УДК 539.376, 539.214,517.97

Бормотин Константин Сергеевич
ФГБОУ ВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
Россия, Комсомольск-на-Амуре[1]
Кандидат физико-математических наук, доцент
E-Mail: cvmi@knastu.ru

Численное моделирование задачи формообразования с контактными условиями в режиме пластичности и ползучести

Аннотация: В связи с внедрением новых технологических процессов, режимов, материалов при изготовлении деталей сложно-конструктивных форм с высокими требованиями к размерной точности и эксплуатационному ресурсу наиболее выгодным становится применение численного моделирования. Ещё недавно установление основных соотношений математических моделей требовало накопления и анализа огромных массивов экспериментальных и натурных производственных данных, что сопряжено со значительными материальными и временными затратами. В то же время современное машиностроение характеризуется всё более возрастающей частотой сменяемости объектов производства, а также усложнением конструктивных форм и увеличением габаритных размеров деталей конструкций. Таким образом, эффективным решением является применение численного моделирования при получении оценок эксплуатационных и технологических характеристик разрабатываемого изделия.

В данной работе приводится обобщенная вариационная формулировка квазистатической задачи пластического формообразования деталей с учетом деформаций ползучести. Решение данных задач выполняется последовательными приближениями методом конечных элементов в системе MSC.Marc. Для рассматриваемой формулировки справедливы теоремы единственности, устойчивости и сходимости итеративного метода, доказанные для обратных задач формообразования теории ползучести. Приводятся численные результаты задач формообразования в условиях пластичности. С помощью программных средств системы MSC.Marc вводятся модели пластичности и ползучести с учетом упрочнения. Анализируется влияние контактных условий на решения задачи формообразования детали.

Ключевые слова: Обратные задачи формообразования; вариационные неравенства; пластичность; ползучесть; итеративные методы; условия сходимости; контактные условия; метод конечных элементов.

Идентификационный номер статьи в журнале 105TVN114

[1] Россия, 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, проспект Ленина, 27

Konstantin Bormotin
Komsomolsk-na-Amure State Technical University
Russia, Komsomolsk-on-Amur
E-Mail: cvmi@knastu.ru

Numerical modeling of a problem forming with contact conditions in a plasticity and creep mode

Abstract: In connection with introduction of new technological processes, modes, materials at details manufacturing of is difficult-constructive forms with high requirements to dimensional accuracy and an operational resource application of numerical modeling becomes the most favorable. Still recently the establishment of the basic parities of mathematical models demanded accumulation and the analysis of huge files of experimental and natural industrial data that is interfaced to considerable material and time expenses. At the same time the modern mechanical engineering is characterized by more and more increasing frequency of removability of objects of manufacture, and also complication of constructive forms and increase in overall dimensions of details of designs. Thus, the effective decision is application of numerical modeling at reception of estimations operational and technical characteristics on a developed product.

In the given work the generalized variation formulation quasi-static problems plastic forming details taking into account creep deformations is resulted. The decision of the given problems is carried out consecutive approximations by a method of finite elements in system MSC.Marc. For the considered formulation theorems of uniqueness, stability and the convergence of an iterative method proved for inverse problems forming to the theory of creep are true. Numerical results of problems forming in the conditions of plasticity are resulted. By means of system MSC.Marc software models of plasticity and creep taking into account hardening are entered. Influence of contact conditions on problem decisions forming details is analyzed.

Keywords: Inverse problems forming; variation inequalities; plasticity; creep; iterative methods; convergence conditions; contact conditions; a method of finite elements.

Identification number of article 105TVN114

1. Формулировка и итерационные методы решения обратных задач неупругого формообразования

Обратная задача формообразования определяет внешние силовых кинематические воздействия, под действием которых происходить неупругое деформирование, обеспечивающее заданную остаточную конфигурацию после упругой разгрузки [1]. Для разработки и исследования итерационного метода решения в данной работе будут рассматриваться задачи кинематического формообразования.

Пусть $V \subset R^3$ - ограниченная область с достаточно регулярной границей *S*. Обозначим через $u = (u_1, u_2, u_3)$, $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ - вектора текущих и остаточных перемещений, $u, \tilde{u} \in [W_2^1(Q)]^3$, $Q = V \times \{0 \le t \le T\}$.

С целью обобщения постановок задач и применения численных методов, в работе строятся и используются в численном решении функционалы обратных экстремальных задачах формообразования с учетом прямых постановок квазистатических задач неупругого деформирования и упругой разгрузки. Уравнения, выраженные через приращения перемещений (скорости перемещений) при такой формулировке задач формообразования, позволяют учитывать в решении достаточно общий класс геометрически и физически нелинейных задач механики деформируемого твердого тела [2]. В этом случае удобно использовать функционалы вариационного принципа Хилла [3], описывающие задачи квазистатического деформирования, в предположении выполнения кинематических граничных условий $\dot{u}_i = \dot{u}_i^*$ на границе S, условий на остаточные скорости перемещений $\dot{\tilde{u}}_i = \dot{\tilde{u}}_i^*$ на границе S, соотношений между деформациями и перемещениями, соотношениями между напряжениями и деформациями.

