

Интернет-журнал «Наукоедение» ISSN 2223-5167 <http://naukovedenie.ru/>

Том 9, №4 (2017) <http://naukovedenie.ru/vol9-4.php>

URL статьи: <http://naukovedenie.ru/PDF/07TVN417.pdf>

Статья опубликована 10.07.2017

Ссылка для цитирования этой статьи:

Мищенко Р.В., Пименов Д.А. Расчет неоднородных балок переменной толщины // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 9, №4 (2017) <http://naukovedenie.ru/PDF/07TVN417.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 539.319/539.219.1

Мищенко Роман Викторович¹

ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Россия, Саратов²
Аспирант

E-mail: roman_radon4@mail.ru

РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=789909

Пименов Дмитрий Алексеевич³

ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Россия, Саратов
Аспирант

E-mail: scorpions91@inbox.ru

РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=789910

Расчет неоднородных балок переменной толщины

Аннотация. В данной статье исследуется влияние неоднородности свойств материала балки переменной толщины на ее напряженно-деформированное состояние. Авторами рассматривались задачи изгиба балки переменной толщины из нелинейно-деформируемого материала под действием поперечной нагрузки с различными вариантами неоднородности по ее толщине: слои неоднородности с деградирующими прочностными характеристиками – моделирование агрессивного воздействия внешней среды, слои неоднородности с улучшенными прочностными характеристиками – моделирование технологического упрочнения. Для каждого варианта неоднородности приведены различные вариации: двусторонняя и односторонняя неоднородность по толщине, причем для односторонней неоднородности решена задача по отслеживанию линии центра тяжести в каждом сечении балки переменной толщины. На каждом этапе расчета, как в случае деградации так и в случае упрочнения поверхностных слоев, проведена оценка качественного изменения эпюр напряжений по толщине балки в характерных сечениях при различных отношениях временного сопротивления материала в неоднородном слое к временному сопротивлению исходного материала. Проведен анализ изменения напряжений на поверхности балки и на границе фронта неоднородности для опорного и центрального сечений балки и представлены соответствующие графические результаты.

Ключевые слова: фронт неоднородности; функция деградации; функция упрочнения; переменная толщина; физическая нелинейность; инкрементальное уравнение; сплайн-функции; поперечная нагрузка; наведенная неоднородность

¹ Социальная сеть ВКонтакте: <https://vk.com/id22336207>

² 410054, Россия, г. Саратов, ул. Политехническая, 77

³ Социальная сеть ВКонтакте: <https://vk.com/scorpions91>

Непрерывное развитие строительной индустрии, а в частности развитие новых методов расчета в строительной механике, появление принципиально новых технологий получения строительных материалов и их комбинаций, ставит перед современным исследователем все новые и довольно наукоемкие задачи. Современное строительство непрерывно стремится к получению таких конструкций, которые были бы максимально легкими, имели малую плотность и максимально низкую теплопроводность, но при этом должны были иметь максимальные показатели по прочности. Но как ни странно такое стремление имеет и негативную сторону связанную с тем, что любая конструкция в эксплуатационных условиях подвергается воздействию агрессивной среды и, следовательно, под таким воздействием любая облегченная конструкция будет разрушаться гораздо быстрее без использования должных технологических операций по ее защите. По словам академика В.В. Петрова главной проблемой на сегодняшний день является определение всего жизненного цикла строительной конструкции [1]. Определение жизненного цикла строительной конструкции довольно сложная задача, которая включает в себя все возможные факторы воздействия начиная от банального перепада температур и заканчивая различными комбинациями в виде замачивания химическими реагентами и направленного теплового воздействия. Любое негативное воздействие на конструкцию будь оно кратковременным или же постоянно действующим влечет за собой изменение прочностных и деформационных характеристик материала конструкции и как следствие в худшую сторону. А причиной снижения прочностных и деформационных характеристик является то, что действующая агрессивная среда посредством диффузии проникает в поверхностные слои материала строительной конструкции разрушая существующие химические связи и образуя новые, чаще всего негативные, что влечет за собой появление макро неоднородности в структуре исходного материала и в результате чего происходит его деградация (разупрочнение), которая приводит к тому, что основные физические характеристики материала строительной конструкции, такие как модуль упругости и другие, становятся функциями пространственных координат.

Как известно, в механике деформируемого твердого тела существует гипотеза об однородности свойств материала, которая говорит о том, что все физико-механические свойства материала одинаковы по всем направлениям и не зависят от пространственных координат [1]. Наличие данной гипотезы позволяет закрыть глаза на естественную неоднородность материалов на микроуровне, считая их однородными, и, что самое интересное, значительно упрощаются все расчеты, поскольку основные физико-механические характеристики материала будут являться константами. Но приведенные выше доводы о воздействии агрессивной среды на материал строительной конструкции с последующей деградацией его свойств говорят о том, что данная неоднородность будет являться макро неоднородностью. Макро неоднородность приводит нас к тому, что физико-механические характеристики материала становятся функциями пространственных координат и могут существенно изменяться по объему конструкции, в результате чего данный факт заставляет нас отказываться от гипотезы однородности и принимать в расчетах наличие макро неоднородности в материале, которая будет являться причиной изменения напряженно-деформированного состояния строительной конструкции.

