Щуцкий Сергей Викторович
Shchutskiy Sergey Viktorovich
Ростовский государственный строительный университет
Rostov State University of Civil Engineering
Доцент/Associate Professor
05.23.01 Строительные конструкции, здания и сооружения
E-Mail: Svpiке1@rambler.ru

Применение разрывных функций при расчете пространственнных покрытий

Application of discontinuous functions in space coatings calculating

Аннотация: Представлена методика расчета многогранных пространственных покрытий образованных из плоских панелей. Приведены дифференциальные уравнения равновесия и деформаций оболочек с разрывными параметрами. Выполнено сравнение результатов расчета оболочки, определенных по предложенной методике и при помощи МКЭ.

The Abstract: A method of calculation of multidimensional space of coatings formed from flat panels is described. Differential equations of equilibrium and deformations of shells with discontinuous parameters are given. The comparison of the calculation results envelope defined by the proposed method and by FEM is done. Ill. 2, bibl. 2.

Ключевые слова: Покрытие, расчет, напряжение, деформация, панель.

Keywords: Coverage, Calculation. Stress, Strain, Panel.

***

Одним из типов пространственных покрытий являются покрытия, имеющие форму выпуклых многогранников, образованных из плоских клеефанерных панелей на реберном каркасе. Отдельные панели подобных покрытия соединяются друг с другом посредством стыковых элементов, зачастую обладающих значительно меньшей жесткостью, чем сами панели, поэтому расчетная схема покрытия представляет собой набор жестких пластин, соединенных податливыми связями [1]. Именно за счет этой податливости будет, в основном, происходить деформирование многогранного покрытия, и при этом в стыковых соединениях возникает достаточно сложное напряженно-деформированное состояние.

При численном расчете упомянутых выше сооружения с помощью МКЭ ребристые панели могут быть представлены в виде пластин с приведенными толщинами, а их стыковое соединение возможно моделировать путем введения в конечноэлементную модель конструкции упруго-податливых связей между отдельными панелями. В реальных задачах такой связью могут служить вставки в виде тонких упругих пластинчатых элементов типа листовых шарниров. Однако, в таком случае, только изгибные деформации вводимых в расчет пластинок будут достоверными, в то время как в действительности стыковое соединение испытывает сложное напряженное состояние. Отмеченный факт может сказываться на точности полученных результатов. В связи с этим, выполнен аналитический расчет одного из возможных типов многогранных покрытий для сравнения полученных результатов с данными конечноэлементного расчета и произведена качественная оценка достоверности последних.

В настоящей работе используется модификация методики расчета многогранных пространственных покрытий, разработанной Б.К. Михайловым [3] для расчета пластин и оболочек с разрывными параметрами, которая дает возможность учесть разрывы функций усилий и моментов в весьма малой области нарушения регулярности внутренней геометрии или области приложения сосредоточенной или полосовой нагрузки (в нашем случае это изломы поверхности оболочки).

В случае поверхности с изломами кривизны представляются в виде:

$$1/R_1^* = k_1^* = k_1 + \sum_{i=1}^{m} \Theta_i \cdot \delta(\alpha_1 - \alpha_{1i});$$
$$1/R_2^* = k_2^* = k_2 + \sum_{j=1}^{n} \Theta_j \cdot \delta(\alpha_2 - \alpha_{2j}), \qquad (1)$$

где k_1, k_2 – кривизны поверхности в промежутках между изломами,

Θ_i, Θ_j – углы поворотов касательной плоскости при переходе через линии переломов,

α_1, α_2, α_{1i}, α_{2j} – координатные линии и линии изломов показанные на рис. 1,

m, n – количество изломов в направлении координатных линий,

$\delta(\alpha_1\text{-}\alpha_2)$ – дельта-функция Дирака,

$\int\delta(x) = H(x)$ – единичная функция Хевисайда, принимающая следующие значения: $H(x) = 1$, при $x \geq 0$;

$H(x) = 0$, при $x < 0$.