Таким образом, обратную задачу формообразования можно сформулировать в виде вариационного принципа с функционалом [4,5,6]

$$J(\dot{u}, \dot{\tilde{u}}) = \int_V W(\dot{\varepsilon}_{ij}) dV + \int_V W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}) dV, \qquad (1)$$

где $W(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl} - c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl}^n$, $W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - c_{ijkl} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl}^n$ - потенциалы деформирования [2], c_{ijkl} - компоненты тензора упругих констант, $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}$ - компоненты скоростей текущих и остаточных деформаций, $\dot{\varepsilon}_{kl}^n$ - компоненты скоростей неупругих деформаций, $i, j, k, l = 1, 2, 3$,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}), \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{u}}_{i,j} + \dot{\tilde{u}}_{j,i}), \qquad (2)$$

$\dot{u}_i$, $\dot{\tilde{u}}_i$ - скорости текущих и остаточных перемещений; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3, а через запятую обозначено дифференцирование: $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

В зависимости от постановки задачи формообразования в качестве неупругих деформаций могут быть приняты:

1. пластические деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}^{n} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$, где $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$, $\lambda > 0$ - функция требующая определения, $\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij}$ - вектор в пространстве компонент девиатора тензора напряжений, направленный по нормали к поверхности текучести, уравнение $f = 0$ определяет поверхность в пространстве компонент девиатора тензора напряжений [2, 7];

2. деформации ползучести $\dot{\varepsilon}_{ij}^{n} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{c} = \eta_{ij}$, где, в частности, закон установившейся ползучести может иметь вид $\eta_{kl} = \gamma s_{kl}$, $\gamma = \dfrac{3}{2} B \bar{\sigma}^{n-1}$, s_{kl} - компоненты девиатора тензора напряжений, $\bar{\sigma} = \sqrt{3/2\, s_{ij} s_{ij}}$ - эффективное напряжение (интенсивность напряжений), B, n - константы ползучести [2,7];

3. сумма деформаций пластичности и ползучести $\dot{\varepsilon}_{ij}^{n} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} + \eta_{ij}$.

Аналогично можно представить вариационную формулировку обратных геометрически нелинейных задач, в частности, в общей Лагранжевой формулировке, в которой учитывается деформирование в условиях малых деформаций, но больших перемещений и поворотов [5].

Достаточными условиями единственности [2,3] решения задач деформирования и разгрузки с введенными потенциалами будут

$$\int_V \Delta\left(\frac{\partial W(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}\right)\Delta\dot{\varepsilon}_{ij} dV > 0,\ \int_V \Delta\left(\frac{\partial W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij})}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}}\right)\Delta\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} dV > 0,$$

для всех пар непрерывно дифференцируемых полей скоростей перемещений (учитываются соотношения (2)), принимающих заданные значения на границе. Здесь Δ означает разность соответствующих величин в любых двух различных формах деформации. Достаточные условия единственности краевых задач обеспечивают выпуклость функционалов вариационных принципов [3], что позволяет доказать сходимость итеративного метода и единственность решения обратной задачи формообразования.

Пусть символ $(\cdot,\cdot)_S$ означает скалярное произведение в $L_2(S)$: $(u,v)_{|S} = \int_S \sum_{i=1}^{3} u_i v_i dS$. Соответствующая этому скалярному произведению норма имеет вид $\| u \|_S = \sqrt{(u,u)_{|S}} = \left(\int_S \sum_{i=1}^{3} u_i^2 dS\right)^{1/2}$. Кроме того, обозначим $a(\dot{u},\dot{v}) = \int_V \dfrac{\partial W(\dot{u}_{i,j})}{\partial \dot{u}_{i,j}} \dot{v}_{i,j} dV$ и $a(\dot{\tilde{u}},\dot{\tilde{v}}) = \int_V \left(\dfrac{\partial W(\dot{\tilde{u}}_{i,j})}{\partial \dot{\tilde{u}}_{i,j}}\right) \dot{\tilde{v}}_{i,j} dV$.

