Интернет-журнал «Науковедение» ISSN 2223-5167 http://naukovedenie.ru/

Том 9, №2 (2017) http://naukovedenie.ru/vol9-2.php

URL статьи: http://naukovedenie.ru/PDF/105TVN217.pdf

Статья опубликована 26.04.2017

Ссылка для цитирования этой статьи:
Овчинников И.И., Овчинников И.Г., Ильченко Е.Д., Михалдыкин Е.С. Моделирование поведения пластинчатых конструкций из армированного бетона с неметаллической арматурой // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 9, №2 (2017) http://naukovedenie.ru/PDF/105TVN217.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 624.042

Овчинников Илья Игоревич
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Россия, Саратов[1]
ФГБОУ ВПО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)»
Филиал в г. Сочи, Россия, Сочи
Кандидат технических наук, доцент
E-mail: bridgeart@mail.ru

Овчинников Игорь Георгиевич
ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства», Россия, Пенза
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Россия, Саратов
ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Россия, Пермь
Доктор технических наук, профессор
E-mail: bridgesar@mail.ru

Ильченко Екатерина Дмитриевна
ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Россия, Саратов
Аспирант
E-mail: pr.serenity@mail.ru

Михалдыкин Евгений Сергеевич
«НИИграфит» предприятие Госкорпорации «Росатом», Россия, Москва
Отдел строительных проектов
Главный инженер по строительству
E-mail: emihaldikin@niigrafit.org

Моделирование поведения пластинчатых конструкций из армированного бетона с неметаллической арматурой

Аннотация. Отмечаются достоинства и недостатки применения неметаллической арматуры их полимерного композиционного материала, некорректность применения методики предельных состояний к расчету конструкций, армированных неметаллической арматурой. Указывается, что в последнее время разработан ряд нормативных документов по применению неметаллической арматуры в бетонных конструкциях, однако они опираются на минимальную экспериментальную базу. Сформулированы физические соотношения для бетона с учетом нелинейности его деформирования, разносопротивляемости, влияния температуры, а также для неметаллической арматуры с использованием гипотезы о ее линейно упругом деформировании. С использованием гипотезы прямых нормалей и деформационной модели бетона получены

[1] 410054, Саратов, Политехническая 77

нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие изгиб прямоугольной пластины, армированной арматурой из полимерного композиционного материала. При выводе уравнений учтено наличие упругого основания по модели Власова - Леонтьева.

Ключевые слова: полимерные композиционные материалы; неметаллическая арматура; армобетон; армированные пластины; моделирование; нелинейность; разносопротивляемость; упругое основание

Введение

Железобетонные плиты являются одним из основных конструктивных элементов транспортных сооружений: плиты проезжей части мостов, плиты жестких дорожных одежд, плиты аэродромных покрытий. В процессе эксплуатации эти конструкции подвергаются совместному воздействию различных факторов: нагрузки, температуры, агрессивной эксплуатационной среды. Воздействие агрессивной внешней среды (карбонизация, действие сульфатов, хлоридов) приводит деградации бетона и коррозии арматуры. Анализ натурных и лабораторных экспериментальных данных по влиянию агрессивных сред на поведение железобетонных конструкций приведен в работах [1-5]. В работах [6, 7] рассмотрены результаты экспериментальных исследований, в которых исследовалась кинетика коррозионного повреждения железобетонных конструкций при наличии силовых трещин в бетоне.

Для повышения долговечности железобетона используют различные способы: применяют первичную и вторичную защиту [8-10], покрывают металлическую арматуру специальными покрытиями, используют вместо металлической неметаллическую арматуру из полимерного композиционного материала [11-14].

К достоинствам арматуры из полимерного композиционного материала относятся: меньший вес по сравнению с металлической арматурой и при этом большая прочность; высокое сопротивление воздействию агрессивных сред; большая по сравнению с металлической арматурой долговечность; малая теплопроводность; электрическая и магнитная инертность (за исключением арматуры из углепластика).

Однако арматура из полимерных композиционных материалов обладает и рядом недостатков: более низкий по сравнению с металлической арматурой модуль упругости; слабое сопротивление деформациям сжатия; недостаточная огнестойкость конструкций с арматурой из полимерных композиционных материалов; непригодность неметаллической арматуры для изготовления гнутых изделий на строительной площадке; более высокая стоимость по сравнению с металлической арматурой, а точнее то обстоятельство, что экономический эффект применения неметаллической арматуры проявляется только с течением времени после достаточно длительной эксплуатации.

К недостаткам неметаллической арматуры следует отнести также весьма малое количество корректно поставленных экспериментов по исследованию поведения конструкций, армированных неметаллической арматурой, недостаточную однородность механических свойств неметаллической арматуры, отсутствие систематизированных экспериментальных исследований прочности и особенно долговечности таких конструкций, отсутствие корректных методик расчета прочности и долговечности конструкций с арматурой из полимерного композиционного материала.

Следует заметить, что большая деформативность неметаллической арматуры затрудняет изготовление ряда конструкций тех же форм и размеров, что и при использовании

металлической арматуры, а предельная нагрузка изгибаемых конструкций с неметаллической арматурой оказывается ниже.

До недавних пор отечественная нормативная база по применению неметаллической композитной арматуры практически отсутствовала, за исключением [15], в то же время за рубежом было разработано значительное количество документов [16-28]. В последнее время ситуация стала меняться, появились нормативные документы [29-36].

Мы не будем здесь анализировать вышеприведенные нормативные документы, так как это не является целью настоящей статьи, однако заметим, что, как справедливо отмечается в работе [37], российские нормативные документы опираются на минимальную экспериментальную базу.

Так как у арматуры из полимерного композиционного материала низкий модуль упругости, то армобетонная конструкция может разрушиться по бетону при небольших напряжениях в арматуре, то есть высокие прочностные характеристики неметаллической арматуры практически не реализуются. Кроме того, так как внедрением неметаллической арматуры в практику армирования бетонных конструкций занимаются преимущественно специалисты по проектированию и расчету железобетонных конструкций, то они пытаются перенести методику расчета железобетонных конструкций, основанную на применении методологии предельных состояний и на задачи расчета бетонных конструкций, армированных неметаллической арматурой с совсем иными механическими и теплофизическими свойствами.

Постановка задачи

В настоящей работе ставится задача построения с использованием деформационной теории математической модели деформирования пластинчатых бетонных конструкций, армированных неметаллической арматурой.

Экспериментальные исследования бетонных конструкций, армированных неметаллической арматурой описаны в работах [38-40]. Особый интерес представляют работы [37, 41], в которых приведены результаты испытаний бетонных конструкций, армированных неметаллической арматурой и работающих на упругом основании: дорожных плит, плит под цепные приводы и станки-качалки на нефтепромыслах. К сожалению, испытания этих плит проводились не на упругом основании, а на специальном стенде, на котором имитировалась работа на изгиб армобетонных плит, опертых по двум противоположным краям и свободных по двум другим противоположным краям, то есть близко к условиям цилиндрического изгиба. Однако результаты и таких испытаний представляют огромный интерес, так как их можно использовать для идентификации и верификации моделей деформирования армобетонных плит, работающих в условиях изгиба.