Как говорилось выше, стремление инженеров облегчить конструкцию вполне оправданно, поскольку такие операции довольно таки сильно снижают собственный вес конструкции, а следовательно, и нагрузку на все здание или сооружение в целом, но опять же уменьшение сечений конструктивных элементов строительной конструкции и скажем так «подгонка» под максимальное использование ресурсов может быть чревата серьезными последствиями вплоть до обрушения конструкции ввиду даже незначительного коррозионного воздействия, поскольку конструкция без определенного запаса по прочности не будет способна выдерживать дополнительные нагрузки. В качестве решения проблемы

защиты от коррозии и дополнительного улучшения прочностных характеристик материалов строительных конструкций, на примере стальных конструкций, на практике довольно часто прибегают к некоторым технологическим приемам таким как, например, термомеханическая обработка, поверхностное упрочнение давлением, закалка токами высокой частоты, газопламенная закалка, обработка холодом. Но современное материаловедение развивается очень быстро и вполне логичным является направление создания таких материалов или комбинаций материалов, свойства которых изменяются по сечению строительной конструкции, то есть создавать конструкции из таких материалов в которых заведомо имеются макро неоднородности, в виде скажем отдельных слоев из других материалов, по толщине конструкции, которые имеют в свою очередь наперед заявленные физико-механические характеристики. Строительные конструкции из таких материалов называются неоднородными, а сама неоднородность – наведенной. Развитие таких технологий имеет вполне оправданный экономический эффект за счет того, что снижение массы строительных конструкций приводит к уменьшению собственного веса и расхода стали, которые в свою очередь снижают общую нагрузку на фундамент здания или сооружения, приводя тем самым к значительной экономии средств. В качестве примера конструкций, в которых вполне оправданно можно использовать материалы с наведенной неоднородностью рассмотрим изгибаемые строительные конструкции. Исследования напряженно-деформированного состояния различных видов строительных конструкций работающих на изгиб показывают, что материал в таких конструкциях используется крайне неэффективно. Большую часть действующей нагрузки на конструкцию воспринимают крайние волокна материала, при этом остальная часть нагрузки, которая приходится на их центральную часть минимальна, в результате чего использование прочностных возможностей материала в пределах нейтральных волокон намного ниже рекомендуемых. В таком случае, чтобы повысить эффективность использования материала в изгибаемых конструкциях и при этом облегчить конструкцию, и повысить ее коррозионную способность, используем в качестве основного материала конструкции, материал с низкими прочностными характеристиками, но при этом с улучшенными технологическими свойствами такими как, например, низкой теплопроводностью, хорошим акустическим и механическим демпфированием, высокой энерго-поглощающей способностью, малым объемным весом, газопроницаемостью и прочими, и создадим в нем с помощью специальных технологических приемов, не обсуждаемых в данной статье, неоднородность по толщине, которую сосредоточим преимущественно в зонах крайних, верхних и нижних, волокон изгибаемой строительной конструкции. Материал, из которого создается неоднородность, должен обладать повышенными прочностными характеристиками, износостойкостью и коррозионной стойкостью, поскольку его основная задача заключается в прямом взаимодействии с внешней средой и принятием на себя основной части действующей на строительную конструкцию нагрузки.

При наличии всех положительных качеств неоднородных конструкций создание наведенной неоднородности в материале должно подчиняться определенным правилам. Для того, чтобы избежать появления концентраторов напряжений на границе перехода от упрочненного материала к основному необходимо, чтобы изменение прочностных свойств упрочняющей среды происходило плавно от поверхности конструкции в ее глубину. То есть требуется, чтобы при движении от поверхности материала конструкции вглубь концентрация упрочняющей среды в неоднородном слое уменьшалась. В связи с этим получается, что по толщине слоя неоднородности прочностные характеристики материала становятся функциями концентрации среды в исходном материале.

В данной статье рассматривается задача, которая состоит из двух частей, в следующей постановке. В качестве строительной конструкции работающей на изгиб принимается балка

переменной толщины. В качестве основного материала балки принимается материал с низкими прочностными характеристиками, но с требуемыми технологическими характеристиками такими как хорошее акустическое и механическое демпфирование и малый объемный вес. В первом случае балка не упрочняется и исследуется ее напряженно-деформированное состояние в случае деградации прочностных свойств поверхностных слоев материала в результате агрессивного воздействия внешней среды. Во втором случае исследуется напряженно-деформированное состояние той же строительной конструкции, но с упрочненными поверхностными слоями.

Строительная конструкция подверженная воздействию агрессивной среды становится неоднородной, так как внешняя среда, проникающая в ее поверхностные слои, снижает ее прочностные характеристики, в результате чего прочностные свойства деградированного слоя становятся функциями координат балки. Проиллюстрируем ниже построение математической модели для балки переменной толщины выполненной из нелинейно-деформируемого материала при двусторонней деградации поверхностных слоев материала. На рис. 1 приводится балка с двусторонней неоднородностью поверхностных слоев по толщине со следующими основными обозначениями: s_ζ – толщина неоднородного слоя, фронт неоднородности – это условная линия ограничивающая переход от основного материала к неоднородному, $Z_{\text{фн}}$ – координата фронта неоднородности, ξ, η, ζ – безразмерные координаты по длине, ширине и толщине балки, η_1 – безразмерная координата, отслеживающая положение центра тяжести сечения для балки переменной толщины, $h(\xi)$ – функция описывающая толщину балки по длине в безразмерном виде, $p(\xi)$ – распределенная безразмерная нагрузка, h_0 – безразмерная толщина балки на краях, h_c – безразмерная толщина балки в центре.

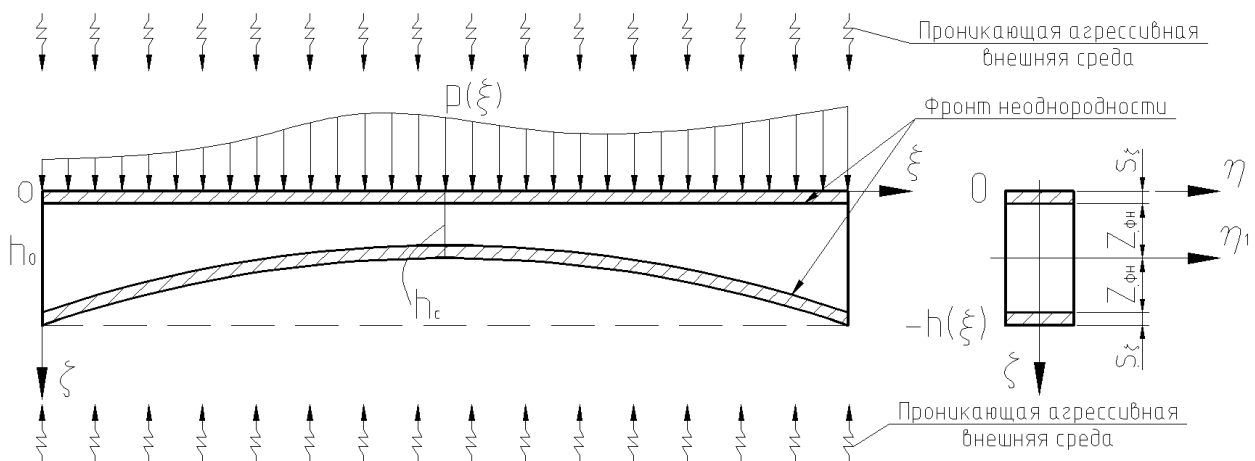


Рисунок 1. Балка при двусторонней неоднородности поверхностных слоев
 (составлено/разработано авторами)