Учитывая явно условия на остаточные скорости перемещений $\dot{\tilde{u}}_i = \dot{\tilde{u}}_i^*$ на границе S методом штрафа [8] можно построить функционал обратной задачи кинематического формообразования

$$J(\dot{u},\dot{\tilde{u}}) = \frac{1}{\varepsilon_1}\|\dot{u}-\dot{u}^*\|_S^{\,2} + a(u,u) + a(\dot{\tilde{u}},\dot{\tilde{u}}) + \frac{1}{\varepsilon_2}\|\dot{\tilde{u}}-\dot{\tilde{u}}^*\|_S^{\,2}, \qquad (3)$$

$$\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_1 \to 0,\ \varepsilon_2 > 0,\ \varepsilon_2 \to 0.$$

Вследствие выпуклости функционала (3) можно записать вариационное неравенство

$$\frac{1}{\varepsilon_1}(\dot{u}-\dot{u}^*,\dot{v}-\dot{u})_{|S} + a(\dot{u},\dot{v}-\dot{u}) + a(\dot{\tilde{u}},\dot{\tilde{v}}-\dot{\tilde{u}}) + \frac{1}{\varepsilon_2}(\dot{\tilde{u}}-\dot{\tilde{u}}^*,\dot{\tilde{v}}-\dot{\tilde{u}})_{|S} \ge 0 \quad \forall\dot{v},\forall\dot{\tilde{v}}. \qquad (4)$$

Итеративный аналог неравенств (4) имеет вид [4,5]

$$A_1^k(\dot{u}^{k+1}-\dot{u}^k, v-\dot{u}^{k+1})_{|s} + a(\dot{u}^k, v-\dot{u}^{k+1}) +$$

$$+a(\dot{\tilde{u}}^k,\tilde{v}-\dot{\tilde{u}}^*) + A_2^k(\dot{\tilde{u}}^*-\dot{\tilde{u}}^k,\tilde{v}-\dot{\tilde{u}}^*)_{|s} \ge 0,\ \forall\dot{v},\forall\dot{\tilde{v}}, \qquad (5)$$

где $A_1^k > 0$, $A_2^k > 0$, $k = 1,2,\ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} A_1^k = \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} A_2^k = \infty$.

Пусть $\dot{u}^k$, $\dot{\tilde{u}}^k$ - решения задачи неупругого деформирования с заданными на поверхности S граничными условиями и разгрузки. Тогда итеративный процесс (5) решения обратной задачи формообразования может быть представлен в виде

$$\dot{u}_i^{\,k+1} = \dot{u}_i^{\,k} + \alpha^k(\dot{\tilde{u}}_i^{\,*} - \dot{\tilde{u}}_i^{\,k}) \text{ на } S,\ \alpha^k = \frac{A_2^k}{A_1^k}. \qquad (6)$$

Действительно, пусть в (5) $\dot{v}_i = \dot{w}_i + \dot{u}_i^{\,k+1} + \dot{u}_i^{\,k} - \dot{\tilde{u}}_i^{\,k}$, $\dot{\tilde{v}}_i = \dot{\tilde{u}}_i^{\,*} - \dot{w}_i - \dot{u}_i^{\,k} + \dot{\tilde{u}}_i^{\,k}$ $\forall\dot{w}_i$, тогда

$$A_1^k(\dot{u}^{k+1}-\dot{u}^k,\dot{w}-\dot{u}^e)_{|s} + a(\dot{u}^k,\dot{w}-\dot{u}^e) + a(\dot{\tilde{u}}^k,\dot{u}^e-\dot{w}) +$$

$$+A_2^k(\dot{\tilde{u}}^*-\dot{\tilde{u}}^k,\dot{u}^e-\dot{w})_{|s} \ge 0, \qquad (7)$$

где $\dot{u}_i^{\,e} = \dot{\tilde{u}}_i^{\,k} - \dot{u}_i^{\,k}$.

Рассмотрим отдельно сумму второго и третьего слагаемого в (7):

$$a(\dot{u}^k,\dot{w}-\dot{u}^e) - a(\dot{\tilde{u}}^k,\dot{w}-\dot{u}^e) \ge 0.$$

Переходя к потенциальным формам определяющих соотношений последнее выражение можно записать

$$\int_V c_{ijpl}(\dot{\varepsilon}_{pl}^{\,k} - \varepsilon_{pl}^{n\,k})(\dot{w}_i - \dot{u}_i^{\,e})_{,j}dV - \int_V c_{ijpl}(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{pl}^{\,k} - \varepsilon_{pl}^{n\,k})(\dot{w}_i - \dot{u}_i^{\,e})_{,j}dV =$$

$$= \int_V c_{ijpl}(\dot{\varepsilon}_{pl}^{\,k} - \dot{\tilde{\varepsilon}}_{pl}^{\,k})(\dot{w}_i - \dot{u}_i^{\,e})_{,j}dV = -\int_V c_{ijpl}(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{pl}^{\,k} - \dot{\varepsilon}_{pl}^{\,k})(\dot{w}_i - \dot{u}_i^{\,e})_{,j}dV =$$

$$= -\int_V c_{ijpl}(\dot{\tilde{u}}_p^{\,k} - \dot{u}_p^{\,k})_{,l}(\dot{w}_i - \dot{\tilde{u}}_i^{\,k} + \dot{u}_i^{\,k})_{,j}dV = -\int_V c_{ijpl}\dot{u}_{p,l}^e(\dot{w}_i - \dot{u}_i^e)_{,j}dV.$$