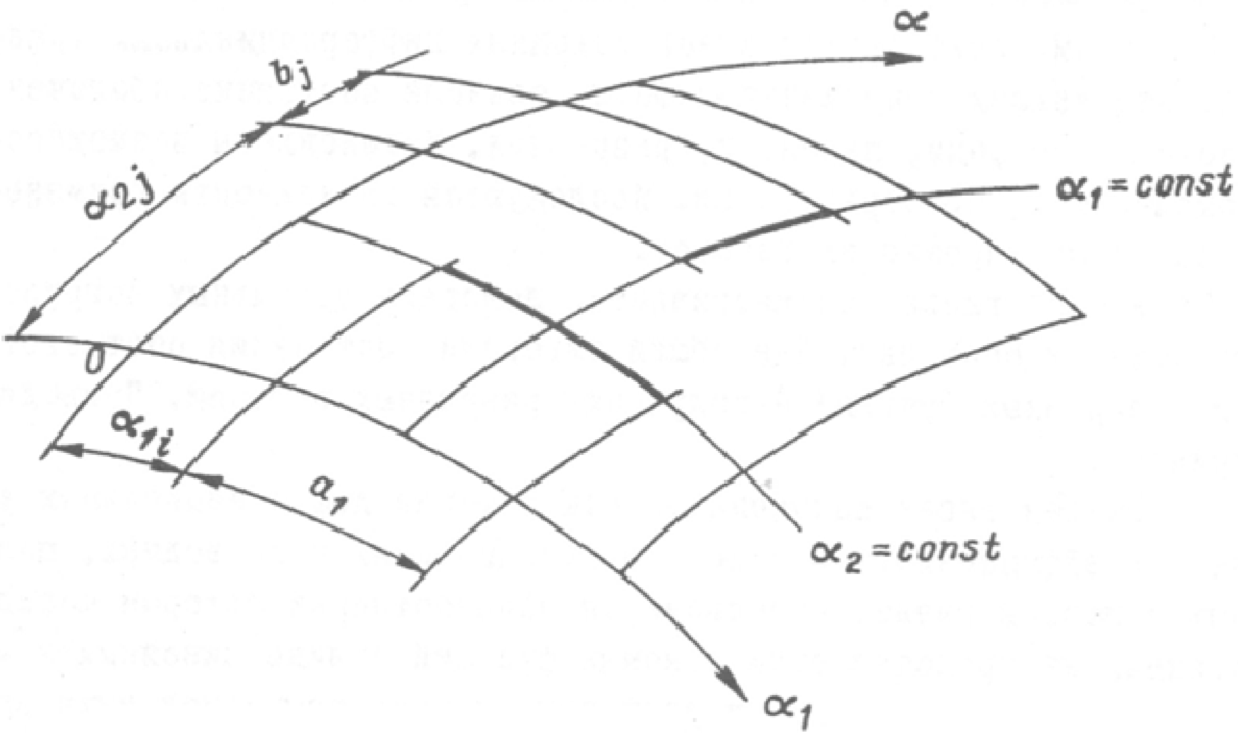

Рис. 1. *Координатные линии и линии изломов оболочки*

Дифференциальные уравнения равновесия и деформаций оболочек с разрывными параметрами позволяют по характеру входящих в них коэффициентов дать по крайней мере качественную оценку распределения усилий и перемещений в зоне разрывов физических и геометрических параметров.

Уравнения равновесия, записанные в усилиях и моментах, представим в виде:

$$\Omega_1^* \cdot T^* + \Phi_1^* \cdot M^* = P \,, \tag{2}$$

причем

$$\mathbf{\Omega}_1^* = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2} + \dfrac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots) & -\dfrac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots) \\ -\dfrac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots) & \dfrac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1} + \dfrac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots) & \dfrac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2} \\ \dfrac{1}{R_1^*} & 0 & \dfrac{1}{R_2^*} \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{\Phi}_1^* = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1^*} \cdot \dfrac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1} & \dfrac{2}{R_1^*} \cdot \dfrac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2} + \dfrac{2}{R_2^*} \cdot \dfrac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots) & -\dfrac{1}{R_{1*}} \dfrac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots) \\ -\dfrac{1}{R_2^*} \dfrac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots) & \dfrac{2}{R_2^*} \cdot \dfrac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1} + \dfrac{2}{R_1^*} \cdot \dfrac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots) & \dfrac{1}{R_2^*} \cdot \dfrac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} ;$$

$$\phi_{31} = -\frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots)\right] ;$$

$$\phi_{32} = -\frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots)\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots)\right)\right] ;$$

$$\phi_{33} = -\frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots)\right] ,$$

где A_1, A_2 – параметры Ламе; символ (…) означает, что при воздействии оператора на некоторую функцию эта функция должна занять место указанного символа;

T^*, M^* и P – векторы усилий, моментов и нагрузки в оболочке соответственно

$$\mathbf{T}^* = \begin{Bmatrix} T_1^* \\ S \\ T_2^* \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M}^* = \begin{Bmatrix} M_1^* \\ H \\ M_2^* \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} A_1 A_2 P_1 \\ A_1 A_2 P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}.$$