Для решения задачи необходимо определиться с видом функции описывающей толщину балки по ее длине. Начало координат расположим в верхнем левом краю балки. Данное условие связано с последующим интегрированием по высоте балки для определения переменной по длине жесткости. Как видно из рис. 1 нижнее сечение балки по длине описывает квадратную параболу, для чего используем квадратный полином вида $h(\xi) = -a\xi^2 + b\xi + c$ и, удовлетворяя граничным условиям на концах балки

$h(0) = 1, h\left(\frac{1}{2}\right) = h_c = \frac{h_0}{n}, h(1) = 1$, где n – это целочисленный показатель, показывающий во сколько раз высота балки на опоре больше высоты балки в центре, получим в безразмерной форме функцию, описывающую толщину балки по ее длине, в следующем виде

$$h(\xi) = 4 \frac{(n-1)}{n} (\xi^2 - \xi) + 1 \quad (1)$$

Поскольку агрессивная среда проникает в поверхностные слои материала постепенно, то, следовательно, ее концентрация в каждой точке, по толщине балки, будет разная, поэтому получается, что в каждой точке по толщине неоднородного слоя диаграмма деформирования материала будет разная. Исследования авторов [2, 3] в области задач, связанных с упрочнением и деградацией поверхностных слоев материала изгибаемых строительных конструкций, показали, что изменение прочностных свойств в неоднородном слое материала в зависимости от концентрации веществ агрессивной среды можно выразить в виде экспоненциальной или полиномиальной зависимостей. Опираясь на феноменологический подход, непосредственно, в пределах разупрочненного слоя, вводим функцию деградации $\delta(\zeta)$, которая будет учитывать изменение предела прочности (временного сопротивления) материала при изменении концентрации агрессивной среды по толщине неоднородного слоя балки. Функция деградации должна обладать следующими основными свойствами: в

пределах слоя неоднородности $-h(\xi) \leq \zeta < (-h(\xi) + s_\zeta)$ и $-s_\zeta < \zeta \leq 0$ функция деградации изменяется по нелинейному закону, в исходном материале балки в пределах $(-h(\xi) + s_\zeta) < \zeta < (-s_\zeta)$ функция деградации равна единице и на границе фронта неоднородности $\delta(Z_{\phi n}) = 1$.

Для балки, изображенной на рис. 1, функцию деградации, описывающую изменение прочностных характеристик по толщине слоя неоднородности с учетом переменности толщины балки по длине, запишем в форме полиномиальной зависимости в следующем виде

$$\delta(\zeta) = \frac{\left(K \left(\left| \frac{h(\xi)}{2} \right| - s_\zeta \right)^2 - 0.25 \right) - (1-K) \left(\zeta + \left| \frac{h(\xi)}{2} \right| \right)^2}{\left(\left| \frac{h(\xi)}{2} \right| - s_\zeta \right)^2 - 0.25} \quad (2)$$

$$K = \frac{\sigma_e}{\sigma_{0,e}} -$$

где коэффициент $\frac{\sigma_e}{\sigma_{0,e}}$ выражается, как отношение временного сопротивления материала в слое неоднородности к временному сопротивлению исходного материала. При рассмотрении задач, связанных с деградацией поверхностных слоев материала балки, изначально определимся следующим образом: в задачах, где в поверхностных слоях материала балки прочностные характеристики деградируют, то есть при движении от фронта неоднородности к поверхности балки значение K находится в пределах $0 \leq K < 1$, коэффициент K будем называть коэффициентом деградации.

Ниже на рис. 2 проиллюстрируем балку с одним неоднородным слоем по толщине и основные обозначения. Ввиду того, что в большинстве случаев воздействие агрессивной среды приходится на нижнюю часть балки, то, соответственно, смоделируем ситуацию, в

которой деградации подвергается слой расположенный в зоне растянутых волокон балки, а полученную в результате конструкцию будем называть балкой с односторонней неоднородностью по толщине. Z_c – расстояние от крайних волокон балки до оси центра тяжести сечения в безразмерном виде.

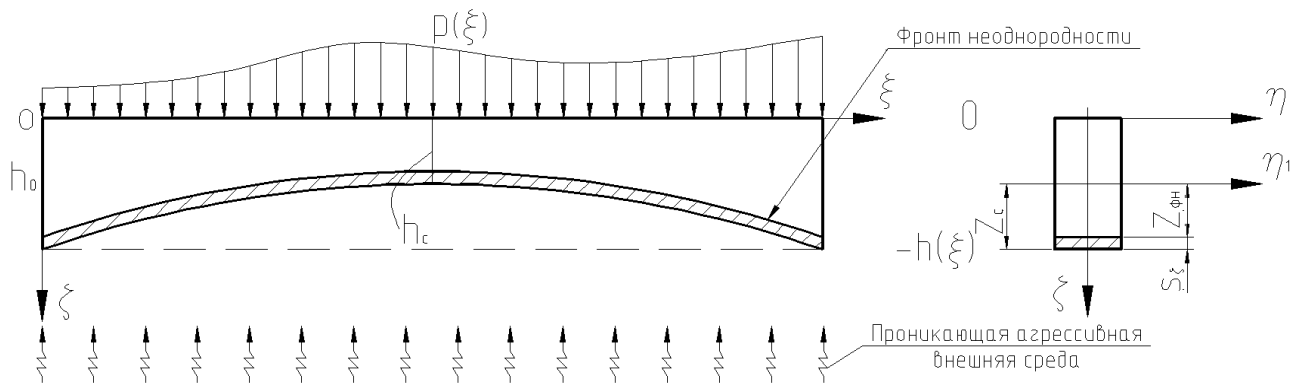


Рисунок 2. Балка при односторонней неоднородности поверхностного слоя (составлено/разработано авторами)

