

УДК 621.396.2 + 621.391.64

Мясин Константин Игоревич

ГКОУ ВПО «Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации»

Россия, Орёл¹

Сотрудник

E-Mail: fmmc@mail.ru

Модель М-го симметричного канала с квантовым шумом

Аннотация: В связи с ростом объёмов передаваемой информации, расширением перечня телекоммуникационных услуг и одновременным повышением требований к их качеству перед операторами Единой сети электросвязи России возникает проблема увеличения пропускной способности имеющихся линий связи. Некоторые операторы уже перешли на технологию когерентного приёма в своих волоконно-оптических транспортных сетях связи (ВОСС) [1]. Однако такой переход не всегда экономически оправдан ввиду высокой стоимости оборудования.

Многоуровневые форматы модуляции сочетают в себе высокую спектральную эффективность и устойчивость к воздействию дисперсии, что обуславливает их применения при необходимости увеличения скорости передачи в действующих системах связи со спектральным уплотнением.

В настоящей статье рассматривается модель волоконно-оптического канала связи, позволяющая находить оптимальное расположение уровней сигналов с многоуровневой модуляцией интенсивности (ИМ-М). Данная модель построена в соответствии с постулатами квантовой электродинамики и имеет хорошую сходимость к результатам известных исследований.

Предложенная модель может быть применена для решения широкого класса оптимизационных задач синтеза и анализа волоконно-оптических линий связи с многоуровневыми сигналами.

Ключевые слова: Волоконно-оптические системы передачи; многоуровневые сигналы; некогерентный приём; сигнальное созвездие; модуляция интенсивности; квантовый шум; модель канала связи; помеха; оптическое отношение сигнал-помеха (ООСП); фотон.

Идентификационный номер статьи в журнале 11TVN114

¹ 302034, г. Орёл, ул. Приборостроительная, д. 35

Konstantin Myasin
The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation
Russia, Orel
E-Mail: fmmc@mail.ru

The model of M-ary symmetrical channel with quantum noise

Abstract: In connection with volumes of the transferred information grow, the list of telecommunication services extends and at the same time increase the quality requirements. Russian operators of Uniform telecommunication network should solve the problem of increasing the throughput of existing lines. Some Russian operators have already moved to coherent detection technology in own fiber-optic transport network. However, this transition is uneconomical due to the high cost of equipment.

Multilevel modulation formats include high spectral efficiency and resistance to dispersion, it is useful for increasing the transmission rate in communication systems with wavelength division multiplexing.

Article presents a model of fiber-optic channel model, which allows finding the optimal location of the signal levels with multilevel modulation intensity (IM-M). The model is create according to postulates of quantum electrodynamics and has good convergence to results of known researches.

This model can be a solution to many optimization problems of synthesis and analysis of fiber-optical communication lines with multilevel signals.

Keywords: Fiber-optic communication systems; multilevel signals; no coherent detection; signal stars; intensity modulation; quantum noise; model of communication channel; optical signal to noise ratio; photon.

Identification number of article 11TVN114

Как показано в работах [2–5] разумный баланс между пропускной способностью и ценой обеспечивают некогерентные волоконно-оптические системы передачи (ВОСП) при использовании сигналов повышенной информационной ёмкости. Изучение предметной области выявило недостаток моделей, пригодных для описания волоконно-оптических каналов связи с такими сигналами. Имеющиеся модели не учитывают влияние квантового шума, либо не позволяют описывать сигналы ИМ-М.

В соответствии с [6], каналы связи, в которых квантовый шум ограничивает качество приёма сообщений, называются квантовыми. Квантовые каналы обладают специфическими свойствами [6] выделяющими их в отдельный класс:

- тепловой шум может быть пренебрежимо мал;
- параметры сигнала случайны;
- принимаемые сигналы необходимо рассматривать во временных и пространственных координатах одновременно;
- затруднена согласованная фильтрация и пространственная селекция и др.

Рассмотрим участок ВОСП до фотодетектора. Такой подход позволяет создать универсальную модель, не зависящую от быстроразвивающейся компонентной базы фотодетекторов, схем постобработки сигнала и помехоустойчивых кодеров. В рамках данного ограничения показателем качества решения задачи синтеза многоуровневого оптического сигнала удобно выбрать отношение оптического сигнала к мощности оптической помехи (ООСП, OSDR). ООСП позволяет определить «чистый» выигрыш от применения того или иного сигнального созвездия, безусловно, применение новейших фотоприёмных устройств и мощных каскадных помехоустойчивых кодов позволят получить меньшее значение коэффициента ошибок чем непосредственная конвертация ООСП.

Цель моделирования: получить аналитические выражения, описывающие зависимость системных параметров (скорости и качества передачи) в главном оптическом тракте (ГОТ) от управляемых параметров ВОСП в условиях применения многоуровневых линейных сигналов.

ООСП по определению:

$$OSDR = \frac{P_c}{P_n}, \quad (1)$$

где P_c – мощность оптического сигнала; P_n – мощность оптической помехи, включающая мощность оптического шума. Учитывая, что в оптическом диапазоне электромагнитных волн $kT \ll \hbar\nu$ [7], а значит шумами источника и среды за исключением квантового можно пренебречь.

Сигнал на входе фотодетектора, в общем виде представляет суперпозицию полезного сигнала и помехи:

$$s(t) = q(t) + n(t), \quad (2)$$

где $q(t)$ – полезный сигнал, определяемый численным методом в соответствии с [8] из начальных условий, определяющих огибающую оптического импульса, формируемую источником оптического излучения; $n(t)$ – квантовый шум.