Соотношения совместности деформаций также представим в матричной форме:

$$\Omega_2^* \cdot T^* + \Phi_2^* \cdot M^* = 0, \tag{3}$$

где Ω_2^*, Φ_2^*, матричные операторы вида

$$\mathbf{\Omega}_2^* = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{12R_1^*}\left[\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots)+\nu\frac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1}\right] & \frac{h^2}{6}(1+\nu)\left[\frac{1}{R_1^*}\frac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{R_2^*}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots)\right] & -\frac{h^2}{12R_1^*}\left[\frac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1}+\nu\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots)\right] \\ -\frac{h^2}{12R_2^*}\left[\frac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2}+\nu\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots)\right] & \frac{h^2}{6}(1+\nu)\left[\frac{1}{R_2^*}\frac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{R_1^*}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots)\right] & \frac{h^2}{12R_2^*}\left[\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots)+\nu\frac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2}\right] \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{\Phi}_2^* = \begin{bmatrix} -\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots)-\nu\frac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1} & -(1+\nu)\left(\frac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots)\right) & \frac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1}+\nu\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots) \\ \frac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2}+\nu\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots) & -(1+\nu)\left(\frac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots)\right) & -\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots)-\nu\frac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2} \\ \frac{1}{R_2^*}-\frac{\nu}{R_1^*} & 0 & \frac{1}{R_1^*}-\frac{\nu}{R_2^*} \end{bmatrix};$$

$$\phi_{31} = \frac{h^2}{12A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{\nu}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots)-\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots)-\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{\nu}{A_1}\frac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1}\right];$$

$$\phi_{32} = -\frac{h^2(1+\nu)}{12A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots)\right)+\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots)\right)\right];$$

$$\phi_{33} = \frac{h^2}{12A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1}+\nu\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots)\right)+\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots)+\nu\frac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2}\right)\right].$$

Подставив в уравнения (2) и (3) значения кривизн по формулам (1), получаем систему разрешающих уравнений для оболочки с изломами срединной поверхности

$$\Omega_1 \cdot T + \Phi_1 \cdot M = P - K_1' \cdot T + N_1' \cdot M, \tag{4}$$

$$\Omega_2 \cdot T + \Phi_2 \cdot M = - K_2' \cdot T + N_2' \cdot M,$$

здесь Ω_1, Φ_1, Ω_2, Φ_2 – матричные операторы классической теории тонких гладких оболочек; K_1', N_1', K_2', N_2' – матричные операторы с разрывными коэффициентами, определяемые по формулам

$$\mathbf{K}_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \Theta_i \cdot \delta(\alpha_1 - \alpha_{1i}) & 0 & \sum\limits_{j=1}^{n} \Theta_j \cdot \delta(\alpha_2 - \alpha_{2j}) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{N}_1' = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1} \sum\limits_{i=1}^{m} \Theta_i \cdot \delta(\alpha_1 - \alpha_{1i}) & 2\frac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2} \sum\limits_{i=1}^{m} \Theta_i \cdot \delta(\alpha_1 - \alpha_{1i}) + 2\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots) \sum\limits_{j=1}^{n} \Theta_j \cdot \delta(\alpha_2 - \alpha_{2j}) & -\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots) \sum\limits_{i=1}^{m} \Theta_i \cdot \delta(\alpha_1 - \alpha_{1i}) \\ -\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots) \sum\limits_{j=1}^{n} \Theta_j \cdot \delta(\alpha_2 - \alpha_{2j}) & 2\frac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1} \sum\limits_{j=1}^{n} \Theta_j \cdot \delta(\alpha_2 - \alpha_{2j}) + 2\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots) \sum\limits_{i=1}^{m} \Theta_i \cdot \delta(\alpha_1 - \alpha_{1i}) & \frac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2} \sum\limits_{j=1}^{n} \Theta_j \cdot \delta(\alpha_2 - \alpha_{2j}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_2' = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{12} \sum\limits_{i=1}^{m} \Theta_i \cdot \delta_i \left[\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots) + \nu \frac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1} \right] & \frac{h^2}{6}(1+\nu) \left[\sum\limits_{i=1}^{m} \Theta_i \cdot \delta_i \frac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2} + \sum\limits_{j=1}^{n} \Theta_j \cdot \delta_j \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots) \right] & -\frac{h^2}{12} \sum\limits_{i=1}^{m} \Theta_i \cdot \delta_i \left[\frac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1} + \nu \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots) \right] \\ -\frac{h^2}{12} \sum\limits_{j=1}^{n} \Theta_j \cdot \delta_j \left[\frac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2} + \nu \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots) \right] & \frac{h^2}{6}(1+\nu) \left[\sum\limits_{i=1}^{m} \Theta_i \cdot \delta_i \frac{\partial A_2(\ldots)}{\partial \alpha_1} + \sum\limits_{j=1}^{n} \Theta_j \cdot \delta_j \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(\ldots) \right] & \frac{h^2}{12} \sum\limits_{j=1}^{n} \Theta_j \cdot \delta_j \left[\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\ldots) + \nu \frac{\partial A_1(\ldots)}{\partial \alpha_2} \right] \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{N}_2' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \Theta_j \cdot \delta_j - \nu \sum\limits_{i=1}^{m} \Theta_i \cdot \delta_i \right) & 0 & \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \Theta_i \cdot \delta_i - \nu \sum\limits_{j=1}^{n} \Theta_j \cdot \delta_j \right) \end{bmatrix};$$