Здесь $\dot{u}_i^k$, $\dot{\tilde{u}}_i^k$ - являются решениями задач, т.е. $\dot{u}^k = \arg\min \int_V W(\dot{u}_{i,j})dV$, $\dot{\tilde{u}}^k = \arg\min \int_V W(\dot{\tilde{u}}_{i,j})dV$, то $\dot{u}_i^e$ - решение задачи упругой разгрузки из положения остаточной формы в положение, полученное деформированием в режиме ползучести. Отсюда имеем неравенство

$$\int_V c_{ijpl}\dot{u}_{,l}^e(\dot{w}_i - \dot{u}^e)_{,j}dV = -a(\dot{u}^k, \dot{w} - \dot{u}^e) - a(\dot{\tilde{u}}^k, \dot{u}^e - \dot{w}) \geq 0.$$

Подставляя эти преобразования в (7) найдем

$$(\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{w} - \dot{u}^e)_{|s} - \frac{A_2^k}{A_1^k}(\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k, \dot{w} - \dot{u}^e)_{|s} \geq 0, \forall \dot{w}_i.$$

Данное неравенство определяет операцию проектирования [9], поэтому приходим к итеративному процессу в области S

$$\dot{u}_i^{k+1} = \dot{u}_i^k + \alpha^k(\dot{\tilde{u}}_i^* - \dot{\tilde{u}}_i^k),\ \alpha^k = \frac{A_2^k}{A_1^k},\ i = 1,2,3.$$

Таким образом, итеративный метод решения и доказанные теоремы единственности, устойчивости и сходимости в [4,5,6] будут справедливы в случаях деформирования в условиях пластичности.

2. Численные результаты решения кинематических задач формообразования в системе MSC.Marc

Реализация итеративного метода проводится методом конечных элементов. В программах конечно-элементного анализа, в частности MSC.Marc, используется алгоритм получения устойчивого решения нелинейных квазистатических краевых задач, при котором выполняется условия достаточного критерия единственности (устойчивости) [2].

В работах [4,5,6] представлены решения задач формообразования в режиме ползучести и даны сравнительные графики сходимости с учетом геометрической линейностью и нелинейностью. Здесь представлены графики сходимости решения в результате расчетов задач формообразования в условиях пластичности.

Анализ сходимости численных результатов решения обратных задач формообразования приводится на примере квадратной пластинки толщиной h и с длиной стороны a (рис.1)[10].

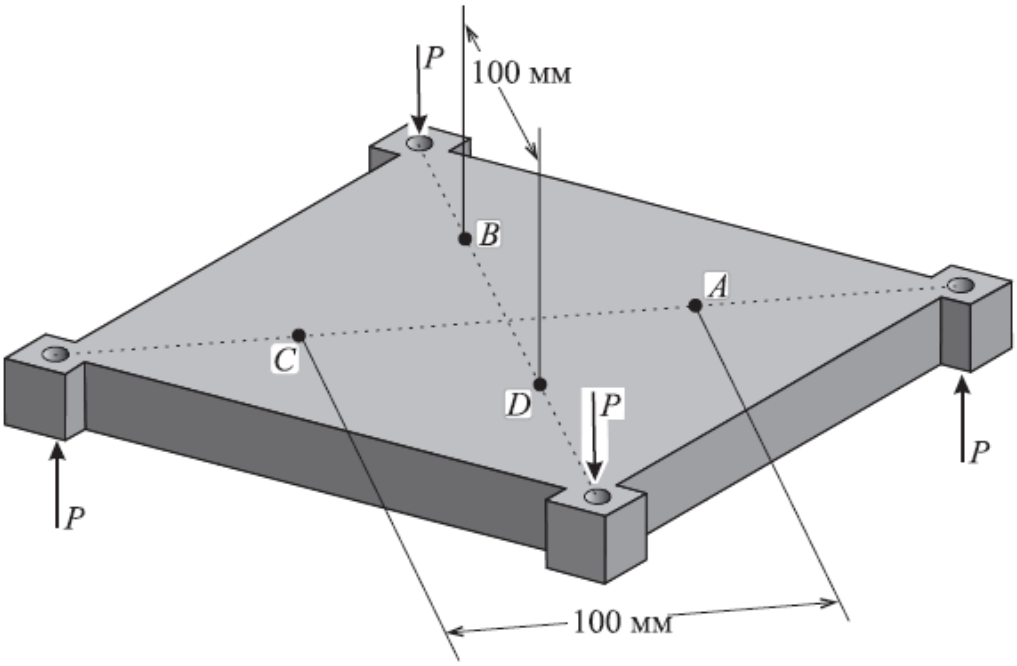

***Рис. 1**. Схема пластинки в задаче о кручении и точки A, B, C, D замера прогиба в расчетах*

Известен прогиб пластинки, моделирующий кручение [10], в виде узловых перемещений по координате, нормальной к поверхности пластинки (рис.2).