Энергия сигнала $s(t)$ определяется

$$E = \int_0^T s^2(t) dt, \quad (3)$$

МОЩНОСТЬ

$$P_c = \frac{E}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt. \quad (4)$$

Так как сигнал на входе фотоприёмного устройство представляет собой случайный процесс², то мощность конкретной реализации позволяет определить лишь текущее значение показателя сигнал-помеха. Математическое ожидание случайного процесса $s(t)$, напротив, позволяет вычислить ООСП. Искомое математическое ожидание ($M[x]$) мощности можно вычислить

$$\begin{aligned} M[P_c] &= M \left[\frac{1}{T} \int_0^T [q^2(x) + 2q(t)n(t) + n^2(t)] dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T M[q^2(x)] dt + \frac{2}{T} \int_0^T M[q(t)n(t)] dt + \frac{1}{T} \int_0^T M[n^2(t)] dt \end{aligned} \quad (5)$$

Данное выражение содержит матожидание мощности полезного сигнала, шума и неразделимую смесь сигнала и шума, так же характеризующее мощности оптической помехи. Тогда мощность помехи:

$$P_n = \frac{2}{T} \int_0^T M[q(t)n(t)] dt + \frac{1}{T} \int_0^T M[n^2(t)] dt. \quad (6)$$

Слагаемые (5) для случая систем со спектральным разделением каналов (ВОСП-СР) можно определить в системе базисных ортонормированных функций [9] с учётом количества спектральных каналов (СК):

$$M[q(t)] = M \left[\sum_{i=1}^{N_{СК}} q_i(t) \right] = M \left[\sum_{i=1}^{N_{СК}} v_i(t) \cdot a_i \right] = \sum_{i=1}^{N_{СК}} v_i(t) \cdot M[a_i], \quad (7)$$

где $N_{СК}$ – количество спектральных каналов в системе ВОСП-СР, $q_i(t)$ – оптический сигнал на i -й несущей; $v_i(t)$ – оптическая несущая i -го спектрального канала как функция времени; a_i – относительная координата точки сигнального созвездия оптического сигнала (принимает значения из отрезка $[0; M - 1]$);

$$M[q^2(t)] = M \left[\sum_{i=1}^{N_{СК}} v_i(t) \cdot v_j(t) \cdot a_i \cdot a_j \right] = \sum_{i=1}^{N_{СК}} \sum_{j=1}^{N_{СК}} v_i(t) \cdot v_j(t) \cdot M[a_i \cdot a_j], \quad (8)$$

² В соответствии с принципом неопределенности в элементарном сигнале, заданном частотой несущей и амплитудой огибающей может быть однозначно детерминирована только средняя энергия сигнала [6].

$$M[q(t)n(t)] = \sum_{i=1}^{N_{ck}} v_i(t) \cdot M[a_i \cdot n_i(t)], \quad (9)$$

$$M[n^2(t)] = M\left[\sum_{i=1}^{N_{ck}} n_i^2(t)\right]. \quad (10)$$

С учётом изложенного выражение для выбранного показателя качества (1) можно переписать:

$$OSDR = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T M[q^2(x)] dt}{\frac{2}{T} \int_0^T M[q(t)n(t)] dt + \frac{1}{T} \int_0^T M[n^2(t)] dt} =$$

$$= \frac{\int_0^T \sum_{i=1}^{N_{ck}} \sum_{j=1}^{N_{ck}} v_i(t) \cdot v_j(t) \cdot M[a_i \cdot a_j] dt}{2 \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{ck}} v_i(t) \cdot M[a_i \cdot n_i(t)] dt + \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{ck}} M[n_i^2(t)] dt}, \quad (11)$$

причём, учитывая условие ортонормированности несущих ВОСП-СР [3, 7, 9]:

$$\int_0^T (v_i(t) \cdot v_j(t)) dt = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ \int_0^T v_i^2(t) dt = 1, i = j \end{cases}, \quad (12)$$

$$M[a_i \cdot a_j] = \begin{cases} M[a_i] \cdot M[a_j], i \neq j, \\ M[a_i^2], i = j \end{cases}. \quad (13)$$

Таким образом, числитель (11) можно записать как

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{N_{ck}} \sum_{j=1}^{N_{ck}} v_i(t) \cdot v_j(t) \cdot M[a_i \cdot a_j] dt = \begin{cases} \frac{0}{N_{ck}} \cdot \sum_{i=1}^{N_{ck}} M[a_i] M[a_j] = 0, i \neq j, \\ \frac{1}{N_{ck}} \cdot \sum_{i=1}^{N_{ck}} M[a_i^2], i = j \end{cases}, \quad (14)$$

учитывая что

$$M[a_i^2] = \sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot p_{im}, \quad (15)$$

выражение (14) запишем

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{N_{СК}} v_i(t) \cdot v_j(t) \cdot M[a_i \cdot a_j] dt = \sum_{i=1}^{N_{СК}} \sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot p_{im}, i = j, \quad (16)$$

где A_{im} – амплитуда символа с m -м уровнем в i -ом СК; p_{im} – вероятность передачи символа с m -м уровнем в i -ом СК. Выражение (16) описывает среднее значение оптического сигнала в световоде (одновременно во всех спектральных каналах).

Аналогичным образом перепишем знаменатель выражения (11) с целью получения зависимости показателя качества только от известных параметров.

Представим шумовую компоненту в виде разложения в обобщённый ряд Фурье:

$$n_i(t) = \sum_{k=1}^K \eta_{ik} \cdot \varphi_{ik}(t), \quad (17)$$

где $\varphi_{ik}(t)$ – элементарная функция обладающая энергией фотона ($E_{\varphi_i} = h\nu_i$) на частоте i -ого спектрального канала в k -ой временной интервал; η_{ik} – количество посылок $\varphi_i(t)$ в течение интервала времени $[k - 1; k)$; K – количество элементарных посылок $\varphi_i(t)$ на длительности импульса сигнала (см. рис. 1).

