Интернет-журнал «Науковедение» ISSN 2223-5167 http://naukovedenie.ru/

Том 8, №2 (2016) http://naukovedenie.ru/index.php?p=vol8-2

URL статьи: http://naukovedenie.ru/PDF/116TVN216.pdf

DOI: 10.15862/116TVN216 (http://dx.doi.org/10.15862/116TVN216)

Статья опубликована 16.05.2016.

Ссылка для цитирования этой статьи:
Шеин А.И. Оптимальные размеры прямоугольного сечения бруса при косом изгибе // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 8, №2 (2016) http://naukovedenie.ru/PDF/116TVN216.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/116TVN216

УДК 624.04

Шеин Александр Иванович
ФБГОУ ВО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства», Россия, Пенза
Зав. кафедрой «Механика»
Доктор технических наук, профессор
E-mail: shein-ai@yandex.ru

Оптимальные размеры прямоугольного сечения бруса при косом изгибе

Аннотация. В задачах оптимального проектирования, прямого проектирования или в задачах моделирования работы сооружений целесообразно использовать наиболее рациональные или оптимальные (не оптимизируемые в данной конкретной задаче) параметры элементов строительных конструкций. В связи с этим желательно иметь ряд формул для назначения этих параметров. В данной работе автором сделан вывод формул для одного из случаев сечений элементов – прямоугольного бруса. Статья посвящена замкнутому решению задачи оптимизации размеров прямоугольного сечения бруса при косом изгибе. Решение выполнено аналитически путём математических выкладок и представлено в виде формул. Эти формулы могут быть использованы в реальном проектировании, что позволит наиболее эффективно и с наименьшими затратами использовать материалы, вести строительство. Особенно полезным данное решение может быть при назначении сечений кровельных прогонов, а также при оптимизации всего каркаса в целом и многопараметрическом нагружении. Предполагается, что задано наиболее неблагоприятная комбинация нагрузок. Однако полученные соотношения с успехом могут быть использованы при многовариантном нагружении, так как расчетные соотношения связывают изгибающие моменты и расчетное сопротивление с одной стороны и размеры сечения, с другой стороны.

Ключевые слова: замкнутое решение; оптимальные размеры; косой изгиб; кровельный прогон; формулы

Введение

В процессе эксплуатации конструкция может подвергаться различным силовым воздействиям. Среди этих воздействий можно скомбинировать наиболее неблагоприятное сочетание нагрузок. Конструкция, запроектированная на наиболее неблагоприятное воздействие, сможет работать и при любых других сочетаниях нагрузок.

В конструкциях покрытий зданий большую роль играют прогоны. Очень часто эти элементы расположены поперек скатов наклонно к горизонтальным (и вертикальным) осям здания. В этих случаях прогоны испытывают такой вид деформации, при котором в их поперечных сечениях одновременно возникают изгибающие моменты M_x и M_y относительно двух взаимно перпендикулярных главных центральных осей x и y – косой изгиб. Косой изгиб возникает при действии внешних нагрузок, приложенных поперёк оси стержня и не лежащих ни в одной из главных центральных плоскостей балки xOz или yOz. При этом плоскость действия главного результирующего момента и плоскость действия внешней нагрузки не совпадают с направлением полного прогиба.

Пусть на данный вид элементов конструкции действует наиболее неблагоприятное сочетание нагрузок. Требуется подобрать размеры элементов, испытывающих косой изгиб.

В современных условиях, когда происходит удорожание строительства, необходимо принимать проектные решения, позволяющие наиболее эффективно и с наименьшими затратами использовать материалы, вести строительство. При проектировании строительных конструкций одним из важнейших условий эффективности является совместное решение задачи экономии материальных ресурсов при одновременном обеспечении требуемого уровня прочности сооружения. Это уже экстремальная задача и решать ее надо с использованием соответствующих методов.

Искомыми величинами проектной экстремальной задачи могут быть геометрические характеристики сечений элементов.

В задачах оптимального проектирования [1, 2, 12-22], прямого проектирования [10] или в задачах моделирования работы сооружений [3-9] целесообразно использовать наиболее рациональные или оптимальные (не оптимизируемые в данной конкретной задаче) параметры элементов строительных конструкций. В связи с этим желательно иметь ряд формул для назначения этих параметров. В данной работе приведен вывод формул для одного из случаев сечений элементов – прямоугольного бруса.

Цель данной статьи заключается в получении формул для оптимального подбора сечений прямоугольных элементов стержневых систем, находящихся под действием неблагоприятной комбинации нагрузок, вызывающей косой изгиб элементов, при учете ограничений по прочности.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить замкнутое решение оптимизационной задачи.