Обобщенную модель деформирования пластинчатой бетонной конструкции, армированной неметаллической арматурой будем представлять в виде совокупности моделей: модели конструктивного элемента; модели нагружения конструктивного элемента; модели воздействия температуры; модели деформирования материалов пластины (бетона, арматуры).

Построение модели деформирования бетонной плиты, армированной неметаллической арматурой

Модель деформирования армобетона будем представлять в виде совокупности моделей деформирования материалов, его составляющих, то есть модели деформирования бетона

(который считается нелинейным, разносопротивляющимся деформациям растяжения и сжатия) и арматуры из полимерного композиционного материала, которая деформируется упруго.

Модель деформирования бетона армированной плиты с учетом воздействия температуры

Армированный неметаллической арматурой бетон можно считать направленно армированным конструктивно ортотропным материалом, неодинаково сопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия, в котором бетон и арматура имеют отличающиеся коэффициенты линейного расширения. Так как диаграммы деформирования бетона при растяжении и сжатии отличаются, то для описания поведения направленно-армированного материала плиты применим составную модель ортотропного нелинейного разномодульного армированного материала. Материал армированной плиты находится в условиях плоского напряженного состояния и потому физические соотношения, описывающие поведение элемента плиты в условиях плоского напряжённого состояния, складываются из физических соотношений для бетона, работающего в условиях плоского напряженного состояния, и физических соотношений для неметаллической арматуры, которая работает в условиях одноосного напряженного состояния для каждого направления армирования.

Физические соотношения для бетона с учетом влияния температуры можно записать в виде:

$$\sigma_x^{б} = \frac{\Psi_j^{б}}{1-\nu_j^{б\,2}}\left[e_x + \nu_j^{б} e_y\right] - \frac{\Psi_j^{б}}{1-\nu_j^{б}}\alpha_j^{T^{б}}\Delta T,$$

$$\sigma_y^{б} = \frac{\Psi_j^{б}}{1-\nu_j^{б\,2}}\left[e_y + \nu_j^{б} e_x\right] - \frac{\Psi_j^{б}}{1-\nu_j^{б}}\alpha_j^{T^{б}}\Delta T, \qquad (1)$$

$$\tau_{xy}^{б} = \frac{\Psi_j^{б}}{2\left(1-\nu_j^{б}\right)}e_{xy}.$$

В этих выражениях e_x, e_y, e_{xy} - компоненты тензора деформаций; σ_x, σ_y, τ_{xy} - компоненты тензора напряжений; $\nu_j^{б}$ - коэффициент поперечной деформации бетона; $\Psi_j(e_u,T)$ - секущий модуль, учитывающий влияние температуры T на диаграмму деформирования бетона, а также вид напряженного состояния (принимается, что $j=1$ для растяжения при $\sigma_0 \geq 0$, и $j=2$ для сжатия при $\sigma_0 < 0$); σ_0 - среднее напряжение; $\alpha_j^{T}(T)$ - коэффициент линейного температурного расширения, зависящий от температуры; ΔT - разница между действующей и некоторой исходной температурой, при которой определялась диаграмма.

Функция Ψ_j имеет вид:

$$\Psi_j\left(e_u, T\right) = \frac{\sigma_u\left(T\right)}{e_u}, \qquad (2)$$

где σ_u и e_u соответственно интенсивности напряжений и деформаций.

В (1) и (2) учитывается, что влияние температуры приводит к изменению диаграммы деформирования и коэффициента поперечной деформации бетона, а также к появлению температурных деформаций. Анализ экспериментальных данных [42] показывает, что при

изменении температуры, происходит изменение характера диаграммы деформирования бетона (рис. 1).

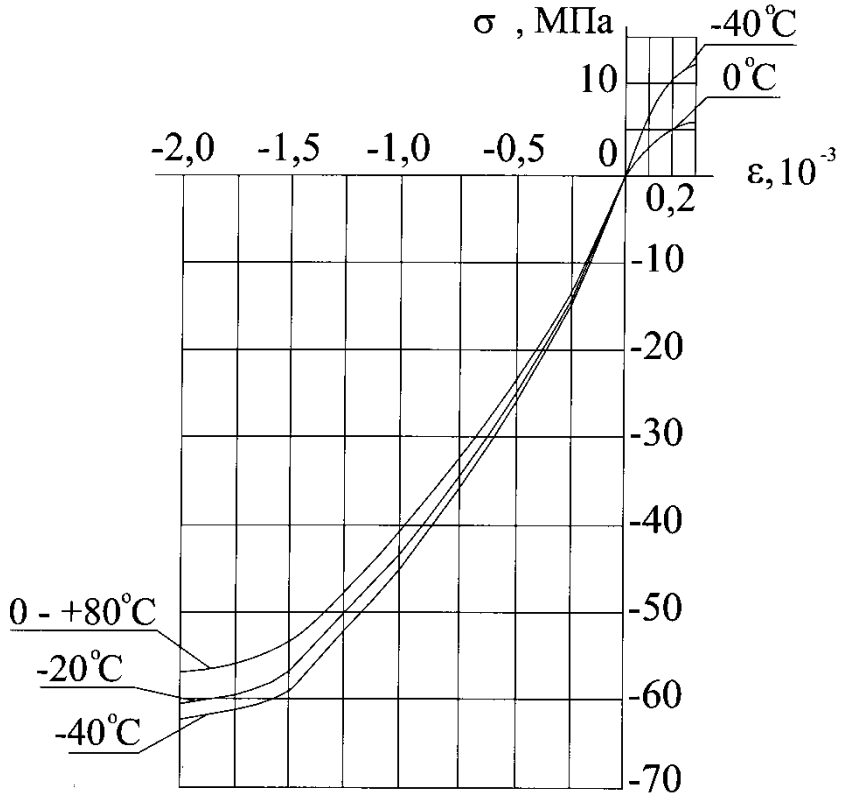

Рисунок 1. *Диаграмма деформирования бетона при разных температурах [42]*

Диаграмма деформирования бетона в общем виде записывается следующим образом:

$$\sigma = \varphi_j(e), \quad j = 1, 2, \text{ причем 1 - при растяжении, 2 - при сжатии.} \tag{3}$$

Зависимость (3) с учетом влияния температуры принимается в виде кубической параболы, хорошо себя зарекомендовавшей при описании моделей деформирования бетона [1 - 4]:

$$\sigma_u = A_j(T)e_u - B_j(T)e_u^3; \quad \begin{cases} j = 1 & \sigma_0 > 0; \\ j = 2 & \sigma_0 < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Значения коэффициентов A_j и B_j определяются из условия наилучшей аппроксимации кривых деформирования образцов бетона при растяжении и сжатии при разных температурах, то есть согласно методу наименьших квадратов из условия минимума функционала:

$$I = \sum_{j=1}^{n} \left(A_j e_j - B_j e_j^3 - \sigma_j^{экс} \right)^2 \to \min. \tag{5}$$

Здесь $\sigma_j^{экс}$ - измеренные значения напряжений, n - количество точек на экспериментальной кривой. Минимизируя функционал (5) по коэффициентам A_j и B_j, получим выражения для их определения:

$$A_j = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j e_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}e_j^6\right)-\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j e_j^3\right)\left(\sum_{j=1}^{n}e_j^4\right)}{\left(\sum_{j=1}^{n}e_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}e_j^6\right)-\left(\sum_{j=1}^{n}e_j^4\right)^2},$$

$$B_j = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j e_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}e_j^4\right)-\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j e_j^3\right)\left(\sum_{j=1}^{n}e_j^2\right)}{\left(\sum_{j=1}^{n}e_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}e_j^6\right)-\left(\sum_{j=1}^{n}e_j^4\right)^2}. \quad (6)$$

При недостаточном количестве; экспериментальных данных значения коэффициентов могут быть определены из условий соответствия модели физическим свойствам диаграммы деформирования и граничным условиям (прохождение модели через характерные точки диаграммы).