Известно [7], что квантовый шум (КШ) пропорционален квадратному корню мощности сигнала (см. рис. 1, а). Площадь фигуры под огибающей КШ можно аппроксимировать некоторыми функциями времени ($\varphi_{ik}(t)$). Такое представление хорошо согласуется с положениями квантовой электродинамики (КЭД) [10], ведь количество фотонов КШ счётно. Таким образом, (17) не является математической абстракцией, а имеет вполне определённый физический смысл. В одном спектральном канале функции ($\varphi_{ik}(t)$) различаются только временным интервалом своего действия, определяемым индексом времени:

$$P_{\varphi_{ik}} = \begin{cases} 0, t \neq [k; k + 1)\tau_u, \\ \frac{h\nu_i}{\tau_u}, t = [k; k + 1)\tau_u, \end{cases} \quad (18)$$

где τ_u – длительность оптического импульса, определяемая как $1/R$ (R – техническая скорость передачи информации). Каждой функции ($\varphi_{ik}(t)$) ставится в соответствие коэффициент (η_{ik}), определяющий количество элементарных функций, необходимых для аппроксимации мгновенного (во временном интервале $[k - 1; k)$) значения огибающей КШ. В общем случае длительность введённой функции ($\varphi_{ik}(t)$) может быть произвольной (см. рис. 1, в), однако, амплитуда должна быть такой, чтобы выполнялось требование к мощности этой функции (18). Единственное требование к длительности функции ($\varphi_{ik}(t)$), которое использовано при выводе конечного уравнения – равенство всех временных интервалов дискретизации ($k_1 = k_2 = \dots = k_K$).

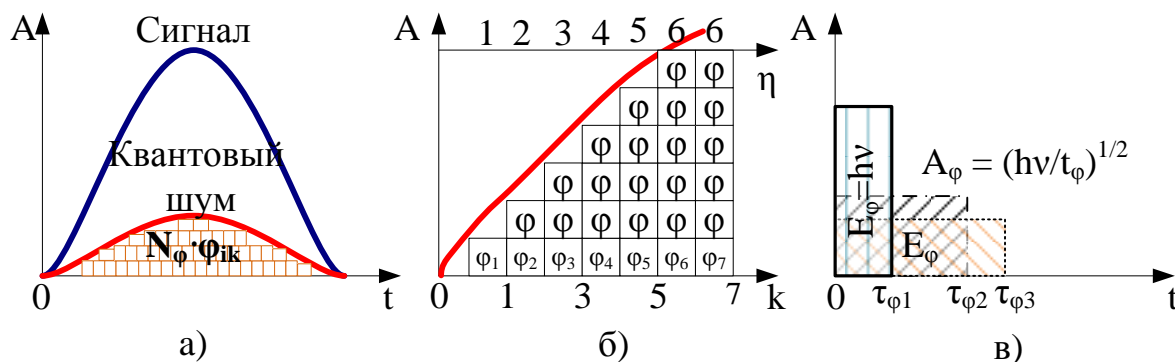


Рис. 1. Представление квантового шума в виде элементарных посылок $\varphi_{ik}(t)$

Учитывая (17) и свойство линейности [11] математического ожидания можно записать:

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{N_{ck}} M[n_i^2(t)] dt = \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{ck}} M \left[\left(\sum_{k=1}^K \eta_{ik} \cdot \varphi_{ik}(t) \right)^2 \right] dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_{ck}} M \left[\int_0^T \left(\sum_{k=1}^K \eta_{ik} \cdot \varphi_{ik}(t) \right)^2 dt \right] = \sum_{i=1}^{N_{ck}} M \left[\sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K \int_0^T \eta_{ik} \cdot \eta_{ik'} \cdot \varphi_{ik}(t) \cdot \varphi_{ik'}(t) dt \right] = \dots (19)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_{ck}} M \left[\sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K \eta_{ik} \cdot \eta_{ik'} \cdot \int_0^T \varphi_{ik}(t) \cdot \varphi_{ik'}(t) dt \right]$$

Так как, функция $\varphi_{ik}(t)$ ортогональна как по частотной (i) (16) так и по временной (k) (18) координатам, то при ($k \neq k'$) правая часть (19) обращается в ноль, в противном случае:

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{N_{ck}} M[n_i^2(t)] dt = \sum_{i=1}^{N_{ck}} M \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(\eta_{ik}^2 \cdot \int_0^T \varphi_{ik}^2(t) dt \right) \right] = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{N_{ck}} \sum_{k=1}^K h\nu_i \cdot M[\eta_{ik}^2]. \quad (20)$$

Второй начальный момент от количества элементарных функций $\varphi_{ik}(t)$ по определению [11]:

$$M[\eta_{ik}^2] = \int_0^{\infty} \eta_{ik}^2 \cdot \omega(\eta_{ik}) d\eta_{ik} \quad (21)$$

$$\omega(\eta_{ik}) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta_{ik}, a_i) da_i \quad (22)$$

$$\omega(\eta_{ik}, a_i) = \omega(\eta_{ik} | a_i) \cdot \omega(a_i) \quad (23)$$

Здесь и далее записаны выражения для непрерывной случайной величины в связи с удобством интегрирования некоторых выражений, а, следовательно, упрощения вычислений. Позже будет осуществлён переход к дискретным случайным величинам (с учётом природы электромагнитного излучения оптического диапазона).

Аналогично (17), можно записать разложение в обобщённый ряд Фурье для полезного сигнала. Базисной функцией так же будет элементарная функция ($\varphi_{ik}(t)$), а коэффициентами разложения – количество таких функций на k -ом временном интервале:

$$q_i(t) = \sum_{k=1}^K N_{ik} \cdot \varphi_{ik}(t). \quad (24)$$

Используя введённое число элементарных функций, аппроксимирующих полезный сигнал, условную плотность вероятности в выражении (23) можно представить через двумерную ФРПВ:

$$\omega(\eta_{ik} | a_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta_{ik}, N_{ik} | a_i) dN_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta_{ik} | N_{ik}, a_i) \cdot \omega(N_{ik} | a_i) dN_{ik}, \quad (25)$$

где N_{ik} – количество функций ($\varphi_{ik}(t)$), описывающих полезный сигнал (аналогично рис. 1).