В соответствии со схемой, приведенной на рис. 2, запишем для балки функцию деградации форме полиномиальной зависимости в следующем виде

$$\delta(\zeta) = \frac{\left[K(-h(\xi) + s_\zeta)^2 - (|-h(\xi) + s_\zeta| + s_\zeta)^2 \right] - (1 - K)\zeta^2}{(-h(\xi) + s_\zeta)^2 - (|-h(\xi) + s_\zeta| + s_\zeta)^2} \quad (3)$$

При решении задач, связанных с упрочнением поверхностных слоев материала балки, в качестве функции, описывающей изменение прочностных характеристик по толщине, будем использовать экспоненциальную зависимость. Таким образом, для балки, изображенной на рис. 1, при двусторонней неоднородности, функция упрочнения в безразмерном виде будет выглядеть следующим образом

$$\delta(\zeta) = \exp \left[\ln(D) \frac{|\zeta + 0.5h(\xi)| - (0.5h(\xi) - s_\zeta)}{s_\zeta} \right] \quad (4)$$

Следуя предыдущим рассуждениям, для балки, проиллюстрированной на рис. 2, при односторонней неоднородности, функция упрочнения в безразмерной форме будет выглядеть в следующем виде

$$\delta(\zeta) = \exp \left[\ln(D) \frac{|\zeta| - |-h(\xi) + s_\zeta|}{s_\zeta} \right], \quad (5)$$

где коэффициент $D = \frac{\sigma_{e,0}}{\sigma_{0,e}}$ – есть отношение временного сопротивления материала в слое неоднородности к временному сопротивлению исходного материала. В задачах об упрочнении поверхностных слоев материала балки, приведенное выше отношение временных сопротивлений будем называть коэффициентом упрочнения. Так как при упрочнении поверхностных слоев материала балки прочностные характеристики при движении от фронта

неоднородности к поверхности балки возрастают, то значение коэффициента упрочнения D всегда больше единицы.

В данной статье, как говорилось выше, рассматривается балка переменной толщины, выполненная из физически нелинейного, неоднородного материала. Поскольку задача нелинейная, то для исследования напряженно-деформированного состояния балки воспользуемся ее дифференциальным уравнением записанным в инкрементальной форме. Запишем дифференциальное уравнение изгиба балки в инкрементальной форме в безразмерном виде

$$J_{k\xi}(u) \frac{d^4 \Delta u}{d\xi^4} + 2 \frac{dJ_{k\xi}(u)}{d\xi} \frac{d^3 \Delta u}{d\xi^3} + \frac{d^2 J_{k\xi}(u)}{d\xi^2} \frac{d^2 \Delta u}{d\xi^2} = \Delta p(\xi), \quad (6)$$

где: $\Delta u(\xi)$ – приращение прогиба балки в безразмерном виде, $\Delta p(\xi)$ – приращение поперечной нагрузки в безразмерном виде, $J_{k\xi}(u)$ – переменная по длине балки жесткость в безразмерном виде.

Для решения задач, связанных как с упрочнением, так и с деградацией прочностных характеристик поверхностных слоев материала балки, в первую очередь, необходимо внедрить полученные функции вида (2), (3), (4), (5) в инкрементальное дифференциальное уравнение изгиба балки (6). Введение функции неоднородности в уравнение (6) независимо от вида решаемой задачи, упрочнение или деградация, осуществляется с использованием теории малых упругопластических деформаций А.А. Ильюшина следующим образом

$$\Delta D_{\sigma}^{\xi} = \frac{2}{3} E_{k\xi}^* \Delta D_{\varepsilon}^{\xi} \quad (7)$$

где: ΔD_{σ}^{ξ} – приращение тензора-девиатора напряжений в безразмерном виде, $\Delta D_{\varepsilon}^{\xi}$ – приращение тензора-девиатора деформаций, $E_{k\xi}^*$ – касательный модуль неоднородного материала в безразмерном виде. Выражение, определяющее касательный модуль материала неоднородного слоя в безразмерном виде, записывается следующим образом

$$E_{k\xi}^* = E_{k\xi} \delta(\zeta) \quad (8)$$

где $E_{k\xi}$ – касательный модуль основного материала в безразмерном виде. Поскольку при решении задач в качестве основного материала используется материал с нелинейной диаграммой деформирования, то, соответственно, диаграммы деформирования материала в неоднородном слое тоже являются нелинейными.

Переменная по длине балки жесткость в безразмерном виде при двусторонней неоднородности по толщине и при условии, что толщина балки является переменной по ее длине, в соответствии с рис. 1, записывается следующим образом

$$J_{k\xi}(u) = 12 \int_{-h(\xi)}^0 E_{k\xi}^* \left(\zeta + \frac{h(\xi)}{2} \right)^2 b(\zeta) d\zeta \quad (9)$$

Переменная по длине балки жесткость в безразмерном виде при односторонней неоднородности по толщине, в соответствии с рис. 2, записывается в следующем виде

$$J_{k\xi}(u) = 12 \int_{-h(\xi)}^0 E_{k\xi}^* (\zeta + Z_c)^2 b(\zeta) d\zeta \quad (10)$$

где $b(\zeta)$ – ширина балки в безразмерном виде.