Вывод расчетных соотношений

Рассмотрим задачу оптимизации сечения бруса прямоугольного сечения, подверженного косому изгибу (рис. 1).

Требуется запроектировать брус минимальной площади поперечного сечения так, чтобы напряжения не превосходили расчетного сопротивления.

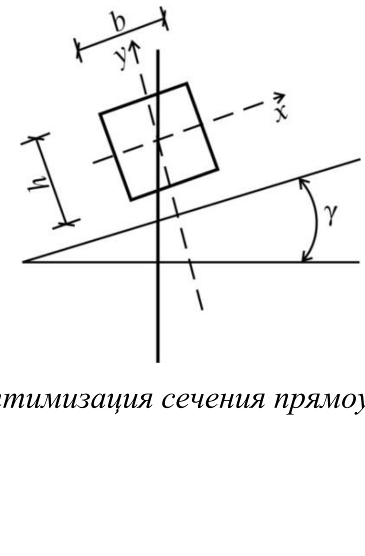

Рисунок 1. *Оптимизация сечения прямоугольного бруса*

Площадь прямоугольного сечения бруса

$$A = b \cdot h. \quad (1)$$

Расчетное сопротивление при косом изгибе не должно превышать значения

$$R \le \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}. \quad (2)$$

1. Формализация.

Примем за неизвестные оптимизационной задачи моменты сопротивления сечения W_x и W_y, которые обозначим $x_2/6$ и $x_1/6$ соответственно. Тогда площадь поперечного сечения будет представлена зависимостью

$$A = b \cdot h = (x_1 \cdot x_2)^{\frac{1}{3}}. \quad (3)$$

Оптимизационная задача примет вид:

$$\text{найти min } f_0(\bar{x}) = (x_1 \cdot x_2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{при } f_1(\bar{x}) = R - \frac{6M_x}{x_1} - \frac{6M_y}{x_2} = 0. \quad (4)$$

Функции f_0 и f_1 и их частные производные непрерывны при $x_k > 0$. Значит, по теореме Вейерштрасса, решение существует.

2. Применение принципа Лагранжа.

Функция Лагранжа

$$L = f_0(\bar{x}) + \lambda_1 f_1(\bar{x}) \quad (5)$$

или

$$L = (x_1 \cdot x_2)^{1/3} + \lambda_1 \left(R - \frac{6M_x}{x_1} - \frac{6M_y}{x_2} \right). \quad (6)$$

Необходимые условия экстремальности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} x_1^{-2/3} + x_2^{1/3} + \frac{\lambda_1 \cdot 6M_x}{x_1^2} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} x_1^{1/3} + x_2^{-2/3} + \frac{\lambda_1 \cdot 6M_y}{x_2^2} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \Rightarrow R - \frac{6M_x}{x_1} - \frac{6M_y}{x_2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3. Решение уравнений и нахождение стационарных точек.

Перенесем члены, содержащие λ_1 в первых двух уравнениях в правую часть:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3}x_1^{-2/3} + x_2^{1/3} &= -\frac{\lambda_1 \cdot 6M_x}{x_1^2}, \\ \frac{1}{3}x_1^{1/3} + x_2^{-2/3} &= -\frac{\lambda_1 \cdot 6M_y}{x_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Поделим первое уравнение на второе

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{M_x}{M_y}, \tag{9}$$

или

$$x_1 = x_2 \cdot \frac{M_x}{M_y}. \tag{10}$$

Подставим это выражение в третье уравнение системы

$$R - \frac{6M_x}{x_2 \dfrac{M_x}{M_y}} - \frac{6M_y}{x_2} = 0, \tag{11}$$

или

$$R - \frac{12M_y}{x_2} = 0, \tag{12}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{12M_y}{R}, \\ x_1 &= \frac{12M_x}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

4. Отбор нужных точек.

Стационарная точка единственная, значит, она является решением задачи.

Перейдем к переменным b и h, то есть к размерам сечения

$$\left.\begin{aligned} bh^2 &= 6W_x = x_1 \\ b^2h &= 6W_y = x_2 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

или

$$\left.\begin{aligned} b &= x_1^{-1/3} \cdot x_2^{2/3} \\ h &= x_1^{2/3} \cdot x_2^{-1/3} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Заключение

