значения сеточной функции, определяют значения функции на верхнем временном слое. В качестве начального приближения рассматривались значения функции на предыдущем временном слое.

Отличие знаменателей прогоночных коэффициентов от нуля и выполнение условия  $(|\alpha_i| < 1, i = \overline{1, N-1})$  исключают быстрый рост погрешности округления и обеспечивает успешное применение метода прогонки. При использовании данного метода для решения поставленной задачи учитывается безусловная устойчивость предложенной неявной разностной схемы с погрешностью аппроксимации  $O(\tau + h)$ .

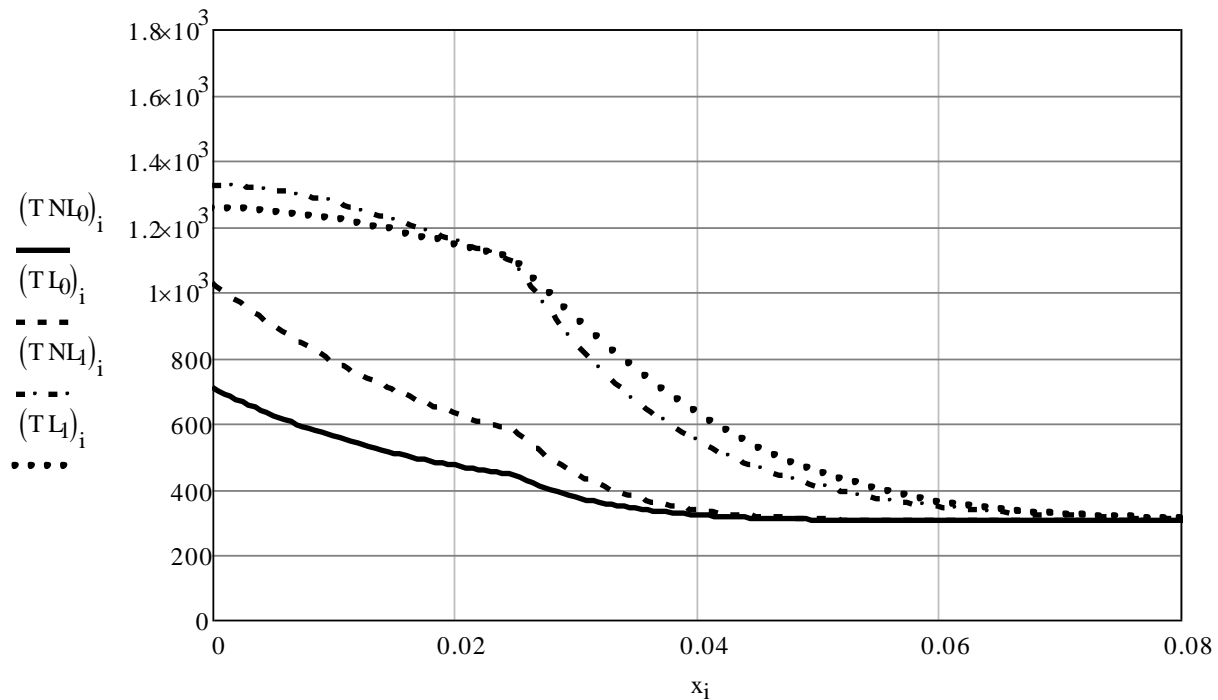
Программа для численного расчета температурного поля в условиях задачи (7)-(14) реализовывалась в системе MathCAD и в среде программирования Dev-C++. Для сравнения результатов расчетов температурных полей при математическом моделировании на основе системы нелинейных гиперболических уравнений теплопроводности и соответствующей линейной модели с использованием среднеинтегральных значений теплофизических характеристик получено численное решение линейной гиперболической задачи теплопроводности в двухслойном теле с применением алгоритма, описанного в работе [9].

Численное решение линейных задач получено на основе методики конечных разностей с использованием метода прогонки при среднеинтегральных значениях теплофизических и оптических характеристик:  $\bar{\lambda}_1 = 121 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 33,8 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ,  $\bar{\gamma}_1 = 2,744 \cdot 10^6 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$ ,  $\bar{\gamma}_2 = 4,605 \cdot 10^6 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$ ,  $\bar{A} = 0,098$ . Результаты расчетов соответствующие решениям нелинейной (TNL) и линейной (TL) задач приведены на рисунках 1-2. График функции изменения температуры во времени при  $x = 0$  мм и при  $x = 0,025$  мм представлен на рисунке 1. На рисунке 2 приведены графики распределения температуры по толщине покрытия и основы при  $\tau = 20$  мкс и при  $\tau = 50$  мкс.



**Рисунок 1.** Изменение температуры во времени: при  $x = 0$  мм ( $TNL_0, TL_0$ ) и при  $x = 0,025$  мм ( $TNL_1, TL_1$ ) (разработано автором)





**Рисунок 2.** Распределение температуры по толщине покрытия и основы:  
при  $\tau = 20$  мкс ( $TNL_0$ ,  $TL_0$ ) и при  $\tau = 50$  мкс ( $TNL_1$ ,  $TL_1$ ) (разработано автором)

Достоверность полученных результатов обосновывается сравнимостью температурных полей в двухслойном теле, рассчитанных при решении предложенным численным методом и приближенным аналитическим, представленным в работе [8, с. 147-148] на основе сочетания метода пространственно-временных квадрантов и операционного метода.