При решении задач с односторонней неоднородностью (рис. 2) с использованием формул (3), (5) и (10) необходимо, предварительно, определить положение центра тяжести в каждом сечении по длине балки переменной толщины. Положение центра тяжести в каждом сечении по длине балки находится из условия, что суммарная осевая сила, действующая в поперечном сечении, равна нулю, в результате чего необходимо, чтобы выполнялось следующее условие

$$\int_{-h(\xi)}^{-h(\xi)+s_\zeta} E_{k\xi} \delta(\zeta) b(\zeta) (\zeta + Z_c) d\zeta + \int_{-h(\xi)+s_\zeta}^0 E_{k\xi} b(\zeta) (\zeta + Z_c) d\zeta = 0 \quad (11)$$

Для решения задач изгиба балки при двусторонней деградации необходимо решить инкрементальное дифференциальное уравнение вида (6) с функцией деградации вида (2) и с переменной по длине жесткостью вида (9), аналогичным образом решается задача при двустороннем упрочнении только в качестве функции упрочнения используется экспоненциальная зависимость вида (4). Однако для решения задач с односторонней деградацией, требуется определить еще положение центра тяжести сечения, поэтому вместе с дифференциальным уравнением (6), переменной жесткостью (10) и функцией деградации (3) необходимо выполнение условия (11), по тому же алгоритму решается задача с односторонним упрочнением только вместо функции (3) используется экспоненциальная зависимость вида (5).

При исследовании напряженно-деформированного состояния балки, при различных вариантах упрочнения или деградации материала поверхностных слоев, для решения инкрементального уравнения изгиба балки (6), использовался метод конечных разностей с разбиением балки по длине на 128 отрезков [4, 5]. Для описания экспериментальных данных нелинейных диаграмм деформирования использовались кубические сплайн-функции [6]. Для получения численных результатов по определенным интегралам вида (9), (10) и (11) использовался метод парабол (метод Симпсона) с разбиением балки по толщине на 64 части. Использование нелинейного дифференциального уравнения изгиба балки в инкрементальной форме (6) обосновано тем, что для повышения точности результатов применялся двухшаговый метод последовательного возмущения параметров с разбиением поперечной нагрузки на 5 частей [7, 8].

Рассмотрим балку из нелинейно-деформируемого, неоднородного материала переменной толщины (1), жестко защемленную с левой стороны и шарнирно опертую с правой стороны. На балку действует равномерно распределенная поперечная нагрузка. В первом случае балка не упрочняется и исследуется ее напряженно-деформированное состояние при двусторонней и односторонней деградации поверхностных слоев материала. В первом варианте (рис. 3а) балка с двусторонней деградацией материала, функция деградации – полином вида (2). Во втором варианте (рис. 3б) балка с односторонней деградацией материала, функция деградации – полином вида (3). Для обоих вариантов безразмерная глубина слоя с деградирующими прочностными характеристиками принимается равной $s_\zeta = 0.25$, а параметр $n = 2$. Ниже на рис. 3а,б приводятся эпюры распределения напряжений в балке переменной толщины при двусторонней и односторонней деградации материала по

толщине. Приведенные на эпюрах обозначения кривых соответствуют величине коэффициента деградации K .

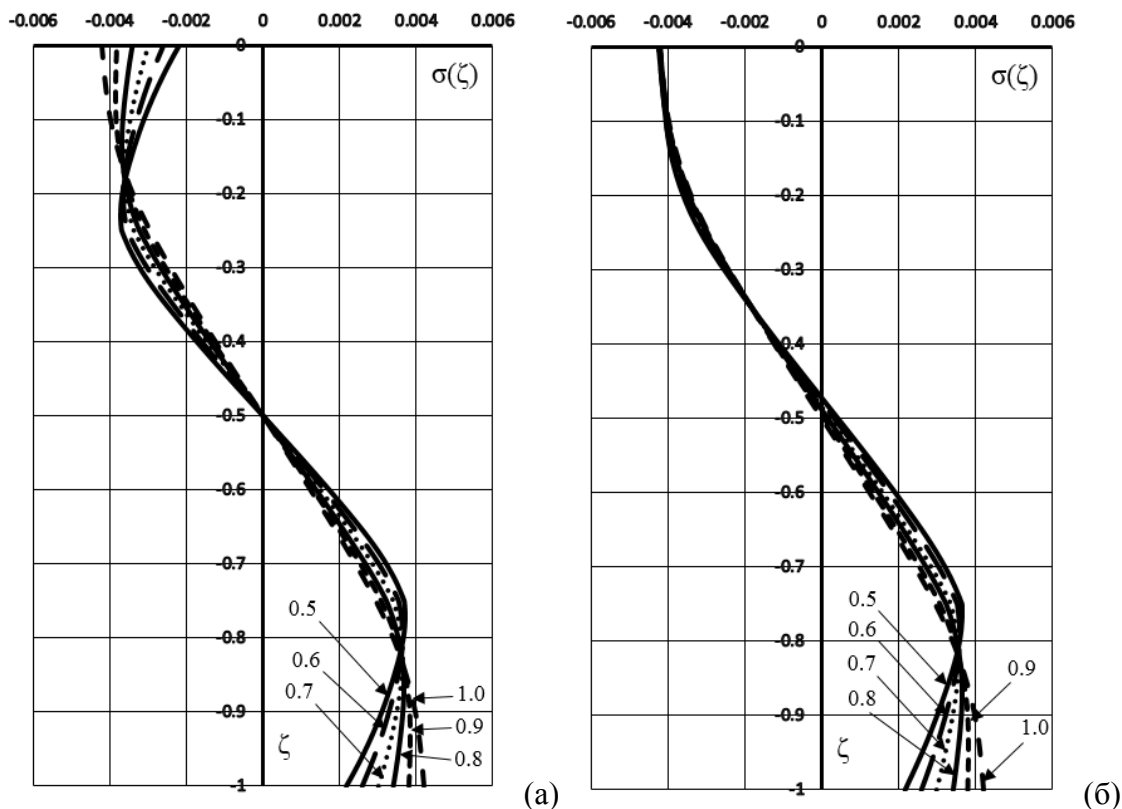


Рисунок 3. Эпюры напряжений в балке при двусторонней (а) и односторонней (б) деградации поверхностных слоев (составлено/разработано авторами)