Исходя из условия (18), количество функций ($\varphi_{ik}(t)$), применяемое для аппроксимации сигнала и шума, имеет смысл количества фотонов сигнала (N) и шума (η) соответственно. Как показано выше, это не противоречит теории современной КЭД.

Вообще говоря, определить среднее значение фотоотсчётов хаотического светового поля ($M[\eta_i]$) для заданного спектра достаточно трудно, этот вопрос освещён с позиций КЭД в [10]. По этой причине в настоящей работе вывод модели построен без непосредственного вычисления математического ожидания числа шумовых фотонов. То есть из нескольких возможных уравнений, дающих искомый результат, предпочтение отдаётся тому, которое не содержит трудно вычислимого компонента.

Значение огибающей оптического импульса (a), количество сигнальных фотонов (N) и количество шумовых фотонов (η) связаны между собой стохастической зависимостью:

$$a_i \rightarrow N_{ik} \rightarrow \eta_{ik}. \quad (26)$$

Учитывая это, условную двумерную плотность вероятности в выражении (25) можно записать упрощённо:

$$\omega(\eta_{ik} | N_{ik}, a_i) = \omega(\eta_{ik} | N_{ik}). \quad (27)$$

Количество шумовых фотонов в конкретной реализации (рис. 2) сигнала можно определить как модуль центрированной случайной величины:

$$\eta_{ik} = |N_{ik} - M[N_{ik}]|. \quad (28)$$

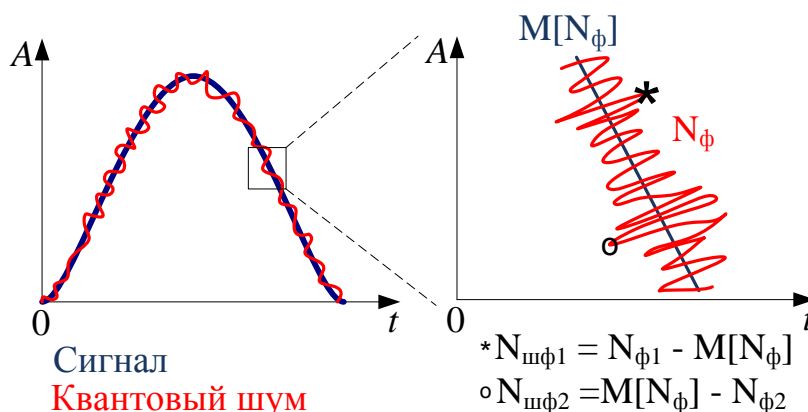


Рис. 2. Сигнал и квантовый шум во временной области

В соответствии с выражением (16) для любого спектрального канала справедливо:

$$q_i(t) = v_i(t) \cdot a_i, \quad (29)$$

в то же время, учитывая (24), можно записать равенство интегралов вторых начальных моментов:

$$\begin{aligned} M \left[\int_{-\infty}^{\infty} (a_i \cdot v_i(t))^2 dt \right] &\equiv M \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^K N_{ik} \cdot \varphi_{ik}(t) \right)^2 dt \right] = \\ &= M \left[\sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K N_{ik} \cdot N_{ik'} \cdot \int_0^T \varphi_{ik}(t) \cdot \varphi_{ik'}(t) dt \right] = \\ &= M \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(N_{ik}^2 \cdot \int_0^T \varphi_{ik}^2(t) dt \right) \right] \end{aligned} \quad (30)$$

При условии ортонормированности несущих (14), ортогональности элементарных функций $\varphi_{ik}(t)$, а так же взаимной независимости³ (N_{ik}), (30) записывается в виде:

$$\frac{1}{N_{ск}} M[a_i^2] = \frac{h\nu_i}{K} \cdot \sum_{k=1}^K M[N_{ik}^2]. \quad (31)$$

Количество излучаемых фотонов (N_i) за равные временные интервалы ($\tau_{и}$) случайно. Подходы к описанию статистик фотоотсчётов базируются на исследованиях Ф.Т. Аретци, который в 1966 году экспериментально доказал гипотезы Р. Дж. Глаубера [11]. Суть гипотез состоит в том, что некогерентный (хаотический) источник оптического излучения с достаточной точностью описывается распределением Бозе-Эйнштейна, фотоотсчёты когерентного источника подчинены закону Пуассона, а распределение Лагерра описывает смесь узкополосного гауссова шума и монохроматического (или турбулентного) поля, т.е. является промежуточным между монохроматичным и хаотическим. Следует отметить, что статистики Бозе-Эйнштейна и Лагерра относятся к классу условно-пуассоновских процессов, что характеризует общность математического аппарата, описывающего квантовые явления.

³ В установившемся режиме излучения для супергауссовского импульса, сформированного внешним модулятором среднее количество фотонов излучённых в различные k-е временные интервалы приблизительно одинаково ($M[N_{ik}] \approx M[N_{ik}]$). В противном случае импульс супергауссовой формы не имел бы плоской вершины.