Идентификация зависимости (4) выполнялась по экспериментальным данным, приведенным в работах [43, 44], полученные значения коэффициентов приведены в таблице 2, где также указаны границы области применимости модели, определенные из выражения:

$$e_г = \sqrt{\frac{A_j}{3B_j}}. \quad (7)$$

Таблица 2

Значения коэффициентов модели (4) (составлена авторами)

Температура, ºС	Вид нагружения образца	Коэффициенты		Граница области деформирования, $e_г$
		***A*, МПа**	***B*, МПа**	
-40	растяжение	$6{,}4128\cdot10^4$	$2{,}706\cdot10^{11}$	0,000281021
	сжатие	$4{,}981\cdot10^4$	$4{,}761\cdot10^9$	-0,001867451
-20	растяжение	$5{,}7605\cdot10^4$	$2{,}432\cdot10^{11}$	0,000280979
	сжатие	$4{,}8\cdot10^4$	$4{,}588\cdot10^9$	-0,001867468
0	растяжение	$3{,}0898\cdot10^4$	$1{,}3006\cdot10^{11}$	0,000281398
	сжатие	$4{,}528\cdot10^4$	$4{,}328\cdot10^9$	-0,001867451
+20	растяжение	$3{,}0898\cdot10^4$	$1{,}3006\cdot10^{11}$	0,000281398
	сжатие	$4{,}528\cdot10^4$	$4{,}328\cdot10^9$	-0,001867451
+40	растяжение	$3{,}0898\cdot10^4$	$1{,}3006\cdot10^{11}$	0,000281398
	сжатие	$4{,}528\cdot10^4$	$4{,}328\cdot10^9$	-0,001867451
+60	растяжение	$2{,}9707\cdot10^4$	$1{,}256\cdot10^{11}$	0,000280742
	сжатие	$4{,}528\cdot10^4$	$4{,}328\cdot10^9$	-0,001867451
+80	растяжение	$2{,}8440\cdot10^4$	$1{,}202\cdot10^{11}$	0,000280745
	сжатие	$4{,}528\cdot10^4$	$4{,}328\cdot10^9$	-0,001867451

Значения напряжений по зависимости (4) почти на всем интервале аппроксимации отличаются от экспериментальных на величину не более 5%, за исключением начальных участков. Но на этих участках величина напряжений мала сама по себе, и потому даже большую погрешность можно не учитывать.

Модель деформирования неметаллической арматуры

Физические соотношения для неметаллической арматуры, учитывая линейную зависимость напряжений от деформаций, запишем в виде:

$$\sigma_x^a = E^a \cdot e_x^a - E^a \cdot \alpha^{T^a} \Delta T, \quad \sigma_y^a = E^a \cdot e_y^a - E^a \cdot \alpha^{T^a} \Delta T. \qquad (8)$$

где: E^a - модуль упругости материала арматуры, e_x - деформация арматуры для направления x, e_y - деформация арматуры для направления y.

Экспериментальными исследованиями деформирования неметаллической арматуры активно занимаются в НИИЖБ им. А.А. Гвоздева [11, 12].

В таблице 3 приведены механические характеристики трех видов неметаллической арматуры.

Таблица 3

Механические свойства арматуры из полимерного композиционного материала [14]

Характеристика	Углепластиковая арматура	Стеклопластиковая арматура типа СПА	Стеклопластиковая арматура типа АСПЭТ
Модуль упругости, ГПа	200-785	35-51	27
Прочность на растяжение, Мпа	2200-7200	483-1600	510
Удлинение при разрыве, %	0,5-1,7	1,2-3,1	2,5
Плотность, г/см^3	1,5-1,6	1,25-2,1	1,7

В таблице 4 приведены механические характеристики неметаллической композитной арматуры по данным ГОСТа [30].

Таблица 4

Механические свойства арматуры композитной полимерной по [30]

Характеристика	Вид неметаллической арматуры				
	АСК	АБК	АУК	ААК	АКК
Модуль упругости при растяжении, ГПа	50	50	130	70	100
Предел прочности при растяжении, Мпа	800	800	1400	1400	1000
Предел прочности при сжатии, МПа	300	300	300	300	300
Предел прочности при поперечном сдвиге, МПа	150	150	350	190	190

В таблице использованы следующие обозначения арматуры в зависимости от типа непрерывного армирующего наполнителя: АСК - стеклокомпозитная; АБК - базальтокомпозитная; АУК - углекомпозитная; ААК - арамидокомпозитная; АКК - комбинированная композитная.

Коэффициент линейной температурной деформации неметаллической арматуры находится в пределах $\alpha = 0{,}5 - 0{,}9 \cdot 10^{-5}/^{o}C$.

Коэффициент линейной температурной деформации бетона находится в пределах $\alpha = 0{,}7 - 0{,}9 \cdot 10^{-5}/^{o}C$.

Построение модели конструктивного элемента

В качестве модели конструктивного элемента будем рассматривать прямоугольную пластину, каким-либо образом опертую по контуру. При этом полагаем справедливыми следующие гипотезы:

- гипотезу прямых нормалей, согласно которой любой прямолинейный элемент, нормальный к срединной плоскости пластины, остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности после деформирования пластины, и длина его не изменяется;
- гипотезу об отсутствии давления между слоями пластины, параллельными срединной плоскости.

Рассмотрим бесконечно малый элемент *Ocba* размерами *dx, dy,* толщиной *h* и приложим к нему усилия, показанные на рисунке 2.

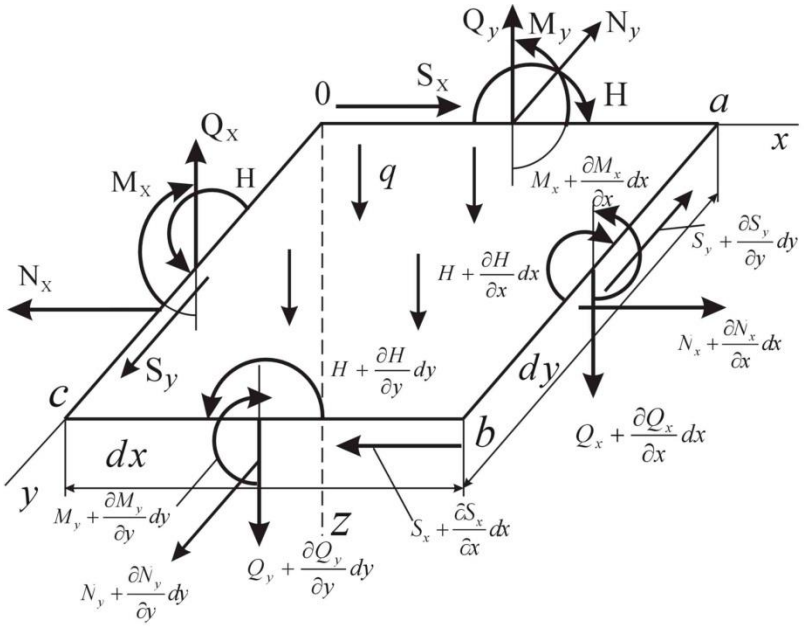

Рисунок 2. *Бесконечно малый элемент пластинки с приложенными усилиями (составлен авторами)*