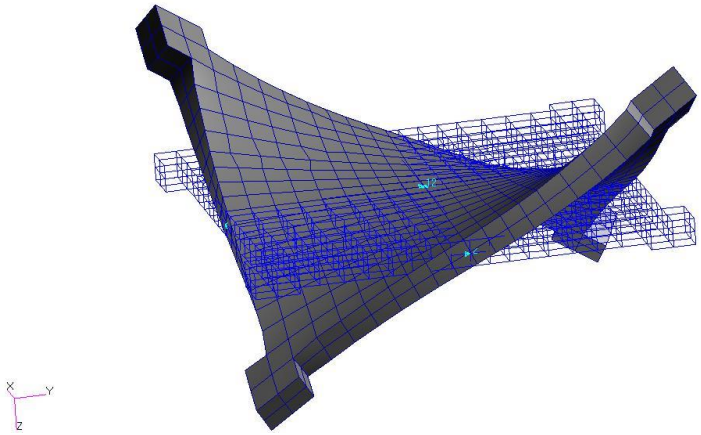

***Рис. 2**. Заданная остаточная форма пластинки и ее плоская модель*

В качестве свойств материал пластинки принимается сплав В95очТ2 при температуре 20°С. В этом случае, характеристики материала будут следующими: модуль Юнга $E = 6027\frac{кг}{мм^2}$, предел текучести $\sigma_T = 43\frac{кг}{мм^2}$, модуль линейного упрочнения $E_T = 282.4\frac{кг}{мм^2}$. Из графиков сходимости с разными постоянными коэффициентами в случае геометрической линейности (рис. 3) и нелинейности (рис. 4) можно также обнаружить совпадение с условиями сходимости.

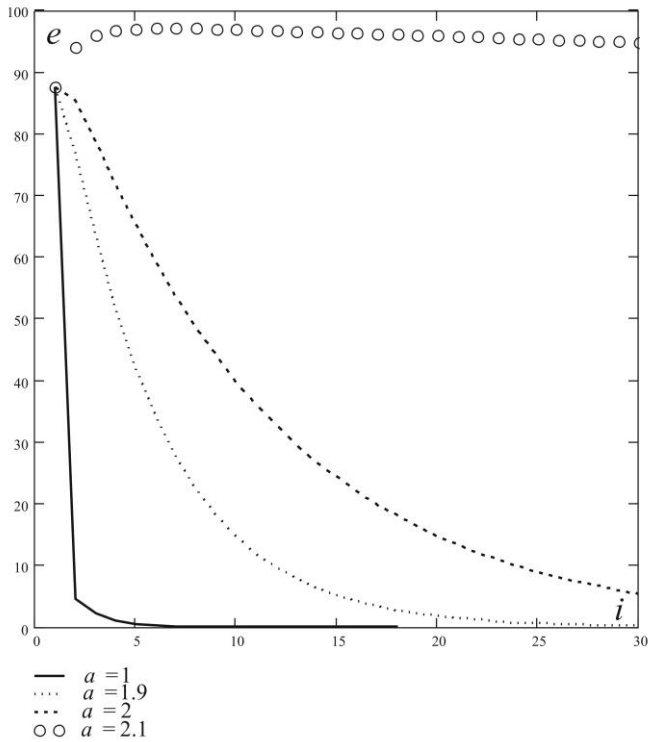

Рис. 3. *График сходимости в случае геометрической линейности с учетом пластических деформаций*