Таким образом, опираясь на работы [10, 12, 7] и полагая излучение лазера передающего оптического модуля когерентным и монохроматичным, статистику фотоотсчётов можно описать законом Пуассона:

$$p(N_i) = \frac{M[N_i]^{N_i}}{N_i!} \cdot \exp(-M[N_i]), \quad (32)$$

другими словами условная плотность распределения вероятности:

$$\omega(N_{ik} | a_i) = \frac{M[N_{ik}]^{N_{ik}}}{N_{ik}!} \cdot \exp(-M[N_{ik}]). \quad (33)$$

Огибающая оптического сигнала изменяется значительно медленнее несущего колебания ($v_i(t)$). Исходя из этого, количество фотонов, излучённых в различные k -е временные интервалы, можно считать² независимым и распределённым в соответствии с законом Пуассона (32). Используя данное свойство и стационарность [11] пуассоновского случайного процесса:

$$\frac{1}{N_{ck}} M[a_i^2] = \frac{h\nu_i}{K} \cdot M[N_i^2] \cdot K, \quad (34)$$

откуда

$$M[N_i^2] = \frac{M[a_i^2]}{N_{ck} \cdot h\nu_i}. \quad (35)$$

или используя (15):

$$M[N_{ik}^2] = M[N_i^2] = \frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot p_{im}}{N_{ck} \cdot h\nu_i}. \quad (36)$$

Таким образом, выражение (33) может быть записано в виде:

$$\omega(N_{ik} | a_i) = \left(\frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot p_{im}}{N_{ck} \cdot h\nu_i} \right)^{N_{ik}} \frac{1}{N_{ik}!} \cdot \exp \left(- \frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot p_{im}}{N_{ck} \cdot h\nu_i} \right). \quad (37)$$

Учитывая (28) и определение дельта-функции [11] выражение (27) трансформируется к виду:

$$\omega_{\eta_{ik}|N_{ik}}(\eta_{ik} | N_{ik}) = \delta\{\eta_{ik} - |N_{ik} - M[N_{ik}]\}. \quad (38)$$

Матожидание числа сигнальных фотонов в k -й интервал времени в i -ом спектральном канале можно найти, используя свойство пуассоновской случайной величины [11]:

$$D[N_{ik}] = M[N_{ik}^2] - M[N_{ik}]^2 = M[N_{ik}], \quad (39)$$

$$M[N_{ik}]^2 + M[N_{ik}] - M[N_{ik}^2] = 0. \quad (40)$$

Решая квадратное уравнение (40) относительно матожидания числа сигнальных фотонов получим единственный корень, имеющий физический смысл:

$$M[N_{ik}] = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4M[N_{ik}^2]}}{2}. \quad (41)$$

Используя выражения (22–25) и (38), приведём (21) к виду:

$$\begin{aligned} M[n_{ik}^2] &= \int_0^\infty \left(\eta_{ik}^2 \cdot \int_{-\infty}^\infty \left[\omega_{a_i}(a_i) \cdot \int_{-\infty}^\infty (\omega_{\eta_{ik}|N_{ik}}(\eta_{ik} | N_{ik}) \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \omega_{N_{ik}|a_i}(N_{ik} | a_i) dN_{ik} \right) da_i \right] d\eta_{ik} = \\ &= \int_0^\infty \left(\eta_{ik}^2 \cdot \int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty (\delta\{\eta_{ik} - |N_{ik} - M[N_{ik}]\}) \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \omega_{N_{ik}|a_i}(N_{ik} | a_i) dN_{ik} \right) \cdot \omega_{a_i}(a_i) da_i \right] d\eta_{ik} \end{aligned} \quad (42)$$

По определению дельта-функции, и как следует из фильтрующего свойства [11]:

$$\delta\{\eta_{ik} - |N_{ik} - M[N_{ik}]\} = \begin{cases} 0, \eta_{ik} - |N_{ik} - M[N_{ik}]| \neq 0 \\ 1, \eta_{ik} - |N_{ik} - M[N_{ik}]| = 0 \end{cases}. \quad (43)$$

Следует отметить, что η_{ik} может быть не целым, так как среднее число сигнальных фотонов ($M[N_{ik}]$) не обязательно целое число. Данное положение не противоречит интуитивному определению числа шумовых фотонов (28).

Учитывая дискретную природу света [10, 7] интегралы в выражении (42) заменим суммами и выразим энергию шумовой компоненты:

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{N_{ck}} M[n_i^2(t)] dt = \begin{cases} 0, \eta_{ik} - |N_{ik} - M[N_{ik}]| \neq 0 \\ \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{N_{ck}} \sum_{k=1}^K h\nu_i \cdot M[n_{ik}^2], \eta_{ik} - |N_{ik} - M[N_{ik}]| = 0 \end{cases}, \quad (44)$$

таким образом, при условии равенства аргумента дельта-функции (42) нулю, выражение (44) с учётом (42), (37), (41) можно записать:

$$\begin{aligned} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{ck}} M[n_i^2(t)] dt &= \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{N_{ck}} \sum_{k=1}^K h\nu_i \cdot \int_0^\infty \left(\eta_{ik}^2 \cdot \int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty (\delta\{\eta_{ik} - |N_{ik} - M[N_{ik}]\}) \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \omega(N_{ik} | a_i) dN_{ik} \right) \cdot \omega(a_i) da_i \right] d\eta_{ik} = \\ &= \sum_{i=1}^{N_{ck}} \sum_{k=1}^K \sum_{\eta=0}^\infty \sum_{N=0}^\infty \left(\frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot P_{im}}{N_{ck} \cdot h\nu_i} \right)^{N_{ik}} \frac{h\nu_i \cdot \eta_{ik}^2}{K \cdot N_{ik}!} \cdot \exp \left(- \frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot P_{im}}{N_{ck} \cdot h\nu_i} \right) \end{aligned} \quad (45)$$

Смесь сигнальной и шумовой компоненты (первое слагаемое в знаменателе (13)) можно записать следующим образом:

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{N_{CK}} v_i(t) \cdot M[a_i \cdot n_i(t)] dt = \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{CK}} v_i(t) \cdot M \left[a_i \cdot \sum_{k=1}^K \eta_{ik} \cdot \varphi_{ik}(t) \right] dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_{CK}} \sum_{k=1}^K \int_0^T v_i(t) \cdot \varphi_{ik}(t) dt \cdot M[a_i \cdot \eta_{ik}] \quad (46)$$

Интеграл в правой части выражения (46) можно упростить, приняв волновую модель фотона в виде отрезка синусоиды [12] вида:

$$\varphi_{ik}(t) = \begin{cases} \sin(2\pi \cdot v_i t), t \in [k; k+1) \cdot \tau_u, \\ 0, t \notin [k; k+1) \cdot \tau_u \end{cases} \quad (47)$$

где τ_u – длительность импульса.