Таким образом, аналитически, путём математических выкладок, выполнено решение задачи нахождения оптимальных размеров прямоугольного сечения бруса при косом изгибе. Это решение представлено в виде конечных формул. Полученные формулы могут быть использованы в реальном проектировании и при моделировании сооружений. Предполагалось, что задано наиболее неблагоприятная комбинация нагрузок. Однако полученные соотношения с успехом могут быть использованы и при многовариантном нагружении, так как расчетные соотношения связывают изгибающие моменты и расчетное сопротивление с одной стороны и размеры сечения, с другой стороны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеин А.И., Земцова О.Г. Оптимизация многомассовых гасителей колебаний при гармоническом воздействии. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2010. №1. С. 113-122.
2. Шеин А.И., Шмелев Д.А. Оценка эффективности активного жидкостного гасителя колебаний высотных сооружений при нестационарных воздействиях. Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №1 (252). С. 59-63.
3. Шеин А.И., Земцова О.Г. Снижение уровня колебаний системы «упругое основание – высотное сооружение» с помощью нелинейного динамического гасителя. Региональная архитектура и строительство. 2011. №2. С. 83-90.
4. Шеин А.И., Завьялова О.Б. Расчет монолитных железобетонных каркасов с учетом последовательности возведения, физической нелинейности и ползучести бетона. Строительная механика и расчет сооружений. 2012. №5. С. 64-69.
5. Шеин А.И. Решение многопараметрической задачи динамики стержневых систем методом сеточной аппроксимации. Промышленное и гражданское строительство. 2002. №2. С. 27.
6. Шеин А.И., Земцова О.Г. Схемы и теория гасителей пространственных колебаний сооружений. Региональная архитектура и строительство. 2010. №1. С. 45-52.
7. Шеин А.И., Зайцев М.Б. Метод смещенных разностей для решения систем дифференциальных уравнений движения механических систем. Строительная механика и расчет сооружений. 2012. №2. С. 38-41.
8. Шеин А.И., Шмелёв Д.А. Построение и реализация математической модели гашения колебаний высотных зданий с помощью реактивных гасителей. Региональная архитектура и строительство. 2014. №1. С. 96-103.
9. Zavyalova O.B.1, Shein A.I.2, Application of Grid Approximation Method for the Calculation of Monolithic Reinforced Concrete Frame Taking into Account Construction Sequence and Concrete Creep // International Conference on Advanced Engineering and Technology (ICAET 2014), December 19-21, 2014, Incheon, South Korea. Applied Mechanics and Materials Vols. 752-753, 2015, p. 617-623.
10. Шеин А.И., Монахов В.А. Алгоритм построения геометрической матрицы стержневой системы // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 7, №3 (2015) http://naukovedenie.ru/PDF/50TVN315.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/50TVN315.

11. Рейтман М.И., Шапиро Г.С. Методы оптимального проектирования деформируемых тел. – М.: Наука, 1976. – 266 с.
12. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы. Ч.3. – М.: Наука, 1984. – 610 с.
13. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
14. Гольдштейн Ю.Б., Соломещ М.А. Вариационные задачи статики оптимальных стержневых систем. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 208 с.
15. Троицкий В.А., Петухов Л.В. Оптимизация формы упругих тел. – М.: Наука, 1982. – 432 с.
16. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.I. – М.: Наука, 1966. – 416 с.
17. Малков В.П., Угодчиков А.Г. Оптимизация упругих систем. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
18. Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М. Математический анализ. Специальные разделы. 4.2. Применение некоторых методов математического и функционального анализа. – М. Высшая школа, 1980. – 296 с.
19. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 425 с.
20. Мажид К.И. Оптимальное проектирование конструкций. – М.: Высшая школа, 1979. – 240 с.
21. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике. – М.: Мир, 1986. – 348 с.

Shein Alexander Ivanovich
Penza state University of Architecture and Construction, Russia, Penza
E-mail: shein-ai@yandex.ru

Optimal dimensions of rectangular timber with oblique bending

Abstract. The problems of optimal design, direct design or modeling problems in work structures appropriate to use the most rational or optimal (not optimized in this particular problem) parameters of elements of building designs. In this regard, it is desirable to have a number of formulas to assign those parameters. In this paper, the author concluded that the formula for one of the cases of sections of elements - rectangular timber. The article is devoted to a closed solution of the problem of optimization of rectangular timber sizes with oblique bending. The decision is made by means of analytical and mathematical calculations presented in the form of formulas. These formulas can be used in a real design that will allow the most efficient and cost-effective use of materials, conduct construction. A particularly useful solution to this may be when assigning sections roof purlins, as well as optimization of the entire frame as a whole and multiparameter loading. It is assumed that given the most unfavorable combination of loads. However, these relations can be successfully used in a multivariate loading, since the calculated ratio and the associated bending moments calculated resistance on the one hand and the dimensions of the cross section on the other side.