Поскольку уравнения равновесия и совместности деформаций (4) имеют схожую структуру, то можно уменьшить количество уравнений теории оболочек, вводя некоторую комплексную функцию [3]. В этом случае система уравнений теории оболочек, записанная через комплексную функцию

$$\varphi = \omega + i\frac{n}{E}F\ , \tag{5}$$

где ω - прогиб; F – функция напряжений; n - $\sqrt{12\left(1-\nu^2\right)}\Big/h$;

преобразуется к следующему виду, представленному для краткости записи в тензорной форме [30]

$$\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{A_2}{A_1}\frac{1}{R_{22}}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{A_1}{A_2}\frac{1}{R_{11}}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)\varphi = \\ =\frac{inh^2\Delta\Delta\varphi}{6\left(1-\nu^2\right)}. \tag{6}$$

Уравнение содержит единственное комплексное неизвестное φ, а под Δ подразумевается обобщенный оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{1}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)\right\}.$$

В (6) присутствуют главные кривизны $\frac{1}{R_i^*}$, которые можно представить в виде суммы (1), причем для многогранных оболочек, образованных плоскими элементами, первое слагаемое (1) следует положить равным нулю [2]. Изломы срединной поверхности оболочки характеризуются углами θ_n^*, которые складываются из углов θ_n, обусловленных геометрией покрытия и величины γ_n, представляющих собой угловые деформации стыковых соединений панелей под нагрузкой.

Как отмечалось ранее, развитость панелей в поперечном направлении позволяют предположить, что покрытие будет испытывать только изгибные деформации. Несложно заметить, что (6) является известным уравнением теории пологих оболочек в комплексной записи, однако, с учетом отмеченной особенности конструкции, присутствующие в нем радиусы кривизны должны приниматься в своем обычном виде, без учета пологости покрытия.

Подставив (1) в (6) имеем

$$\Delta^2\varphi + in\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\sum\nolimits_{i=1}^{k}\theta_i\delta\left(x-x_1\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\sum\nolimits_{j=1}^{l}\theta_j\delta\left(y-y_1\right)\right]=\frac{q}{D}. \tag{7}$$

Разложив выражение, описывающее действующую нагрузку, в двойной ряд

$$q=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}q_{ij}\sin(\alpha_i x)\sin(\beta_j y), \tag{8}$$

можно утверждать на основании принципа независимости действия сил, что напряженное состояние от всей нагрузки будет складываться из напряженных состояний, вызванных нагрузками, представленными соответствующими членами ряда (8). Поэтому, не теряя общности рассуждений, будем считать, что нагрузка приложена по закону

$$q = q_{11}\sin(\alpha_1 x)\sin(\beta_1 y).$$

Функцию φ представим также в виде ряда

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}\,\sin(\alpha_i x)\sin(\beta_j y).$$

Считая, что искомая функция φ, как и внешняя нагрузка, представлена одним первым членом ряда, решение уравнения (3.25) запишем в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{k} L'_i \varphi_x(x_i)\psi_{xi}\sin(\beta y) + \sum_{j=1}^{l} L''_i \varphi_y(y_j)\psi_{yj}\sin(\alpha x) \tag{9}$$

где φ_x – первый член в разложении функции φ по координате y;

φ_y – первый член в разложении функции φ по координате x;