Учитывая ограниченную область интегрирования функции $\varphi_{ik}(t)$ и гармоническую природу оптической несущей в установившемся режиме излучения лазера:

$$\int_0^T v_i(t) \cdot \varphi_{ik}(t) dt = \int_{k\tau_u}^{(k+1)\tau_u} \sin^2(2\pi v_i t) dt =$$

$$= \frac{\sin(4\pi\tau_u k v_i) - \sin(4\pi\tau_u v_i (k+1)) + 4\pi\tau_u v_i}{8\pi v_i} \quad (48)$$

$$M[a_i \cdot \eta_{ik}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_i \cdot \eta_{ik} \cdot \omega(\eta_{ik}, a_i) da_i d\eta_{ik} \quad (49)$$

В соответствии с (23, 25) двумерная плотность распределения вероятности в выражении (49) будет записана:

$$\omega(\eta_{ik}, a_i) = \omega(a_i) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta_{ik} | N_{ik}, a_i) \cdot \omega(N_{ik} | a_i) dN_{ik} \quad (50)$$

Таким образом, выражение (49) вычисляется как:

$$M[a_i \cdot \eta_{ik}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [a_i \cdot \eta_{ik} \cdot \omega(a_i) \cdot (\omega(\eta_{ik} | N_{ik}) \cdot \omega(N_{ik} | a_i) dN_{ik})] da_i d\eta_{ik}, \quad (51)$$

причём, в соответствии с (45):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta_{ik} | N_{ik}) \cdot \omega(N_{ik} | a_i) dN_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot P_{im}}{N_{CK} \cdot h\nu_i} \right)^{N_{ik}} \frac{1}{N_{ik}!} \cdot \exp \left(- \frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot P_{im}}{N_{CK} \cdot h\nu_i} \right) dN_{ik}, \quad (52)$$

при условии

$$\eta_{ik} - |N_{ik} - M[N_{ik}]| = 0 \quad (53)$$

Отсюда следует, что при истинности (53):

$$\begin{aligned}
 M[a_i \cdot \eta_{ik}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{ik} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} a_i \cdot \omega(a_i) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\omega(\eta_{ik} | N_{ik}) \cdot \omega(N_{ik} | a_i) dN_{ik}) da_i d\eta_{ik} = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{ik} \cdot M[a_i] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot p_{im}}{N_{ck} \cdot h\nu_i} \right)^{N_{ik}} \frac{1}{N_{ik}!} \cdot \exp\left(-\frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot p_{im}}{N_{ck} \cdot h\nu_i}\right) dN_{ik} d\eta_{ik} =
 \end{aligned} \tag{54}$$

интегралы можно заменить суммами исходя из положения, что число сигнальных и шумовых фотонов принадлежит множеству натуральных чисел ($N, \eta \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
 M[a_i \cdot \eta_{ik}] &= M[a_i] \cdot \sum_{\eta=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\eta_{ik}}{N_{ik}!} \cdot \left(\frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot p_{im}}{N_{ck} \cdot h\nu_i} \right)^{N_{ik}} \cdot \exp\left(-\frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot p_{im}}{N_{ck} \cdot h\nu_i}\right) = \\
 &= \sum_{m=1}^M A_{im} \cdot p_{im} \cdot \sum_{\eta=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\eta_{ik}}{N_{ik}!} \cdot \left(\frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot p_{im}}{N_{ck} \cdot h\nu_i} \right)^{N_{ik}} \cdot \exp\left(-\frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot p_{im}}{N_{ck} \cdot h\nu_i}\right)
 \end{aligned} \tag{55}$$

Подставляя в (45) результаты (48) и (55) можно получить конечное выражение для вычисления энергии смеси сигнала и помехи:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{ck}} v_i(t) \cdot M[a_i \cdot \eta_i(t)] dt &= \sum_{i=1}^{N_{ck}} \sum_{k=1}^K \int_0^T v_i(t) \cdot \varphi_{ik}(t) dt \cdot M[a_i \cdot \eta_{ik}] = \\
 &= \sum_{i=1}^{N_{ck}} \sum_{k=1}^K \left[\sum_{m=1}^M A_{im} \cdot p_{im} \cdot \sum_{\eta=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\eta_{ik}}{N_{ik}!} \cdot \left(\frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot p_{im}}{N_{ck} \cdot h\nu_i} \right)^{N_{ik}} \cdot \exp\left(-\frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot p_{im}}{N_{ck} \cdot h\nu_i}\right) \right] \times \\
 &\quad \times \frac{\sin(4\pi\tau_u k\nu_i) - \sin(4\pi\tau_u \nu_i(k+1)) + 4\pi\tau_u \nu_i}{8\pi\nu_i}
 \end{aligned} \tag{56}$$