Keywords: closed solution; optimal size; oblique bending; roof run; the formula

REFERENCES

1. Shein A.I., Zemtsova O.G. Optimizatsiya mnogomassovykh gasiteley kolebaniy pri garmonicheskom vozdeystvii. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki. 2010. №1. S. 113-122.
2. Shein A.I., Shmelev D.A. Otsenka effektivnosti aktivnogo zhidkostnogo gasitelya kolebaniy vysotnykh sooruzheniy pri nestatsionarnykh vozdeystviyakh. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2014. №1 (252). S. 59-63.
3. Shein A.I., Zemtsova O.G. Snizhenie urovnya kolebaniy sistemy «uprugoe osnovanie – vysotnoe sooruzhenie» s pomoshch'yu nelineynogo dinamicheskogo gasitelya. Regional'naya arkhitektura i stroitel'stvo. 2011. №2. S. 83-90.
4. Shein A.I., Zav'yalova O.B. Raschet monolitnykh zhelezobetonnykh karkasov s uchetom posledovatel'nosti vozvedeniya, fizicheskoy nelineynosti i polzuchesti betona. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2012. №5. S. 64-69.
5. Shein A.I. Reshenie mnogoparametricheskoy zadachi dinamiki sterzhnevykh sistem metodom setochnoy approksimatsii. Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo. 2002. №2. S. 27.
6. Shein A.I., Zemtsova O.G. Skhemy i teoriya gasiteley prostranstvennykh kolebaniy sooruzheniy. Regional'naya arkhitektura i stroitel'stvo. 2010. №1. S. 45-52.
7. Shein A.I., Zaytsev M.B. Metod smeshchennykh raznostey dlya resheniya sistem differentsial'nykh uravneniy dvizheniya mekhanicheskikh sistem. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2012. №2. S. 38-41.

8. Shein A.I., Shmelev D.A. Postroenie i realizatsiya matematicheskoy modeli gasheniya kolebaniy vysotnykh zdaniy s pomoshch'yu reaktivnykh gasiteley. Regional'naya arkhitektura i stroitel'stvo. 2014. №1. S. 96-103.

9. Zavyalova O.B.1, Shein A.I.2, Application of Grid Approximation Method for the Calculation of Monolithic Reinforced Concrete Frame Taking into Account Construction Sequence and Concrete Creep // International Conference on Advanced Engineering and Technology (ICAET 2014), December 19-21, 2014, Incheon, South Korea. Applied Mechanics and Materials Vols. 752-753, 2015, p. 617-623.

10. Shein A.I., Monakhov V.A. Algoritm postroeniya geometricheskoy matritsy sterzhnevoy sistemy // Internet-zhurnal «NAUKOVEDENIE» Tom 7, №3 (2015) http://naukovedenie.ru/PDF/50TVN315.pdf (dostup svobodnyy). Zagl. s ekrana. Yaz. rus., angl. DOI: 10.15862/50TVN315.

11. Reytman M.I., Shapiro G.S. Metody optimal'nogo proektirovaniya deformiruemykh tel. – M.: Nauka, 1976. – 266 s.

12. Sbornik zadach po matematike dlya vtuzov. Spetsial'nye kursy. Ch.Z. – M.: Nauka, 1984. – 610 s.

13. Alekseev V.M., Galeev E.M., Tikhomirov V.M. Sbornik zadach po optimizatsii. – M.: Nauka, 1984. – 288 s.

14. Gol'dshteyn Yu.B., Solomeshch M.A. Variatsionnye zadachi statiki optimal'nykh sterzhnevykh sistem. – L.: Izd-vo Leningr. un-ta, 1980. – 208 s.

15. Troitskiy V.A., Petukhov L.V. Optimizatsiya formy uprugikh tel. – M.: Nauka, 1982. – 432 s.

16. Piskunov N.S. Differentsial'noe i integral'noe ischisleniya. T.I. – M.: Nauka, 1966. – 416 s.

17. Malkov V.P., Ugodchikov A.G. Optimizatsiya uprugikh sistem. – M.: Nauka, 1981. – 288 s.

18. Efimov A.V., Zolotarev Yu.G., Terpigoreva V.M. Matematicheskiy analiz. Spetsial'nye razdely. 4.2. Primenenie nekotorykh metodov matematicheskogo i funktsional'nogo analiza. – M. Vysshaya shkola, 1980. – 296 s.

19. El'sgol'ts L.E. Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie. – M.: Nauka, 1965. – 425 s.

20. Mazhid K.I. Optimal'noe proektirovanie konstruktsiy. – M.: Vysshaya shkola, 1979. – 240 s.

21. Rekleytis G., Reyvindran A., Regsdel K. Optimizatsiya v tekhnike. – M.: Mir, 1986. – 348 s.