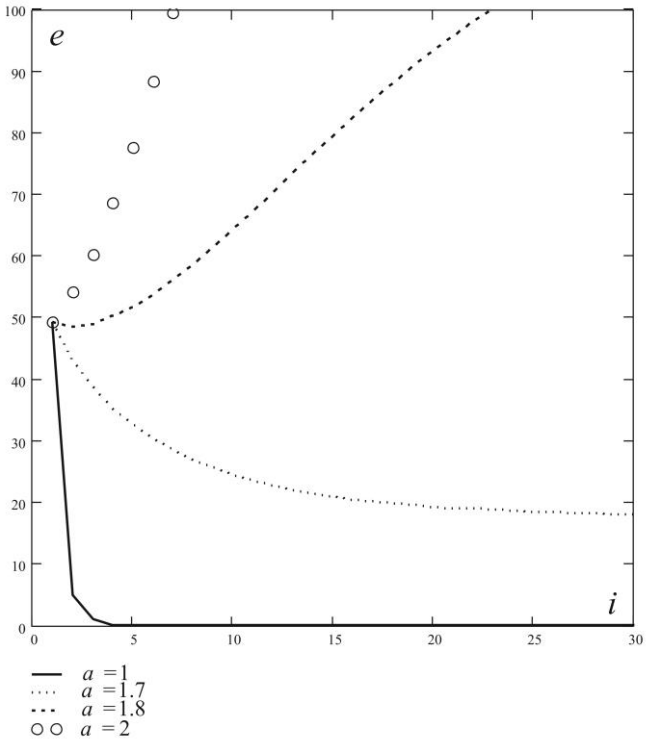

Рис. 4. *График сходимости в случае геометрической нелинейности с учетом пластических деформаций*

В системе MSC.Marc имеется возможность дополнять стандартный набор свойств материалов новыми, используя подпрограммы пользователя. Это позволяет учитывать свойства современных алюминиевых сплавов в решении задач формообразования. Так,

например, из экспериментальных данных одноосного растяжения стержня из материала АК4-1Т следует, что упрочняющийся закон пластичности представляется в виде степенного закона от напряжений (по данным Б.В. Горева) $\varepsilon(\sigma)=\frac{\sigma}{E}+\sigma^n\cdot B$ (E-модуль упругости, B, n - постоянные). Моделирование такого закона возможно с использованием подпрограммы для MSC.Marc [11] wkslp(), в которой по текущей интенсивности пластической деформации $\bar{\varepsilon}^p=\sqrt{\frac{2}{3}\bar{\varepsilon}_{ij}^p\bar{\varepsilon}_{ij}^p}$ определяется наклон упрочнения $\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}=\frac{1}{n}B^{-\frac{1}{n}}(\bar{\varepsilon}^p)^{\frac{1-n}{n}}$ и текущий предел текучести $\bar{\sigma}_T=\left(\frac{\bar{\varepsilon}^p}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$.

По исследованиям одноосного растяжения и сжатия стержня из материала АК4-1Т в ползучести (по данным Б.В. Горева) установлен закон в виде: $\dot{\varepsilon}^c=\frac{B\cdot\sigma^n}{(\varepsilon^c)^\alpha}$ (B, n, α - постоянные). Константы имеют разные значения в зависимости от вида деформирования (растяжения или сжатия). В расчетах в начальный момент из-за нулевых деформаций ползучести возникает неустранимая особенность, которая не позволяет запустить расчет. Единственной возможностью такого моделирования является построение пользовательской подпрограммы для MSC.Marc [11] crplaw(), в которой задаются приращения интенсивности деформаций ползучести $\Delta\bar{\varepsilon}^c=\frac{3}{2}\frac{B_q\cdot\bar{\sigma}^{n_q-1}}{(\bar{\varepsilon}^c)^{\alpha_q}}\Delta t$, значения $q=1,2$ определяются по закону разносопротивляемости, реализованном в [10], Δt - шаг по времени. В этом случае имеется возможность программно исключить данную особенность.

Представленные модели материалов реализованы в MSC.Marc и используются в решении задач формообразования деталей.

3. Численные результаты решения контактных задач формообразования в системе MSC.Marc

Контактная задача формулируется с помощью условий [2]

$$g\equiv(\mathbf{x}^2-\mathbf{x}^1)\cdot\mathbf{n}\geq 0, \tag{8}$$

$$t_n\equiv\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}\leq 0, \tag{9}$$

где $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ - радиус-векторы материальных точек двух контактных тел в текущей конфигурации, $\mathbf{n}$ - единичный вектор нормали к контактной поверхности, $\mathbf{t}$ - вектор распределенных контактных сил, t_n - распределенные контактные нормальные силы. Величина g определяет нормальный зазор. При контакте тел на границе контакта в (8) выполняется равенство, а при расхождении тел – неравенство. Равенство в (9) выполняется в случае выхода тел из контакта, а неравенство – при нахождении в контакте.

Распределенные контактные касательные силы $t_\tau\equiv\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{\tau}$ - вектор, касательный к контактной границе), в случае учета трения, должны удовлетворять закону трения Кулона. В случае идеально гладких соприкасающихся поверхностей - $t_\tau=0$.

Для определения влияния контактных условий на остаточный прогиб в результате формообразования пластинки, проводится решения итеративным методом обратной задачи в режиме ползучести. В расчетах используются характеристики материала АК4-1Т (алюминиевого сплава) пластинки. Материал изотропен и его характеристики упругости одинаковы при растяжении и сжатии и равны следующим значениям: модуль Юнга E = 7000 кг/мм^2, коэффициент Пуассона ν = 0.4. Стадия установившейся ползучести в экспериментах как при сжатии, так и при растяжении, описывается законом Нортона с разными значениями коэффициента B для каждого из этих видов деформирования:

- сжатие: $B_1 = 0.25 \cdot 10^{-14}$(кг/мм^2)$^{-n1}$ (час)$^{-1}$, $n_1 = 8$;
- растяжение: $B_2 = 0.5 \cdot 10^{-14}$(кг/мм^2)$^{-n2}$(час)$^{-1}$, $n_2 = 8$.