С учётом (16), (45), (56) и условия (53) выражение для определения выбранного показателя качества передачи многоуровневого сигнала (11) можно записать в виде, пригодном для вычисления:

$$\begin{aligned}
 OSDR = & \frac{\int_0^T M[q^2(x)]dt}{2 \int_0^T M[q(t)n(t)]dt + \int_0^T M[n^2(t)]dt} = \left(\sum_{i=1}^{N_{CK}} \sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot P_{im} \right) \times \\
 & \times \left[2 \sum_{i=1}^{N_{CK}} \sum_{k=1}^K \left(\sum_{m=1}^M A_{im} P_{im} \cdot \sum_{\eta=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\eta_{ik}}{N_{ik}!} \left(\frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot P_{im}}{N_{CK} \cdot h\nu_i} \right)^{N_{ik}} \exp \left(- \frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot P_{im}}{N_{CK} \cdot h\nu_i} \right) \times \right. \right. \\
 & \times \left. \frac{\sin(4\pi\tau_u k\nu_i) - \sin(4\pi\tau_u \nu_i(k+1) + 4\pi\tau_u \nu_i)}{8\pi\nu_i} \right) + \\
 & \left. + \sum_{i=1}^{N_{CK}} \sum_{k=1}^K \sum_{\eta=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot P_{im}}{N_{CK} \cdot h\nu_i} \right)^{N_{ik}} \frac{h\nu_i \cdot \eta_{ik}^2}{K \cdot N_{ik}!} \cdot \exp \left(- \frac{\sum_{m=1}^M A_{im}^2 \cdot P_{im}}{N_{CK} \cdot h\nu_i} \right) \right]^{-1} \quad (57)
 \end{aligned}$$

Если условие (53) не выполняется ни при каких $\{\eta_{ik}, N_{ik}, A_{im}, p_{im}\}$, то выражение (57) теряет смысл – знаменатель становится равен нулю. Другими словами, не все наборы $\{\eta_{ik}, N_{ik}, A_{im}, p_{im}\}$ вносят конструктивный вклад в мощность помехи. За счёт невыполнения условия (53) часть наборов, не удовлетворяющая реальным значениям статзависимости (26), исключается из рассмотрения.

Так как модель, представленная выражением (57) предназначена для достижения цели исследования, а такая задача поставлена впервые, то необходимо рассмотреть частные случаи, являющиеся крайними условиями для разработанной модели. Такими условиями являются следующие ситуации:

- передача бинарного сигнала;
- передача 4-уровневого сигнала с модуляцией интенсивности (ИМ-4) с равновероятным и равномерным расположением уровней.

С учётом выбранных влияющих параметров можно построить зависимость показателя качества передачи для разных моделей. В источниках [14–16] в качестве показателя качества используется вероятность ошибок или оптическое отношение сигнал-шум (ООСШ, OSNR). Учитывая близость выбранного показателя качества (ООСШ) и табулированную зависимость (58) между коэффициентом ошибок (BER) и OSNR, анализ качества разработанной модели произведем на основе OSNR (рис. 3).

$$\lg(BER) = 10,7 - 1,45 \cdot OSNR. \quad (58)$$

Требования к величине ошибки измерения ООСШ вариативны. Средняя квадратичная ошибка (СКО) измерения ООСШ зависит от значения мощности, попадающий в спектральный диапазон анализа, а, следовательно, от измеренного ООСШ. Современные широко распространённые анализаторы спектра имеют точность до 6 дБ в полосе 0–30 дБм.

Исходя из изложенного, расхождение значения ООСШ, вычисленного с помощью различных моделей, в ключевых точках можно представить в виде таблицы 1.

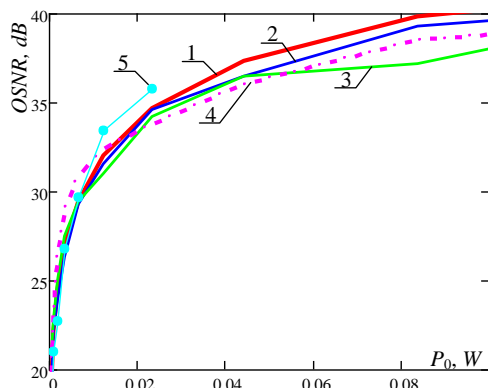


Рис. 3. Зависимость ООСШ от вводимой мощности

Линия 1 – кривая получена имитационным моделированием в OptiSystem (OS); Линия 2 – результат вычисления модели [14]; Линия 3 – результат вычисления модели [15]; Линия 4 – результат вычисления проверяемой модели; Линия 5 – результат интерполяции значений, приведённых в [16]

Таблица 1

СКО вычисления ООСШ в ключевых точках							
ООСШ		OS	по [14]	по [15]	PM	по [16]	Норма по ООСШ [17], дБ
22	OS	-	1,182	1,637	0,59	1,232	2,2
	по [14]		-			0,282	
	по [15]		1,99	-		5,998	
	PM		0,808	0,262	-	1,527	
	по [16]					-	
26	OS	-	0,342	0,335	3,764	0,023	4,3
	по [14]		-			0,0003	
	по [15]		1,355	-		0,089	
	PM		6,376	1,852	-	4,381	
	по [16]					-	
30	OS	-	0,438	0,163	1,828	0,05	7,6
	по [14]		-			0,445	
	по [15]		0,066	-		0,166	
	PM		4,056	3,084	-	1,272	
	по [16]					-	
33	OS	-	0,033	0,0002	0,133	1,814	10,1
	по [14]		-			2,241	
	по [15]		0,039	-		4,314	
	PM		0,3	0,123	-	0,964	
	по [16]					-	

Видно, что разработанная модель имеет самую высокую СКО в большинстве случаев. Тем не менее, полученные значения ошибки не превышают погрешности измерения ООСШ. Следовательно, можно сделать вывод о достаточной точности разработанной модели.

На рисунке 4 представлены графики зависимости ООСШ от вводимой мощности для 16-канальной ВОСП-СР с разряженной сеткой частот (CWDM) со скоростью передачи в каждом спектральном канале 10 Гбит/с (модуляция IM-4) и протяжённостью 50 км. В связи с большой ошибкой экстраполяции результатов моделирования по [14–16] для данных условий, сравнение произведено только с результатами имитационного моделирования в OptiSystem. Наглядна высокая сходимость результатов моделирования различными методами. Заметное расхождение наблюдается в области высоких вводимых мощностей.