Существенные отличия в результатах расчетов температурных полей при использовании нелинейной и соответствующей линейной модели с учетом среднеинтегральных значений теплофизических характеристик (рис. 1-2) проявляют необходимость учета температурной зависимости поглощательной способности и свойств материалов при обработке многослойных тел потоками энергии высокой интенсивности.

Разработанная нелинейная математическая модель нагрева двухслойного тела с учетом релаксации теплового потока и температурной зависимости свойств материалов позволяет повысить точность расчета температурных полей при исследовании тепловых процессов с воздействием высокоинтенсивными потоками энергии на материалы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенков М.Б. Распространение термоупругих волн в среде с учетом релаксации теплового потока: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.: Санкт-Петербург, 2013. – 22 с.
2. Борисов Ю.С. Численное моделирование теплообмена и гидродинамики при лазерно-плазменной обработке металлических материалов / Ю.С. Борисов, В.Ф. Демченко, А.Б. Лесной, В.Ю. Хаскин, И.В. Шуба // Автоматическая сварка. – 2013. – № 4. – С. 3-8.
3. Веселовский В.Б. Губин А.И. Математическое моделирование лазерного термического упрочнения без плавления поверхности // Металлургическая

- теплотехника. Сборник научных трудов Национальной металлургической академии Украины. – Днепропетровск. – 2008. – С. 47-54.
4. Кравченко Б.А. Термопластическое упрочнение жаропрочных никелевых сплавов с использованием лазерного нагрева / Б.А. Кравченко, С.В. Каюков, А.А. Гусев // Физика и химия обработки материалов – 1999. – №6. – С. 17-21.
  5. Кудинов И.В. Математическое моделирование процессов теплопроводности и гидродинамики численно-аналитическими методами на основе использования дополнительных граничных условий: дис. ... канд. техн. наук. – Самара, 2011. – 181 с.
  6. Лыков А.М. Расчет процессов и разработка аппаратов для плазменной модификации поверхности материалов: дис. ... д-ра. техн. наук. – М., 2006. – 281 с.
  7. Малая Ю.А. Математическое моделирование лазерного нагрева тел с покрытиями на основе нелинейного гиперболического уравнения теплопроводности / Ю.А. Малая, А.И. Губин // Вестник Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». Сборник научных работ. Тематический выпуск «Энергетические и теплотехнологические процессы и оборудование». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2012. – № 7. – С. 174-181.
  8. Малая Ю.А. Математическое моделирование процессов теплопроводности с учетом релаксации теплового потока: дис. ... канд. техн. наук. – Днепропетровск, 2015. – 183 с.
  9. Петрова Л.С. Математическое моделирование процессов нагрева кусочно-однородных тел с учетом релаксации теплового потока // Интернет-журнал «Наукоедение» – 2017. – Т. 9, №1. Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/PDF/38TVN117.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.
  10. Самарский А.А. Теория разностных схем: учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
  11. Шашков А.Г. Волновые явления теплопроводности: Системно-структурный подход. Изд. 2-е, доп. / А.Г. Шашков, В.А. Бубнов, С.Ю. Яповский. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 296 с.
  12. Lopez Molina J.A., Trujillo M. Regularity of solutions of the anisotropic hyperbolic heat equation with nonregular heat sources and homogeneous boundary conditions. Turk J Math, 2017, vol. 41, pp. 461-482.
  13. Pakdemirli M., Şahin A.Z. Approximate Symmetries of Hyperbolic Heat Conduction Equation with Temperature Dependent Thermal Properties. Mathematical and Computational Applications, 2005, vol. 10, no. 1, pp. 139-145.
  14. Wafo Soh C. Symmetry Breaking and Exact Solutions of the Hyperbolic Heat Equation with Variable Medium Properties. Adv. Studies Theor. Phys., 2008, vol. 2, no. 2, pp. 71-85.

**Petrova Liliya Sergeevna**  
Omsk state transport university, Russia, Omsk  
E-mail: [petrov.306@mail.ru](mailto:petrov.306@mail.ru)

## **Mathematical modeling of process of heating the multilayer bodies in the processing flows of high intensity energy on the basis of a system of nonlinear hyperbolic equations of heat conduction**

**Abstract.** The article is devoted to numerical methods for solving of nonlinear problems of heat conduction when processing the concentrated streams of energy bodies with the coating. Presented the mathematical model on the basis of a system of nonlinear hyperbolic equations of heat conduction to calculate the temperature field of the body with the coating when heated, taking into account the relaxation of heat flow and temperature dependence of material properties.

The implementation of the grid method using a three-layer implicit difference scheme for solving the nonlinear hyperbolic heat conduction problem is considered for the case when the absorption of radiation energy is modeled by a surface heat source.

A numerical solution of the nonlinear heat conduction problem in a two-layer body taking into account the finite velocity of heat propagation and boundary conditions in the case of ideal contact on the border of layer is obtained, based on the method of finite differences using the method of sweep and iterative refinement of the coefficients.

An algorithm is described for calculating the temperature field when a body with coating is heated, taking into account the dependence of the thermophysical and optical characteristics of materials from the temperature. The results of calculations of temperature fields in mathematical modeling on the basis of a system of nonlinear hyperbolic heat conduction equation and a corresponding linear model are compared with the use of the mean integral values of thermophysical characteristics.

The resulting nonlinear mathematical model can be used in the study of the process of heating the multilayer bodies under the influence to high-intensity energy flows on materials.

**Keywords:** mathematical model; temperature field; numerical methods; nonlinear hyperbolic equations of heat conduction; implicit difference scheme; sweep method; the conjugation conditions