На грани *Oc* действует погонная поперечная сила *Qx*. На грани *ab*, отстоящей от грани *Oc* на бесконечно малом расстоянии *dx*, погонная поперечная сила получает бесконечно малое приращение и равна $Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx$. Аналогично, на гранях *Oa* и *bc* действуют соответственно погонные поперечные силы Q_y и $Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy$. Полагаем, что на срединную плоскость пластинки действует поверхностная нагрузка интенсивностью *p.*

Для обеспечения равновесия элемента должны выполняться шесть уравнений равновесия: три уравнения проекции сил на координатные оси и три уравнения моментов относительно этих осей. При этом все погонные усилия следует умножать на длину грани элемента, по которой они действуют.

Проецируя все силы, изображенные на рис. 2, на ось *z* запишем

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}dx\right)dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y}dy\right)dx - Q_y dx + qdxdy = 0 \quad (9)$$

Или после преобразования:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p \quad (10)$$

Уравнение равновесия моментов всех сил относительно оси *y* имеет вид:

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x}dx\right)dy - M_x dy + \left(H + \frac{\partial H}{\partial y}dy\right)dx - Hdx - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}dx\right)dydx + \\ + Q_y dx\frac{dx}{2} - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y}dy\right)dx\frac{dx}{2} - qdxdy\frac{dx}{2} = 0. \quad (11)$$

Или после преобразования:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x \quad (12)$$

Составляя уравнение равновесия моментов относительно оси *x* получим:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y \quad (13)$$

Подставляя в уравнение (10) выражения для погонных поперечных сил (12) и (13), получим дифференциальное уравнение изгиба пластины в моментах:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (14)$$

Модель нагружения пластинки

И будем полагать, что действующая на пластинку нагрузка может быть выражена через интенсивность поверхностной нагрузки. При необходимости вопрос о схеме приложения нагрузки к пластине должен быть рассмотрен специально.

Модель температурного воздействия

Так как на армобетонную пластину кроме нагрузки действует и температура, оказывающая влияние на напряженно-деформированное состояние пластины, то воздействие температуры необходимо учитывать при анализе поведения пластины. Совокупность значений температуры во всех точках пластины представляет собой температурное поле, которое может быть стационарным и нестационарным. Нестационарное температурное поле армобетонной пластины отличается тем, что температура любой ее точки изменяется с течением времени. При

стационарном температурном поле армобетонной платины температура в любой ее точке не изменяется во времени, т.е. является функцией только координат (установившееся состояние):

$$T_j = \Phi(x, y, z), \quad \frac{\partial T_j}{\partial t} = 0 \qquad (15)$$

.

Для определения температурного поля применяется уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \qquad (16)$$

где a - коэффициент температуропроводности материала пластины.

Температурное поле, соответствующее уравнению (16), является пространственным, так как *T* есть функция трех координат *x, y, z*. Если температура есть функция двух координат, то поле становится двухмерным:

$$T = \Phi(x, z, t), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \qquad (17)$$

Если же температура есть функция одной координаты, то поле называется одномерным:

$$T = \Phi(z, t), \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \qquad (18)$$

Можно предположить, что армобетонная плита (пластина) подвергается воздействию одномерного температурного поля, если ее размеры в плане достаточно велики по сравнению с толщиной. Иначе говоря, температура в пластине не зависит от координат в плане (*x, y*) и тогда (16) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \qquad (19)$$

причем

$$a_j = \frac{\lambda_j}{\rho_j \cdot c_j}, \qquad (20)$$

где: λ_j - коэффициент теплопроводности; ρ_j - плотность материала; c_j - удельная теплоемкость.

Если температура на поверхности пластины изменяется достаточно медленно, то можно полагать $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, т.е. считать, что имеет место квазистационарное распределение температуры, описываемое уравнением:

$$a\frac{d^2 T}{dz^2} = 0. \qquad (21)$$

Для нахождения закона распределения температуры по толщине пластины к уравнению (21) следует присоединить соответствующие граничные условия. Граничное условие первого рода состоит в задании распределения температуры по поверхности пластины в любой момент времени, т.е.

$$T_{ниж}(t) = f_1(t), \quad T_{верх}(t) = f_2(t), \tag{22}$$

где: $T_{ниж}(t)$ - температура на нижней поверхности пластины; $T_{верх}(t)$ - температура на верхней поверхности пластины.

В частном случае $T_{ниж}(t) = T_1 = const$; $T_{верх}(t) = T_2 = const$, т.е. температура на поверхностях постоянна на протяжении всего процесса теплообмена. Это может быть осуществлено при искусственном поддержании постоянной температуры или при особых условиях теплообмена между окружающей средой и поверхностью пластины.

Уравнение изгиба армобетонной пластины на упругом основании

Полагая, что справедливы гипотезы Кирхгофа, запишем:

$$\begin{aligned} &e_x = \varepsilon_x + \chi_x z,\ e_y = \varepsilon_y + \chi_y z,\ e_{xy} = \varepsilon_{xy} + 2\chi_{xy} z, \\ &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \\ &\chi_x = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2},\ \chi_y = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2},\ \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \tag{23}$$

где: ε_x, ε_y, ε_{xy} - деформации точки срединной поверхности; χ_x, χ_y, χ_{xy} - кривизны в этой точке, z - координата этой точки, отсчитываемая от срединной плоскости, u, v, w - перемещения в направлении осей x, y, z.

Получим выражения для изгибающих моментов и усилий, полагая, что в сечении пластинки они складываются из моментов и усилий, воспринимаемых бетоном, и моментов, и усилий, воспринимаемых композитной арматурой, а на сдвиг работает только бетон. При этом влияние температуры пока учитывать не будем. С учетом сказанного имеем:

$$\begin{aligned} &M_x = M_x^b + M_x^a;\quad M_y = M_y^b + M_y^a;\quad H = H^b; \\ &N_x = N_x^b + N_x^a;\quad N_y = N_y^b + N_y^a;\quad S = S^b. \end{aligned} \tag{24}$$

Выражения для частей моментов и усилий, воспринимаемых бетоном:

$$\begin{aligned} &M_x^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{xj}^b z dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xi}^b z dz,\ M_y^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{yj}^b z dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yi}^b z dz, \\ &H^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \tau_{xyj}^b z dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \tau_{xyi}^b z dz,\ N_x^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{xj}^b dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xi}^b dz, \\ &N_y^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{yj}^b dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yi}^b dz,\ S^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \tau_{xyj}^b dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \tau_{xyi}^b dz \end{aligned} \tag{25}$$

.

Здесь z_0 - координата нейтральной поверхности, определяемая из условия $\sigma_0=0$, и отделяющая растянутую зону пластины от сжатой; i, j - индексы, относящиеся к сжатой и растянутой зонам пластины. Если нижняя зона изгибаемой пластины растянута, то $j=1$, $i=2$; если нижняя зона изгибаемой пластинки сжата, а верхняя растянута, то $j=2$, $i=1$.