φ_0 – решение уравнения:

$$\Delta^2\varphi_0 = \frac{p_{11}}{D}\sin(\alpha_1 x)\sin(\beta_1 y), \quad \text{или } \varphi_0 = \varphi_{11}\sin(\alpha_1 x)\sin(\beta_1 y),$$

$$\varphi_{11} = \frac{p_{11}}{D\left(\alpha_1^2 + \beta_1^2\right)};$$

ψ_{xi} – решение уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \beta^2\right)\psi_{xi} = \delta(x - x_i),\ \text{имеющее вид}$$

$$\psi_{xi} = C_1 ch(\beta x) + C_2 sh(\beta x) + C_3 x ch(\beta x) + C_4 x sh(\beta x) +$$
$$+ \frac{1}{2\beta^3}\left[sh(\beta(x - x_i)) - \beta(x - x_i)ch(\beta(x - x_i))\right]H(x - x_i),$$

причем $H(x - x_i)$ - единичная функция Хевисайда, а C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные интегрирования.

Выражение ψ_{yi} записывается аналогичным образом.

Операторы $L_i^{'}$ и $L_i^{''}$ определяются выражениями

$$L_i^{'} = -in\theta_i\beta_2, \qquad L_j^{''} = -in\theta_j\alpha_2.$$

Формула (9) содержит неизвестные коэффициенты $L_i^{'}\varphi_x(x_i)$ и $L_j^{''}\varphi_y(y_j)$, представляющие собой результаты воздействия операторов $L_i^{'}$ на функцию φ_x при $x=x_i$ и операторов $L_j^{''}$ на функцию φ_y при $y=y_i$. Для определения этих коэффициентов воздействуем на левую и правую части равенства (9) последовательно операторами $\int_0^b (\ldots)L'_m \sin(\beta y)dy$. В результате получим систему из следующих уравнений:

$$X_m = b_m - \sum_{i=1}^{k} X_i a_{mi} + \sum_{j=1}^{l} Y_j \bar{a}_{mj}, \qquad m = 1,2,3,\ldots,k, \tag{10}$$

где введены обозначения

$$X_i = L_i^{'}\varphi_x(x_i), \qquad Y_j = L_j^{''}\varphi_y(y_j),$$

$$a_{mi} = \int_0^b L'_m\,\psi_{xi}(x_i)\sin^2(\beta y)dy, \qquad \bar{a}_{mj} = \int_0^b L'_m\,\psi_{yj}(x_i)\sin^2(\beta y)dy,$$

$$b_m = \int_0^b L'_m\,\varphi_0\sin(\beta y)\sin(\alpha x_m)dy.$$

Применяя к левой и правой части равенства (9) последовательно операторы $\int_0^a (\ldots) L''_n \sin(\alpha x) dx$, получаем следующую систему уравнений

$$Y_n = b_n - \sum_{i=1}^{k} X_i \bar{a}_{ni} + \sum_{j=1}^{l} Y_j a_{nj}, \qquad n = 1,2,3,\ldots,l, \tag{11}$$

где $a_{nj} = \int_0^a L''_n \psi_{yi}(y_n) \sin^2(\alpha x) dx$, $\qquad \bar{a}_{ni} = \int_0^a L''_n \psi_{xi}(y_n) \sin^2(\alpha x) dx$,

$$b_n = \int_0^a L''_n \varphi_0 \sin(\beta y_n) \sin(\alpha x) dx.$$

Уравнения (10) и (11) в совокупности образуют полную систему уравнений для определения неизвестных X_i и Y_j, входящих в состав выражения (9).

Рассмотрим оболочку, составленную из девяти элементов (рис. 2), соединенных податливыми связями, размером в плане 1,207x1,207 м. Оболочка имеет шарнирно-подвижное опирание по контуру. Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности покрытия и действует в вертикальном направлении. Составляющие оболочку элементы представляют собой изотропные пластинки с длиной стороны, равной 0,5 м.