По найденной упреждающей форме в решении обратной кинематической задачи формообразования созданы соответствующие контактные жесткие тела - штампы вдоль диагоналей пластинки (рис. 5). Формовка в данных штампах происходит при деформировании данными контактными телами в течение того же времени ползучести, как и заданными перемещениями. В данной задаче приняты условия идеального контакта.

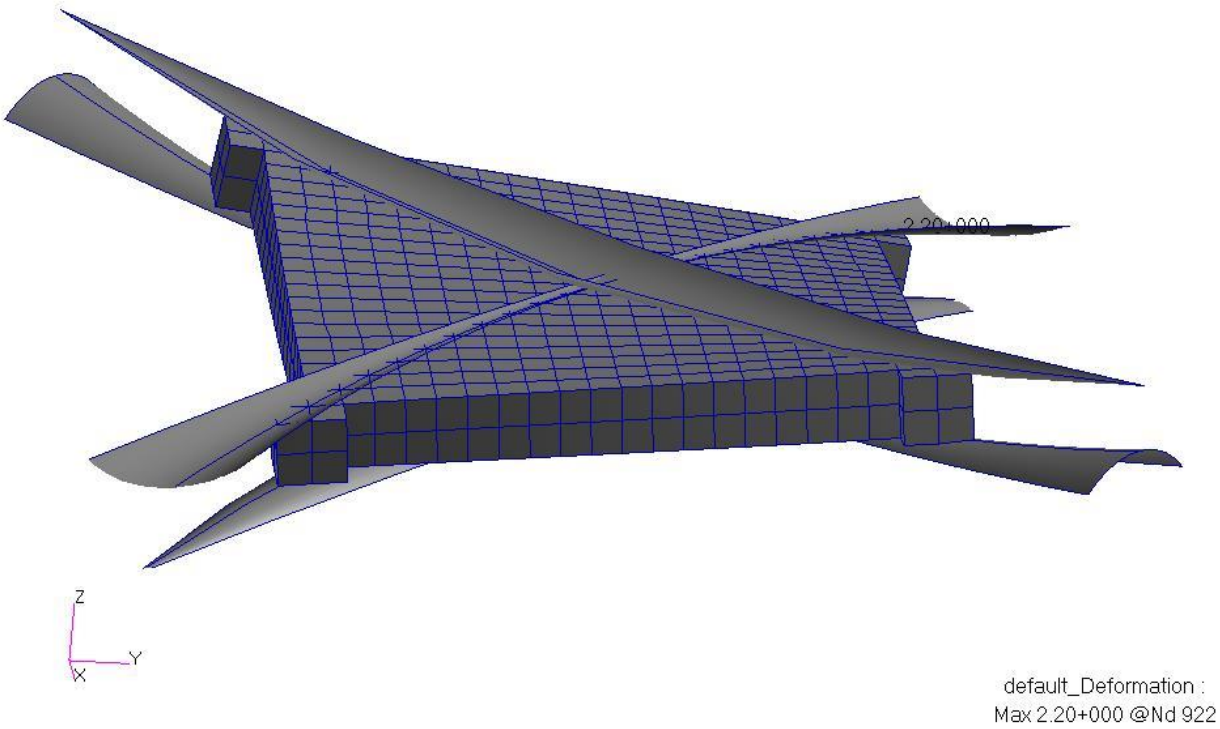

Рис. 5. *Жесткие контактные тела-штампы*

Сравнивая прогибы в точке В (рис.1) при расчетах в кинематической постановке и с помощью контактных тел (табл.1) можно обнаружить расхождение. Это происходит вследствие неравномерности деформирования пластинки в данной контактной задаче: в начале вступают в контакт края пластинки, которые в результате испытывают большие напряжение в сравнении с кинематическими условиями изгиба.

Таблица 1

Прогибы пластинки при кручении заданными перемещениями и штампами

Постановка задачи	Кинематическая постановка	Контактная задача
Прогиб в т. В при t=260 ч, мм	1.625437	1.598217
Остаточный прогиб в т. В, мм	1.403853	1.187423

Из таб.1 следует, что остаточный прогиб, достигнутый после изгиба в жестких штампах, оказывается меньшим в 1.18 раза, поскольку данные штампы по достижению упреждающей формы пластинки теряли контакт с ней в окрестности центра пластинки.