Выражения для z_0 получим, приравнивая выражение для σ_0 к нулю:

$$\sigma_0^b = \frac{\left(\sigma_x^b + \sigma_y^b\right)}{3} = \frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2}\left[\left(1+\nu_j\right)\left(e_x + e_y\right)\right] = 0 \quad (26)$$

.

Отсюда следует: $\left(e_x + e_y\right) = 0$.

$$z_0(x,y) = -\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{\chi_x + \chi_y} \quad (27)$$

Окончательно .

Для получения выражений для моментов и усилий, воспринимаемых полимерной композитной арматурой, заменим арматурные стержни в направлении координаты x сплошным эквивалентным слоем переменной толщины из полимерного композиционного материала, такого же, из которого выполнена арматура. Переменность толщины эквивалентного слоя в направлении координаты x определяется законами изменения площади поперечного сечения арматурных стержней в направлении координаты x. Переменность толщины эквивалентного слоя в направлении координаты y определяется аппроксимацией площадей арматурных стержней в направлении y некоторой функцией, задающей закон изменения толщины эквивалентного слоя в направлении y (рис. 3).

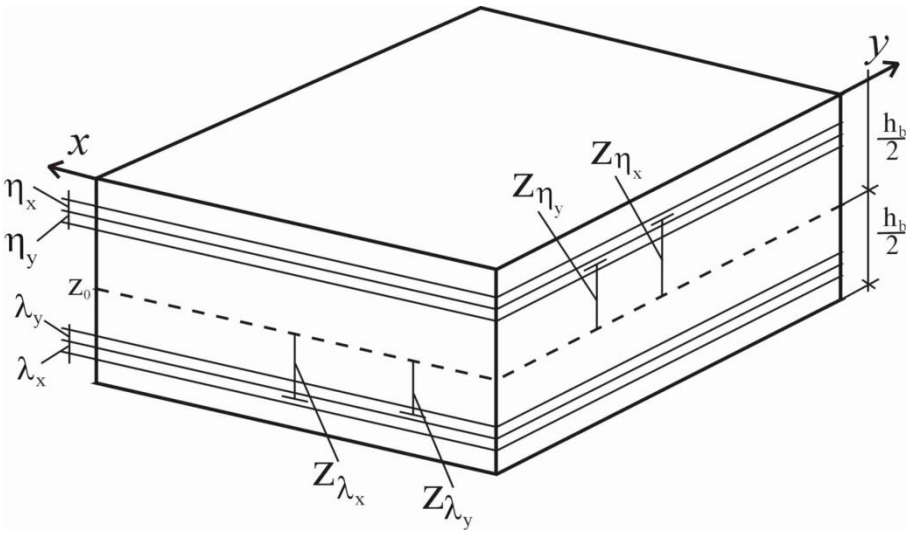

Рисунок 3. *Расположение эквивалентных слоев из полимерного композиционного материала*

Введем обозначения: η_x, η_y - толщины эквивалентных арматуре слоев в верхней части пластинки, причем эквивалентных арматуре в направлениях, соответственно x, y; λ_x, λ_y - толщины эквивалентных арматуре слоев в нижней части пластины, эквивалентных арматуре в направлениях, x, y; z_{η_x}, z_{η_y} - ординаты центров тяжести эквивалентных слоев в верхней части пластины; $z_{\lambda_x}, z_{\lambda_y}$ - ординаты центров тяжести эквивалентных слоев в нижней части пластины.

С учетом введенных гипотез выражения для части моментов и усилий, воспринимаемых арматурой, примут вид:

$$\begin{aligned} M_x^a &= \sigma_x^a\left(z_{\lambda_x}\right)\lambda_x z_{\lambda_x} + \sigma_x^a\left(z_{\eta_x}\right)\eta_x z_{\eta_x}, \\ M_y^a &= \sigma_y^a\left(z_{\lambda_y}\right)\lambda_y z_{\lambda_y} + \sigma_y^a\left(z_{\eta_y}\right)\eta_y z_{\eta_y}, \\ N_x^a &= \sigma_x^a\left(z_{\lambda_x}\right)\lambda_x + \sigma_x^a\left(z_{\eta_x}\right)\eta_x, \\ N_y^a &= \sigma_y^a\left(z_{\lambda_y}\right)\lambda_y + \sigma_y^a\left(z_{\eta_y}\right)\eta_y. \end{aligned} \qquad (28)$$

Здесь $\sigma_x^a\left(z_{\lambda_x}\right)$ - напряжение в эквивалентном композитном слое, работающем в направлении оси *x* и расположенном в нижней части пластины на расстоянии z_{λ_x} от срединной поверхности; $\sigma_x^a\left(z_{\eta_x}\right)$ - напряжение в эквивалентном композитном слое, работающем в направлении оси *x* и расположенном в верхней части пластины на расстоянии z_{η_x} от срединной поверхности; $\sigma_y^a\left(z_{\lambda_y}\right)$ - напряжение в эквивалентном композитном слое, работающем в направлении оси *y* и расположенном в нижней части пластины на расстоянии z_{λ_y} от срединной поверхности; $\sigma_y^a\left(z_{\eta_y}\right)$ - напряжение в эквивалентном композитном слое, работающем в направлении оси *y* и расположенном в верхней части пластины на расстоянии z_{η_y} от срединной поверхности.

С учетом соотношений (1) при отсутствии температурного члена выражения (24) можно записать:

$$M_x^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2}\left(e_x + \nu_j e_y\right) z\partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \frac{\Psi_i}{1-\nu_i^2}\left(e_x + \nu_i e_y\right) z\partial z =$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j \varepsilon_x z\partial z + \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j \chi_x z^2\partial z + \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j \nu_j \varepsilon_y z\partial z + \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j \nu_j \chi_y z^2\partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i \varepsilon_x z\partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i \chi_x z^2\partial z +$$

$$\int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i \nu_i \varepsilon_y z\partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i \nu_i \chi_y z^2\partial z = \varepsilon_x \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j z\partial z + \chi_x \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j z^2\partial z + \varepsilon_y \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j \nu_j z\partial z + \chi_y \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j \nu_j z^2\partial z + \qquad (29)$$

$$\varepsilon_x \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i z\partial z + \chi_x \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i z^2\partial z + \varepsilon_y \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i \nu_i z\partial z + \chi_y \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i \nu_i z^2\partial z \ ;$$

$$M_y^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2}\left(e_y + \nu_j e_x\right) z\partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \frac{\Psi_i}{1-\nu_i^2}\left(e_y + \nu_i e_x\right) z\partial z =$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\varepsilon_y z\partial z+\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\chi_y z^2\partial z+\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\nu_j\varepsilon_x z\partial z+\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\nu_j\chi_x z^2\partial z+\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\varepsilon_y z\partial z+\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\chi_y z^2\partial z+$$

$$\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\nu_i\varepsilon_x z\partial z+\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\nu_i\chi_x z^2\partial z=\varepsilon_y\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j z\partial z+\chi_y\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j z^2\partial z+\varepsilon_x\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\nu_j z\partial z+\chi_x\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\nu_j z^2\partial z+$$

$$\varepsilon_y\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i z\partial z+\chi_y\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i z^2\partial z+\varepsilon_x\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\nu_i z\partial z+\chi_x\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\nu_i z^2\partial z\ ;$$