По результатам представленным на рис. 3а,б видно, что в обоих случаях, как при двусторонней, так и при односторонней деградации поверхностных слоев материала балки, в области основного материала балки, преимущественно вблизи границы фронта неоднородности, происходит плавное, но значительное увеличение напряжений, причем максимальное увеличение приходится именно на границу фронта неоднородности. Для оценки изменения напряжений на границе фронта неоднородности приведем в процентном соотношении, разницу, показывающую насколько увеличиваются напряжения в основном материале балки при деградации ее поверхностных слоев, относительно $K=1$ (балка в исходном состоянии). Увеличение напряжений на границе фронта неоднородности в характерном сечении балки составит: при двусторонней деградации – $K = 0.5 - 25,35\%$, $K = 0.6 - 20,27\%$, $K = 0.7 - 14,98\%$, $K = 0.8 - 9,68\%$, $K = 0.9 - 4,65\%$, при односторонней деградации – $K = 0.5 - 23,77\%$, $K = 0.6 - 19,11\%$, $K = 0.7 - 14,22\%$, $K = 0.8 - 9,31\%$, $K = 0.9 - 4,54\%$. Также, при анализе эпюр изображенных на рис. 3а,б видно, что на поверхности балки в результате деградации прочностных свойств материала балки происходит уменьшение напряжений. Для оценки изменения напряжений на поверхности балки запишем в процентном соотношении, разницу, показывающую насколько уменьшаются напряжения на поверхности неоднородного слоя балки, относительно $K=1$ (балка в исходном состоянии). Уменьшение напряжений на поверхности балки в характерном сечении составит: при двусторонней деградации – $K = 0.5 - 48,14\%$, $K = 0.6 - 38,31\%$, $K = 0.7 - 28,61\%$, $K = 0.8 - 18,89\%$, $K = 0.9 - 9,38\%$, при односторонней деградации – $K = 0.5 - 48,52\%$, $K = 0.6 - 38,65\%$, $K = 0.7 - 28,77\%$, $K = 0.8 - 19,03\%$, $K = 0.9 - 9,46\%$.

Ниже на рис. 4 проиллюстрирован график зависимости максимальных напряжений на поверхности балки от коэффициента деградации K . На графике приведены следующие обозначения: 1ц, 1о – кривые зависимости максимальных напряжений от коэффициента деградации при односторонней неоднородности, соответственно, в центральном и опорном сечениях балки, 2ц – при двусторонней неоднородности в центральном сечении, 2о – при двусторонней неоднородности в опорном сечении (заделка).

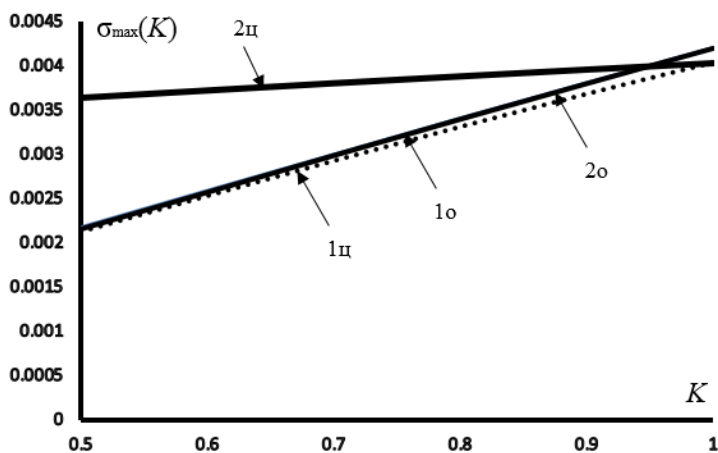


Рисунок 4. График зависимости $\sigma_{\max}(K)$ на поверхности балки (составлено/разработано авторами)

На рис. 5 изображен график зависимости напряжений от коэффициента деградации K на границе фронта неоднородности балки. На графике приведены следующие обозначения: 1ц, 1о – кривые зависимости напряжений от коэффициента деградации при односторонней неоднородности, соответственно, в центральном и опорном сечениях балки, 2ц, 2о – кривые зависимости напряжений от коэффициента деградации при двусторонней неоднородности, соответственно, в центральном и опорном сечениях балки.

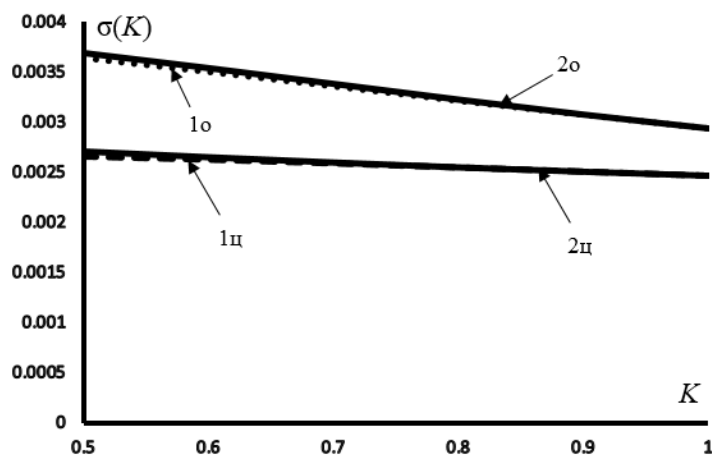


Рисунок 5. График зависимости $\sigma(K)$ на границе фронта неоднородности (составлено/разработано авторами)

При анализе графиков проиллюстрированных на рис. 4, 5 видно, что для балки переменной толщины, зависимость напряжений от коэффициента деградации, как на поверхности балки, так и на границе фронта неоднородности, имеет слабо выраженную нелинейную зависимость и при практическом применении может быть принята как линейная.

Во втором случае поверхностные слои балки упрочняются и исследуется ее напряженно-деформированное состояние при двустороннем и одностороннем упрочнении поверхностных слоев [9, 10]. В первом варианте (рис. 6а) балка с двусторонним упрочнением, функция упрочнения – экспонента вида (4). Во втором варианте (рис. 6б) балка с односторонним упрочнением, функция упрочнения – экспонента вида (5). Для обоих вариантов упрочнения безразмерная глубина неоднородного слоя принимается равной $s_\zeta = 0.25$, а параметр $n = 2$. Ниже на рис. 6а,б приводятся эпюры распределения напряжений в балке переменной толщины при двустороннем и одностороннем упрочнении поверхностных слоев материала по толщине. Обозначения кривых, приведенные на эпюрах, соответствуют величине коэффициента упрочнения D .