Заключение

Вариационная формулировка квазистатической обратной задачи формообразования позволяет учитывать как пластические деформации, так и деформации ползучести. Приведенные результаты численного решения итеративным методом данных задач в режиме пластичности подтверждают условия сходимости. Контактные условия в задачах формообразования приводят к уменьшению остаточного прогиба, что необходимо учитывать при изготовлении крыльевых панелей с помощью формблоков [12], а также при изготовлении форм днища судна в кораблестроении [13]. Для таких изделий при проектировании необходимо учитывать влияние отклонений от правильных оболочек на собственные изгибные колебания [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Цвелодуб И.Ю. Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1991. – 216 с.
2. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
3. Hill R. On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain // J. Mech. Phys. Solids. 1957. V. 5, N 4. P. 229-241; Русский перевод: Хилл Р. О единственности и устойчивости в теории конечных упругих деформаций // Механика: Сб. переводов. 1958. - №6(52). - С. 53-65.
4. Бормотин К.С. Итеративный метод решения обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т.14. Раздел 1. С. 141-148.
5. Бормотин К.С. Итеративный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2013, Том 53, №12, с. 145-153.
6. Бормотин К.С., Логвина В.С. Метод решения итеративной регуляризацией обратных задач формообразования деталей // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т.15. Раздел 1. С. 77-84.
7. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. М.: «Наука», 1988.
8. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: МИР, 1972.
9. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Издательство «Факториал Пресс», 2002. -824с.
10. Коробейников С.Н., Олейников А.И., Горев Б.В., Бормотин К.С. Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычислительные методы и программирование. 2008. - Т.9. - С. 346-365.
11. Marc Vol. D: User Subroutines and Special Routines. MSC.Software Corporation, 2008.
12. Annin B. D., Oleinikov A. I., Bormotin K.S. Modeling of forming of wing panels of the SSJ-100 aircraft // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2010, V.51, Issue 4, pp 579-589.
13. Taranukha N.A., Chizhiumov S.D. Numerical Simulation of the Fall of a Body with a Corrugated Bottom on Water. // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. -2001, Vol. 42, No. 4, pp. 659-664.
14. Taranukha N.A., Leizerovich G.S. Effect of Initial Imperfections on the Flexual Eigenvibrations of Cylindrical Shells. // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. - 2001, Vol. 42, No. 2, pp. 345-351.

Рецензент: Тарануха Николай Алексеевич, заведующий кафедрой Кораблестроение, профессор, д.т.н., ФГБОУ ВПО "Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет".

REFERENCES

1. Tsvelogub I. Yu. A stability postulate and its applications in the theory of creep for metallic materials (Hydrodynamics Inst., Novosibirsk, 1991) [in Russian].
2. Korobeinikov S. N. Nonlinear deformation of solids (Izd. Ross. Akad. Nauk, Novosibirsk, 2000) [in Russian].
3. Hill R. “On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain,” J. Mech. Phys. Solids 5 (4), 229–241 (1957).
4. Bormotin K. S. An Iterative method for the solution of inverse forming problems under creep conditions. // Vychisl. Metody Programm. 14, 141–148 (2013).
5. Bormotin K. S. Iterative method for solving geometrically nonlinear inverse problems of structural element shaping. // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 53 (12), 2091–2099 (2013) [Comput. Math. Math. Phys. 53 (12),1908–1915 (2013)].
6. Bormotin K.S., Logvina V.S. A method of iterative regularization for solving inverse problems of forming structural components // Vychisl. Metody Programm. 15, 77–84 (2014).
7. Rabotnov Ju.N. Mehanika deformiruemogo tverdogo tela. M.: «Nauka», 1988.
8. Lions J.-L. Quelques M´ethodes de R´esolution des Probl`emes aux Limites non Lin´eaires (Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1969; Mir, Moscow, 1972).
9. Vasil’ev F. P. Methods of Optimization (Factorial Press, Moscow, 2002) [in Russian].
10. Korobeynikov S. N., Oleinikov A. I., Gorev B. V., and Bormotin K. S. Mathematical Simulation of Creep Processes in Metal Patterns Made of Materials with Different Extension–Compression Properties. // Vychisl. Metody Programm. 9, 346–365 (2008).
11. Marc Vol. D: User Subroutines and Special Routines. MSC.Software Corporation, 2008.
12. Annin B. D., Oleinikov A. I., Bormotin K.S. Modeling of forming of wing panels of the SSJ-100 aircraft // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2010, V.51, Issue 4, pp 579-589.
13. Taranukha N.A., Chizhiumov S.D. Numerical Simulation of the Fall of a Body with a Corrugated Bottom on Water. // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. -2001, Vol. 42, No. 4, pp. 659-664.
14. Taranukha N.A., Leizerovich G.S. Effect of Initial Imperfections on the Flexual Eigenvibrations of Cylindrical Shells. // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. - 2001, Vol. 42, No. 2, pp. 345-351.