$$N_x^b=\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2}\left(e_x+\nu_j e_y\right)\partial z+\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\frac{\Psi_i}{1-\nu_i^2}\left(e_x+\nu_i e_y\right)\partial z=$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\varepsilon_x\partial z+\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\chi_x z\partial z+\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\nu_j\varepsilon_y\partial z+\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\nu_j\chi_y z\partial z+\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\varepsilon_x\partial z+\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\chi_x z\partial z+$$

$$\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\nu_i\varepsilon_y\partial z+\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\nu_i\chi_y z\partial z=\varepsilon_x\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\partial z+\chi_x\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j z\partial z+\varepsilon_y\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\nu_j\partial z+\chi_y\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\nu_j z\partial z+$$

$$\varepsilon_x\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\partial z+\chi_x\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i z\partial z+\varepsilon_y\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\nu_i\partial z+\chi_y\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\nu_i z\partial z\ ;$$

$$N_y^b=\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2}\left(e_y+\nu_j e_x\right)\partial z+\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\frac{\Psi_i}{1-\nu_i^2}\left(e_y+\nu_i e_x\right)\partial z=$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\varepsilon_y\partial z+\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\chi_y z\partial z+\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\nu_j\varepsilon_x\partial z+\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\nu_j\chi_x z\partial z+\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\varepsilon_y\partial z+\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\chi_y z\partial z+$$

$$\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\nu_i\varepsilon_x\partial z+\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\nu_i\chi_x z\partial z=\varepsilon_y\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\partial z+\chi_y\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j z\partial z+\varepsilon_y\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\nu_j\partial z+\chi_x\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0}\alpha_j\nu_j z\partial z+$$

$$\varepsilon_y\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\partial z+\chi_y\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i z\partial z+\varepsilon_x\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\nu_i\partial z+\chi_x\int_{z_0}^{\frac{h}{2}}\alpha_i\nu_i z\partial z\ ;$$

$$H^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \frac{\Psi_j}{2(1+\nu_j)} e_{xy} z\partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \frac{\Psi_i}{2(1+\nu_i)} e_{xy} z\partial z = \varepsilon_{xy} \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \beta_j z\partial z + 2\chi_{xy} \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \beta_j z^2 \partial z +$$

$$+\varepsilon_{xy} \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \beta_i z\partial z + 2\chi_{xy} \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \beta_i z^2 \partial z;$$

$$S^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \frac{\Psi_j}{2(1+\nu_j)} e_{xy} \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \frac{\Psi_i}{2(1+\nu_i)} e_{xy} \partial z = \varepsilon_{xy} \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \beta_j \partial z + 2\chi_{xy} \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \beta_j z\partial z +$$

$$+\varepsilon_{xy} \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \beta_i \partial z + 2\chi_{xy} \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \beta_i z\partial z.$$

или же:

$$\begin{aligned}
M_x^b &= \varepsilon_x J_1^b + \chi_x J_2^b + \varepsilon_y I_1^b + \chi_y I_2^b, \\
M_y^b &= \varepsilon_y J_1^b + \chi_y J_2^b + \varepsilon_x I_1^b + \chi_x I_2^b, \\
N_x^b &= \varepsilon_x J_0^b + \chi_x J_1^b + \varepsilon_y I_0^b + \chi_y I_1^b, \\
N_y^b &= \varepsilon_y J_0^b + \chi_y J_1^b + \varepsilon_x I_0^b + \chi_x I_1^b, \\
H^b &= \varepsilon_{xy} T_1^b + 2\chi_{xy} T_2^b, \\
S^b &= \varepsilon_{xy} T_0^b + 2\chi_{xy} T_1^b.
\end{aligned} \tag{30}$$

где $\alpha_j = \frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2}$, $\alpha_i = \frac{\Psi_i}{1-\nu_i^2}$, $\beta_j = \frac{\Psi_j}{2(1+\nu_j)}$, $\beta_i = \frac{\Psi_i}{2(1+\nu_i)}$,

$$J_k^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j z^k \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i z^k \partial z \qquad I_k^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j \nu_j z^k \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i \nu_i z^k \partial z \tag{31}$$

, к = 0,1,2. *, к = 0,1,2.*

$$J_0^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i \partial z \quad J_1^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j z\partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i z\partial z \quad J_2^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j z^2 \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i z^2 \partial z$$

, ,

$$I_0^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j \nu_j \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i \nu_i \partial z \quad I_1^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j \nu_j z \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i \nu_i z \partial z$$

,

,

$$I_2^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j \nu_j z^2 \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i \nu_i z^2 \partial z$$

,

$$T_k^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \beta_j z^k \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \beta_i z^k \partial z \qquad T_0^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \beta_j \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \beta_i \partial z$$

, $\kappa = 0,1,2.$,

$$T_1^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \beta_j z \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \beta_i z \partial z \quad T_2^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \beta_j z^2 \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \beta_i z^2 \partial z$$

, .

Выражения для моментов и усилий, воспринимаемых композитной арматурой:

$$\begin{aligned} M_x^a &= \varepsilon_x J_{x1}^a + \chi_x J_{x2}^a, \\ M_y^a &= \varepsilon_y J_{y1}^a + \chi_y J_{y2}^a, \\ N_x^a &= \varepsilon_x J_{x0}^a + \chi_x J_{x1}^a, \\ N_y^a &= \varepsilon_y J_{y0}^a + \chi_y J_{y1}^a. \end{aligned} \tag{32}$$

Где $J_{xk}^a = E_a \left(\lambda_x z_{\lambda_x}^k + \eta_x z_{\eta_x}^k \right)$, $\kappa = 0,1,2,$ $J_{yk}^a = E_a \left(\lambda_y z_{\lambda_y}^k + \eta_y z_{\eta_y}^k \right)$ (33)

$\kappa = 0,1,2$, E_a - модуль упругости полимерного композиционного материала.

Из условий отсутствия в сечениях пластины нормальных усилий $N_x=0$, $N_y=0$ и сдвиговых усилий $S=0$, получим выражения для деформаций ε_x, ε_y, ε_{xy}:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= f_{11}\chi_x + f_{12}\chi_y, \\ \varepsilon_y &= f_{21}\chi_x + f_{22}\chi_y, \\ \varepsilon_{xy} &= -\left(\frac{2T_1^b}{T_0^b} \right) \chi_{xy}, \end{aligned} \tag{34}$$

В которых:

$$f_{11}=\frac{I_0^b I_1^b-\left(J_0^b+J_{y0}^a\right)\left(J_1^b+J_{x1}^a\right)}{\left(J_0^b+J_{x0}^a\right)\left(J_0^b+J_{y0}^a\right)-\left(I_0^b\right)^2},\qquad f_{12}=\frac{I_0^b\left(J_1^b+J_{y1}^a\right)-\left(J_0^b+J_{y0}^a\right)I_1^b}{\left(J_0^b+J_{x0}^a\right)\left(J_0^b+J_{y0}^a\right)-\left(I_0^b\right)^2},$$
$$f_{22}=\frac{I_0^b I_1^b-\left(J_0^b+J_{x0}^a\right)\left(J_1^b+J_{y1}^a\right)}{\left(J_0^b+J_{x0}^a\right)\left(J_0^b+J_{y0}^a\right)-\left(I_0^b\right)^2},\qquad f_{21}=\frac{I_0^b\left(J_1^b+J_{x1}^a\right)-\left(J_0^b+J_{x0}^a\right)I_1^b}{\left(J_0^b+J_{x0}^a\right)\left(J_0^b+J_{y0}^a\right)-\left(I_0^b\right)^2}. \quad (35)$$