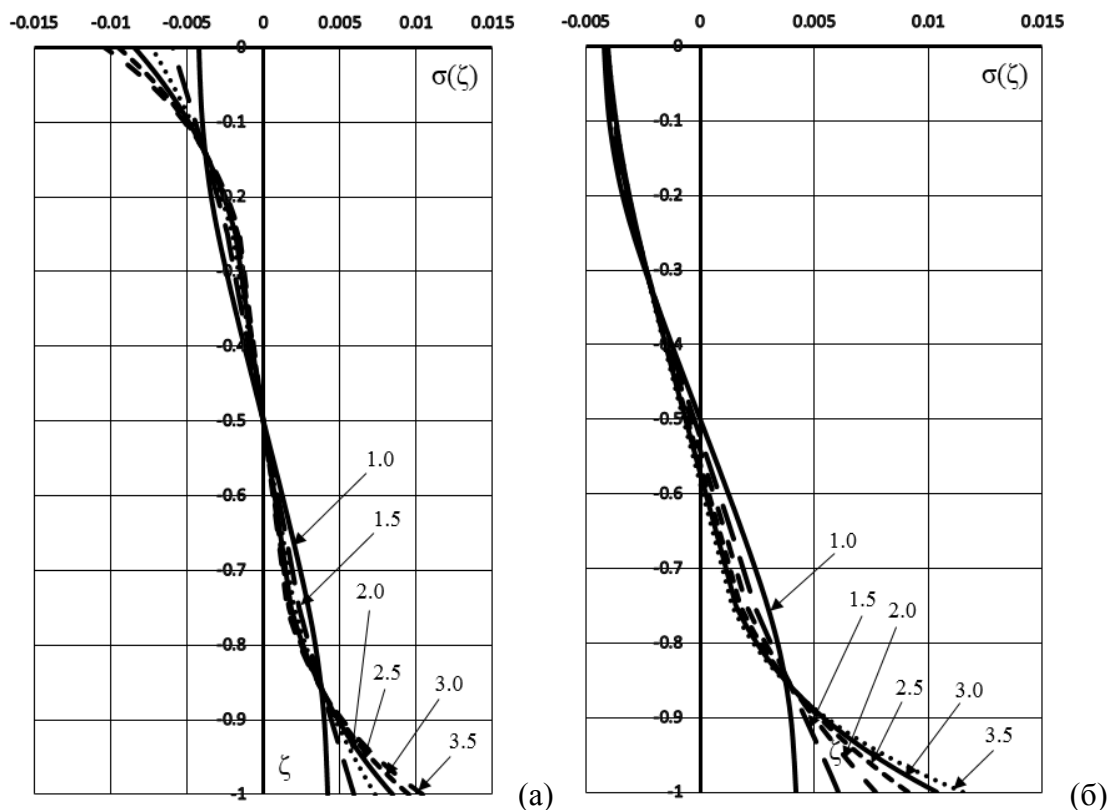


Рисунок 6. Эпюры напряжений в балке при двустороннем (а) и одностороннем (б) упрочнении поверхностных слоев (составлено/разработано авторами)

При анализе результатов проиллюстрированных на рис. 6а,б видно, что при двустороннем и одностороннем упрочнении поверхностных слоев балки в области основного материала балки, происходит уменьшение напряжений. При этом максимальное уменьшение напряжений сконцентрировано в области границы фронта неоднородности. Таким образом, для оценки изменения напряжений приведем, в процентном соотношении, разницу, показывающую насколько снижаются напряжения в основном материале балки при упрочнении ее поверхностных слоев, относительно $D=1$ (балка в исходном состоянии). Снижение напряжений на границе фронта неоднородности в характерном сечении балки составит: при двустороннем упрочнении – $D = 1.5 - 20,15\%$, $D = 2.0 - 31,03\%$, $D = 2.5 - 38,08\%$, $D = 3.0 - 43,13\%$, $D = 3.5 - 46,97\%$, при одностороннем упрочнении – $D = 1.5 - 18,63\%$, $D = 2.0 - 30,94\%$, $D = 2.5 - 39,92\%$, $D = 3.0 - 46,86\%$, $D = 3.5 - 52,47\%$. Также анализ эпюр проиллюстрированных на рис. 6а,б показывает, что при упрочнении поверхностных слоев балки в крайних волокнах материала происходит значительное увеличение напряжений. Для оценки изменения напряжений на поверхности балки запишем,

в процентном соотношении, разницу, показывающую насколько возрастают напряжения в крайних волокнах материала балки, относительно $D=1$ (балка в исходном состоянии). Увеличение напряжений на поверхности балки в характерном сечении составит: при двустороннем упрочнении – $D=1.5-41,66\%$, $D=2.0-74,39\%$, $D=2.5-102,21\%$, $D=3.0-126,69\%$, $D=3.5-149,02\%$, при одностороннем упрочнении – $D=1.5-44,86\%$, $D=2.0-83,67\%$, $D=2.5-117,32\%$, $D=3.0-147,30\%$, $D=3.5-174,03\%$.

На рис. 7 представлен график зависимости максимальных напряжений на поверхности балки от коэффициента упрочнения D . На графике приведены следующие обозначения: 1ц, 1о – кривые зависимости максимальных напряжений от коэффициента упрочнения при одностороннем упрочнении в центральном и опорном сечениях балки, 2ц, 2о – кривые зависимости максимальных напряжений от коэффициента упрочнения при двустороннем упрочнении в центральном и опорном сечениях балки переменной толщины.