Уравнение (7) в этом случае принимает вид

$$\Delta^2\varphi + in\theta\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\delta\left(x - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + \delta\left(x - a - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(\delta\left(y - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + \delta\left(y - a - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right] = \frac{q}{D}. \tag{12}$$

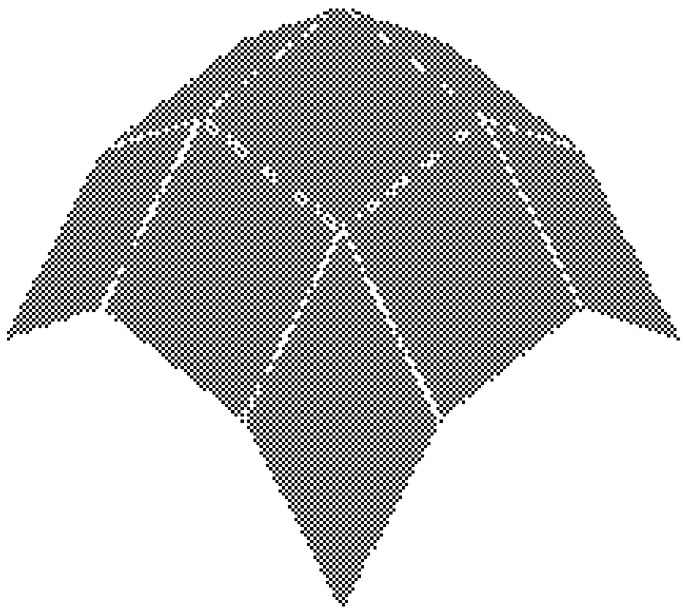

Рис. 2. *Оболочка из плоских панелей с податливыми стыковыми соединениями*

Если нагрузка представлена рядом

$$q = \sum\sum q_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \tag{13}$$

то решение уравнения (12) при удержании в (13) одного первого члена запишется так:

$$\varphi = \varphi_0 - l'_1\,\varphi_x\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\psi_{x1}\sin(\beta y) - l'_2\,\varphi_x\left(a-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\psi_{x2}\sin(\beta y) -$$
$$- l''_1\,\varphi_y\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\psi_{y1}\sin(\alpha x) - l''_2\,\varphi_y\left(a-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\psi_{y2}\sin(\alpha x). \quad (14)$$

При шарнирно-подвижном опирании по контуру постоянные интегрирования, входящие в выражения для функций ψ_{xi} и ψ_{yj}, определяются следующими зависимостями:

$$C_1 = C_4 = 0, \qquad C_3 = \frac{sh(\beta(a-x_i))}{2D\beta^3 sh(\beta a)},$$

$$C_2 = \frac{1}{D\beta^2 sh(\beta a)}\left[\beta(a-x_i)ch(\beta(a-x_i)) - sh(\beta(a-x_i)) - \frac{1}{2}\beta a\, cth(\beta a) sh(\beta(a-x_i))\right].$$

Формулы для постоянных, входящих в функции ψ_{yj}, получим из приведенных выражений заменой $x\to y$, $a\to b$, $x_i\to y_i$, $\alpha\to\beta$.

Отделяя в (14) вещественные и мнимые части и используя известные зависимости теории пластин, получаем следующие формулы для определения усилий и моментов:

$$M_1 = D\left[\omega_x^0{}'' + \mu\omega_y^0{}'' - \frac{A}{1+A^2}\left(\psi''_x + \mu\psi''_y\right)\right] = \gamma_1 c,$$
$$M_2 = D\left[\omega_y^0{}'' + \mu\omega_x^0{}'' - \frac{A}{1+A^2}\left(\psi''_y + \mu\psi''_x\right)\right] = \gamma_2 c, \quad (15)$$

$$T_1 = h\frac{E}{n}\frac{1}{1+A^2}\psi''_y, \quad T_2 = h\frac{E}{n}\frac{1}{1+A^2}\psi''_x, \quad S = -h\frac{E}{n}\frac{1}{1+A^2}\psi''_{xy},$$

где $A = 2n\theta\beta^2\left[\psi_{1y}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sin^2\left(\alpha a(1+\sqrt{2}/2)\right)}{4\alpha^4}\right]$.

Величины углов поворота панелей друг относительно друга γ_n, вызванные податливостью стыковых соединений под нагрузкой, определяются из (15), где c - жесткость стыкового соединения.

Максимальный прогиб оболочки, найденный по предложенной методике, составил 2,004 мм. Прогиб аналогичной конструкции, рассчитанной при помощи МКЭ, получился равным 2,4 мм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев А.А., Вержбовский Г.Б., Еременко Н.Н. Пространственные деревянные конструкции. – Ростов-на-Дону: ОАО ИПФ «Малыш», 2003. – 518 с., илл.

2. Михайленко В.Е., Кащенко А.В. Природа. Геометрия. Архитектура. – Киев: Будівельник, 1981. – 76 с.

3. Михайлов Б.К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами./Под ред. В. А. Лебедева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. - 196 с.