Подставляя (34) в выражения для M_x, M_y и H, получим:

$$\begin{aligned} M_x &= D_{11}\chi_x + D_{12}\chi_y, \\ M_y &= D_{21}\chi_x + D_{22}\chi_y, \\ H &= D_3\chi_{xy}, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$D_{11}=\left[f_{11}\left(J_1^b+J_{x1}^a\right)+\left(J_2^b+J_{x2}^a\right)+ f_{21}I_1^b\right],\quad D_{12}=\left[f_{12}\left(J_1^b+J_{x1}^a\right)+ f_{22}I_1^b+I_2^b\right],$$
$$D_{21}=\left[f_{21}\left(J_1^b+J_{y1}^a\right)+ f_{11}I_1^b+I_2^b\right],\quad D_{22}=\left[f_{22}\left(J_1^b+J_{y1}^a\right)+\left(J_2^b+J_{y2}^a\right)+ f_{12}I_1^b\right], \quad (37)$$
$$D_3=\left[2T_2^b-2\frac{\left(T_1^b\right)^2}{T_0^b}\right].$$

Подставляя (23) в (36), получим:

$$\begin{aligned} M_x &= -D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ M_y &= -D_{21}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ H &= -D_3\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}. \end{aligned} \quad (38)$$

Дифференциальное уравнение изгиба пластины на упругом основании при пренебрежении трением, возникающим между пластиной и упругим основанием, может быть представлено в виде:

$$-\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}\right)=p(x,y)-q(x,y), \quad (39)$$

где: $q(x, y)$ - реактивные давления упругого основания; $p(x, y)$ - заданные поверхностные силы, действующие на пластинку.

Подставляя в (39) выражения для M_x, M_y, H из (38), получим следующее дифференциальное уравнение нелинейного изгиба армированной полимерным композиционным материалом пластины на упругом основании:

$$\Phi(W) = p(x,y) - q(x,y), \tag{40}$$

где

$$\Phi(W) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right). \tag{41}$$

Дифференциальное уравнение (40) содержит две неизвестные функции: *W(x,y)* и *q*(*x, y*). Для определения этих функций к уравнению (40) следует присоединить дополнительное условие, выражающее зависимость между нагрузкой на основание пластины и его осадкой, а также контактное условие о плотном прилегании пластины к основанию.

Дифференциальное уравнение равновесия однослойного основания имеет вид [45]:

$$-2m\nabla^2 W(x,y) + nW(x,y) = q(x,y). \tag{42}$$

где m, n - коэффициенты постели однослойного основания, зависящие от вида грунта основания.

При условии, что прогиб пластины совпадает с осадкой поверхности упругого основания, уравнения (40) и (42) могут быть рассмотрены совместно:

$$\left.\begin{aligned} -2m\nabla^2 W(x,y) + nW(x,y) &= q \\ \Phi(W) &= p - q \end{aligned}\right\}. \tag{43}$$

Исключая из (43) функцию *q*(*x, y*), получим дифференциальное уравнение изгиба армированной пластины на упругом основании:

$$\Phi(W) - 2m\nabla^2 W(x,y) + nW(x,y) = p(x,y). \tag{44}$$

Гармонический оператор от прогиба пластины $\nabla^2 W$ в этом дифференциальном уравнении учитывает влияние касательных напряжений, возникающих в основании пластины. К этому уравнению следует присоединить соответствующие граничные условия на контуре пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овчинников И.Г., Раткин В.В., Землянский А.А. Моделирование поведения железобетонных элементов конструкций в условиях воздействия хлоридсодержащих сред. СГТУ. Саратов. 2000. 232 с.
2. Овчинников И.Г., Инамов Р.Р., Гарибов Р.Б. Прочность и долговечность железобетонных конструкций в условиях сульфатной агрессии. Изд-во СГУ. Саратов, 2001. 163 с.

3. Овчинников И.Г., Раткин В.В., Гарибов Р.Б. Работоспособность сталежелезобетонных элементов конструкций в условиях воздействия хлоридсодержащих сред. Изд-во СГУ. Саратов, 2002. 155 с.

4. Овчинников И.Г., Кривцов А.В., Скачков Ю.П. Влияние хлоридсодержащих сред на прочность и долговечность пластин на упругом основании. Изд-во. ПензГАСА. Пенза. 2002. 214 с.

5. Маринин А.Н., Гарибов Р.Б., Овчинников И.Г. Моделирование напряженно-деформированного состояния железобетонных элементов конструкций в условиях хлоридной коррозии и карбонизации. Саратов. Научное издание. Издат. Центр «Рица». 2008. 296 с.

6. Овчинников И.И., Мигунов В.Н., Овчинников И.Г. Моделирование кинетики деформирования армированных конструкций в специальных эксплуатационных средах - Пенза, ПГУАС, 2014. - 280 с.

7. Мигунов В.Н., Овчинников И.И., Овчинников И.Г. Экспериментально-теоретическое моделирование армированных конструкций в условиях коррозии. - Пенза, ПГУАС, 2014. - 352 с.

8. Ферронская, А.В. Долговечность конструкций из бетона и железобетона. - М.: Изд-во АСВ, 2006. - 335 с.

9. Степанова В.Ф. Долговечность бетона: Учебное пособие для вузов - М., 2014 г. 126 с.

10. Защита от коррозии металлических и железобетонных мостовых конструкций методом окрашивания / И.Г. Овчинников, А.И. Ликверман, О.Н. Распоров и др. - Саратов: Изд-во «Кубик», 2014. - 504 с.

11. Степанова В.Ф., Степанов А.Ю. Неметаллическая композитная арматура для бетонных конструкций // Промышленное и гражданское строительство. 2013. №1. С. 45-47.

12. Степанова, В.Ф. Арматура композитная полимерная / В.Ф. Степанова, А.Ю. Степанов, Е.П. Жирков. - М.: Изд-во АСВ, 2013. - 200 с.

13. Лешкевич, О.Н. Перспективы применения композитной арматуры / О.Н. Лешкевич // Проблемы современного бетона и железобетона: материалы III Междунар. симп. (Минск, 9-11 нояб. 2011 г.): в 2 т. / М-во архитектуры и строительства Респ. Беларусь; Научно-исследовательское республиканское унитарное предприятие по строительству «Институт БелНИИС»; редкол.: М.Ф. Марковский [и др.]. - Минск: Минсктиппроект, 2011. - Т. 1: Бетонные и железобетонные конструкции. - С. 233-238.

14. Гиль А.И., Бадалова, Лазовский Е.Д. Стеклопластиковая и углепластиковая арматура в строительстве: Преимущества, недостатки, перспективы применения // Вестник Полоцкого государственного университета, 2015, Серия F, №16. Строительство, прикладные науки, строительные конструкции. с. 48-53.

15. Р-16-78. Рекомендации по расчету конструкций со стеклопластиковой арматурой. НИИЖБ. М.: 1978. 17 с.