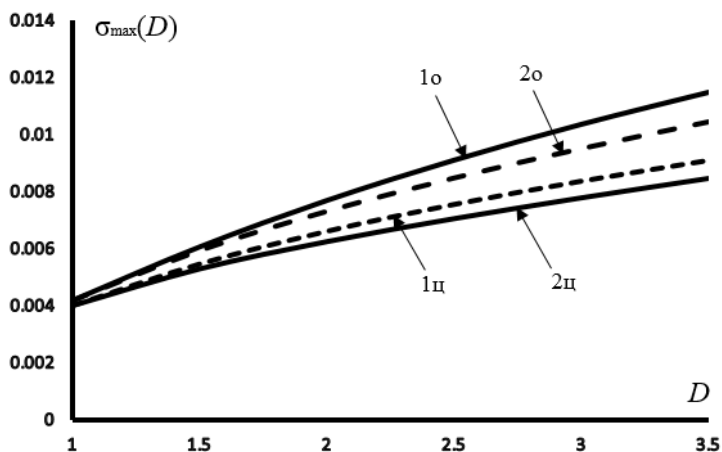


Рисунок 7. График зависимости $\sigma_{\max}(D)$ на поверхности балки (составлено/разработано авторами)

На рис. 8 изображен график зависимости напряжений от коэффициента упрочнения D , непосредственно, на границе фронта неоднородности балки. На графике приведены следующие обозначения: 1ц, 1о – кривые зависимости напряжений от коэффициента упрочнения при одностороннем упрочнении в центральном и опорном сечениях балки, 2ц, 2о – кривые зависимости напряжений от коэффициента упрочнения при двустороннем упрочнении в центральном и опорном сечениях балки.

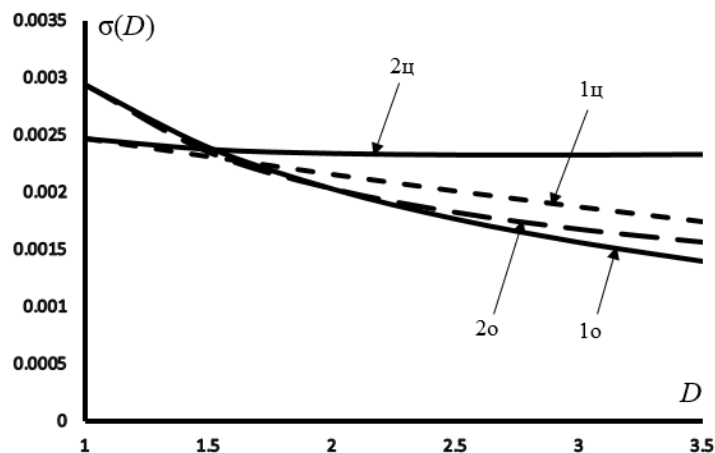


Рисунок 8. График зависимости $\sigma(D)$ на границе фронта неоднородности (составлено/разработано авторами)

Из графиков приведенных на рис. 7, 8 видно, что при упрочнении поверхностных слоев балки переменной толщины кривые зависимости напряжений от коэффициента упрочнения, как на поверхности балки так и на границе фронта неоднородности, имеют ярко выраженную нелинейную зависимость.

Таким образом, из анализа полученных результатов видно, что вне зависимости от того каким является неоднородный слой по толщине балки, с улучшенными прочностными характеристиками или же с деградирующими прочностными характеристиками, в обоих вариантах самым важным аспектом является то, что при наличии неоднородности конструкция адаптируется к ней. Данное обстоятельство, связанное с адаптацией конструкции, объясняется тем, что для малого объема, приведенная задача, остается статически неопределимой, в результате чего по толщине балки происходит перераспределение напряжений, причем следующим образом, там, где прочностные свойства материала низкие – напряжения уменьшаются и в обратном порядке, там, где прочностные свойства материала выше – напряжения увеличиваются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров, В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика. – М.: Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.
2. Кривошеин, И.В. Долговечность гибких физически нелинейных пологих оболочек и пластинок: монография / И.В. Кривошеин. – Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2016. – 267 с.
3. Колчин, Г.Б. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов. – Кишинев: Картя Молдовеняскэ, 1971. – 157 с.
4. Кривошеин, И.В. О сходимости метода конечных разностей при расчете физически нелинейных балок / И.В. Кривошеин // Совершенствование методов расчета строительных конструкций и технологии строительства: сб. науч. тр. – Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2013. – 28-37 с.
5. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев – 13-е изд., исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.
6. Альберг, Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Альберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. – М.: Мир, 1972. – 136 с.
7. Петров, В.В. Методы расчета балок и пластинок из нелинейно-деформируемого материала: учеб. пособие / В.В. Петров, И.В. Кривошеин. – Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2007. – 148 с.
8. Кривошеин, И.В. Инкрементальные методы расчета гибких физически нелинейных пологих оболочек и пластинок: монография / И.В. Кривошеин. – Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2015. – 256 с.
9. Мищенко, Р.В. Расчет неоднородных балок // Техническое регулирование в транспортном строительстве. – 2016. – № 6(20); URL: trts.esrae.ru/39-213.
10. Мищенко, Р.В. Расчет физически нелинейных балок с двусторонней технологической неоднородностью // Научно-практический журнал «Аспирант». – 2016. – №10. с. 38-43.

Mishchenko Roman Viktorovich

Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov
E-mail: roman_radon4@mail.ru

Pimenov Dmitriy Alekseevich

Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov
E-mail: scorpions91@inbox.ru

Calculation of non-homogeneous beams of variable thickness

Abstract. In this paper, we investigate the effect of the inhomogeneity of the properties of a beam material of variable thickness on its stressed-deformed state. The authors considered the problems of bending a beam of variable thickness from a nonlinearly deformable material under the action of a transverse load with various variations of its inhomogeneity in terms of its thickness: layers of heterogeneity with degrading strength characteristics-modeling of the aggressive external environment, layers of heterogeneity with improved strength characteristics-modeling of technological hardening. For each variant of the inhomogeneity, various variations are given: two-sided and one-sided inhomogeneity in thickness, and for one-sided inhomogeneity, the problem of tracing the line of the center of gravity in each section of a beam of variable thickness is solved. At each stage of the calculation, both in the case of degradation and in the case of hardening of surface layers, an assessment was made of the qualitative change in the stress diagrams along the thickness of the beam in characteristic sections at different ratios of the temporal resistance of the material in the inhomogeneous layer to the time resistance of the initial material. The analysis of changes in stresses at the beam surface and at the boundary of the inhomogeneity front for the reference and central cross sections of the beam is presented and corresponding graphical results are presented.

Keywords: front of heterogeneity; degradation function; hardening function; variable thickness; physical nonlinearity; incremental equation; spline functions; transverse load; induced inhomogeneity