16. Japan Society of Civil Engineers (JSCE) 1997 “Recommendation for Design and Construction of Concrete Structures Using Continuous Fiber Reinforced Materials”,

Concrete Engineering Series 23, ed. by A. Machida, Research Committee on Continuous Fiber Reinforcing Materials, Tokyo, Japan, 325 p.

17. CAN/CSA-S806-02, Design and Construction of Building Components with Fiber-Reinforced Polymers, Toronto. 2002.
18. ACI 440.1R-03, Guide for the Design and Construction of Concrete Reinforced with FRP Bars, American Concrete Institute, 2003.
19. CODE NO. ECP 208-2005 Egyptian code of practice for the use of fiber reinforced polymer (FRP) in the construction fields Egyptian standing code committee for the use of fiber reinforced polymer (FRP) in the construction fields, 2005.
20. ACI 440.1R-06 “Guide for the Design and Construction of Structural Concrete Reinforced with FRP Bars”, ACI Committee 440, American Concrete Institute, Farmington Hills, Mich., (2006), 44 p.
21. CNR-DT 203/2006 - «Guide for the Design and Construction of Concrete Structures Reinforced with Fiber-Reinforced Polymer Bars» Italian National Research Council (2006).
22. Fibre reinforced polymer reinforcement in concrete structures. Technical report prepared by a working party of Task Group 9.3. Bulletin 40. Fib - International Federation for Structural concrete. 2007. 151 p.
23. Design Manual No. 3, “Reinforcing Concrete Structures with Fiber Reinforced Polymers”; September 2007. 151 p.
24. ACI 440R-07 “Report on Fiber-Reinforced Polymer (FRP) Reinforcement for Concrete Structures”, ACI Committee 440, American Concrete Institute, Farmington Hills, Mich., (2007), 100 p.
25. ACI 440.6-08 "Specification for Carbon and Glass Fiber-Reinforced Polymer Bar Materials for Concrete Reinforcement", ACI Committee 440, American Concrete Institute, Farmington Hills, Mich., (2008), 6 p.
26. LRFD "Bridge Design Guide Specifications for GFRP-Reinforced Concrete Bridge Decks and Traffic Railings", American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington, D.C., (2009), 68 p.
27. CAN/CSA-S806-10, “Design and Construction of Building Components with Fibre-Reinforced Polymers”; 2010.
28. ACI 440.1R (2015) «Guide for the Design and Construction of Structural Concrete Reinforced with FRP Bars».
29. Технические рекомендации по применению неметаллической композитной арматуры периодического профиля в бетонных конструкциях. М. Министерство регионального развития. ОАО «НИЦ «Строительство», НИИЖБ имени А.А. Гвоздева. 2012. 7 с.
30. ГОСТ 31938-2012 Арматура композитная полимерная для армирования бетонных конструкций. Общие технические условия.
31. ГОСТ 32486-2013 «Арматура композитная полимерная для армирования бетонных конструкций. Методы определения структурных и термомеханических характеристик». М.: НИИЖБ. 2013.

32. ГОСТ 32492-2013 Арматура композитная полимерная для армирования бетонных конструкций. Методы определения физико-механических характеристик.

33. ГОСТ 32486-2013 Арматура композитная полимерная для армирования бетонных конструкций. Методы определения характеристик долговечности.

34. ГОСТ 32487-2013 Арматура композитная полимерная для армирования бетонных конструкций. Методы определения характеристик стойкости к агрессивным средам.

35. СП 63.13330.2012 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. М., 2013. 155 с.

36. СТО НОСТРОЙ 2.6.90-2013 «Применение в строительных бетонных и геотехнических конструкциях неметаллической композитной арматуры». НИЦ «Тоннели и метрополитены». Москва 2014. 125 с.

37. Гиздатуллин А.Р., Хусаинов Р.Р., Хозин В.Г., Красиникова Н.М. Прочность и деформативность бетонных конструкций, армированных полимеркомпозитными стержнями // Инженерно-строительный журнал, 2016, №2, с. 32 - 41.

38. Hassan T., Abdelrahman A., Tadros G., Rizkalla S. Fibre reinforced polymer reinforcing bars for bridge decks. Canadian journal of civil engineering. 2000. No. 27. Pp. 839-849.

39. El-Salakawy, Ehab; Benmokrane, Brahim. Serviceability of Concrete Bridge Deck Slabs Reinforced with Fiber-Reinforced Polymer Composite Bars September 2004. ACI Structural Journal; Sep/Oct2004, Vol. 101 Issue 5, p. 727.

40. Kim Y.H., Gardoni P., Trejo D. Time-Variant Capacity and Reliability of GFRP-Reinforced Bridge Decks. Second International Conference on Sustainable Construction Materials and Technologies. Ancona, Italy. 28-30 June 2010.

41. Хозин В.Г., Гиздатуллин А.Н., Куклин А.Н. Полимеркомпозитная арматура в сборных дорожных плитах // Полимеры в строительстве: научный Интернет-журнал.2014, 2(2), с. 125 - 132.

42. Альтшулер Б.А. Влияние последовательности нагрева и загружения на прочность и деформативность обычного бетона при растяжении / Б.А. Альтшулер, И.И. Шахов, В.Н. Щербатюк // Бетон и железобетон. - 1978. - №1. - С. 40-42.

43. Милованов А.Ф. Влияние температуры на работу предварительно напряженных железобетонных конструкций / А.Ф. Милованов // Бетон и железобетон. - 1970. - №15. - С. 15-18.

44. Попеско А.И. Работоспособность железобетонных конструкций, подверженных коррозии / А.И. Попеско. - СПб.: СПб гос. архит.-строит. ун-т, 1996. - 182 с.

45. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. - М.: Физматгиз, 1960. 492 с.

Ovchinnikov Ilya Igorevich
Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov
Moscow state automobile & road technical university
Sochi branch, Russia, Sochi
E-mail: bridgeart@mail.ru

Ovchinnikov Igor Georgievich
Penza state university of architecture and construction, Russia, Penza
Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov
Perm national research polytechnic university, Russia, Perm
E-mail: bridgesar@mail.ru

Ilchenko Ekaterina Dmitrievna
Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov
E-mail: pr.serenity@mail.ru

Mikhaldykin Eugeny Sergeevich
Research institute Grafit, Russia, Moscow
E-mail: emihaldikin@niigrafit.org

Modeling the behavior of plate structures made of reinforced concrete with a non-metallic reinforcement

Abstract. There have advantages and disadvantages of the use of non-metallic reinforcement of polymeric composite material, the use of incorrect methods to the calculation of limit states of structures reinforced with non-metallic reinforcement. It is stated that in recent years developed a series of normative documents on the use of non-metallic reinforcement in concrete structures, but they are based on the minimum experimental basis. Physical relations formulated for concrete considering non-linearity of its deformation, different resistance, the influence of temperature, as well as non-metallic reinforcement with a hypothesis about its linear elastic deformation. Using hypotheses of direct normal and deformation model of concrete obtained nonlinear differential equations describing the bending of a rectangular plate, reinforced with reinforcement of the polymer composite material. In the derivation of equations is considered the presence of elastic foundation for model of the Vlasov - Leontief.

Keywords: polymer composite materials; non-metallic reinforcement; reinforced polymer concrete; reinforced plate; modeling; nonlinearity; different resistance; elastic base