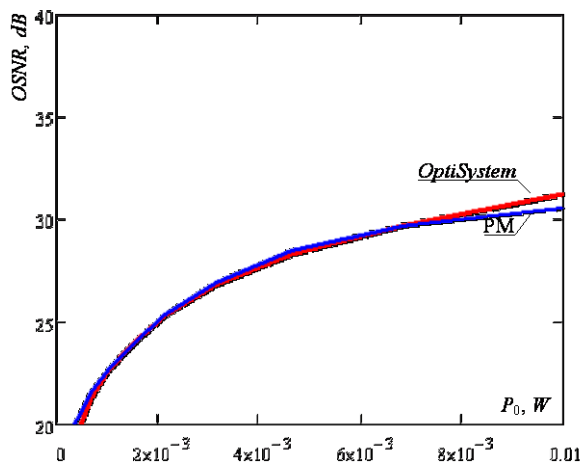


Рис. 4. Зависимость ООСШ от вводимой мощности для 16-канальной ВОСП

Разработанная модель устойчива во всем диапазоне возможных значений параметров активных компонентов ВОСП и показала приемлемую для практических приложений чувствительность.

Данные, полученные в ходе моделирования, сходятся к известным результатам исследований в предметной области, не противоречат физике процессов, протекающих в ГОТ, что свидетельствует об адекватности разработанной модели, правильности применения математического аппарата, корректности постановки и решения задачи моделирования.

Таким образом, выражение (57) связывает отношение оптической мощности сигнала к мощности оптической помехи с параметрами сигнального созвездия IM-M, позволяя тем самым формулировать и решать различные оптимизационные задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наний О.Е. Когерентные системы связи / О.Е. Наний // *Lightwave Russian edition*. – 2008. – №4. – С. 23–27.
2. Величко М.А. Новые форматы модуляции в оптических системах связи / М.А. Величко, О.Е. Наний, А.А. Сусьян // *Lightwave Russian edition*. – 2005. – №4. – С. 21–30.
3. Наний О.Е. Анализ форматов модуляции для систем DWDM со скоростью 40 Гбит/с / О.Е. Наний, В.Н. Трещиков // *Вестник связи*. – 2012. – №1. – С. 35–38.
4. Величко М.А. Уменьшение деградации оптических сигналов в волоконно-оптических системах связи : дис. канд. физ.-мат. наук : 01.04.05. : защищена 24.06.2009 / Величко Максим Андреевич. – Москва, 2009. – 134 с.
5. Саитов И.А. Передача информации многоуровневыми оптическими сигналами / И.А. Саитов, К.И. Мясин // *Телекоммуникации*. – 2012. – №13. – С.28–32.
6. Коржик В.И. Расчёт помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений: Справочник / В.И. Коржик, Л.М. Финк, К.Н. Щелкунов : под ред. Л.М. Финка. – М. : Радио и связь, 1981. – 232 с.
7. Саитов И.А. Теоретические основы построения средств связи оптического диапазона / И.А. Саитов, В.М. Щекотихин. – Орёл : Академия ФСО России, 2008. – 491 с.
8. Зюко А.Г. Теория электрической связи: Учебник для вузов / А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, В.И. Коржик, М.В. Назаров; под. ред. Д.Д. Кловского. – М. : Радио и связь, 1999. – 432 с.
9. Перина Я. Квантовая статистика линейных и не линейных оптических явлений / Я. Перина. – М. : Мир, 1987. – 368с.
10. Королюк, В.С. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк, Н.И. Потапенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – 2-е изд., пер. и доп. – М. : Наука, 1985. – 640 с.
11. Калитеевский Н.И. Волновая оптика: Учебное пособие для университетов / Н.И. Калитеевский. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Высшая школа, 1978. – 383 с.

Рецензент: Любко Александр Юрьевич, сотрудник Академии ФСО России, кандидат технических наук.

REFERENCES

1. Nanij O.E. Kogerentnye sistemy svjazi / O.E. Nanij // Lightwave Russian edition. – 2008. – №4. – S. 23–27.
2. Velichko M.A. Novye formaty moduljacji v opticheskikh sistemah svjazi / M.A. Velichko, O.E. Nanij, A.A. Sus'jan // Lightwave Russian edition. – 2005. – №4. – S. 21–30.
3. Nanij O.E. Analiz formatov moduljacji dlja sistem DWDM so skorost'ju 40 Gbit/s / O.E. Nanij, V.N. Treshhikov // Vestnik svjazi. – 2012. – №1. – S. 35–38.
4. Velichko M.A. Umen'shenie degradacii opticheskikh signalov v volokonno-opticheskikh sistemah svjazi : dis. kand. fiz.-mat. nauk : 01.04.05. : zashhishhena 24.06.2009 / Velichko Maksim Andreevich. – Moskva, 2009. – 134 s.
5. Saitov I.A. Peredacha informacii mnogourovnevnyimi opticheskimi signalami / I.A. Saitov, K.I. Mjasin // Telekomunikacii. – 2012. – №13. – S.28–32.
6. Korzhik V.I. Raschjot pomehoustojchivosti sistem peredachi diskretnyh soobshhenij: Spravochnik / V.I. Korzhik, L.M. Fink, K.N. Shhelkunov : pod red. L.M. Finka. – M. : Radio i svjaz', 1981. – 232 s.
7. Saitov I.A. Teoreticheskie osnovy postroenija sredstv svjazi opticheskogo diapazona / I.A. Saitov, V.M. Shhekotihin. – Orjol : Akademija FSO Rossii, 2008. – 491 s.
8. Göbel B.W. Information-Theoretic Aspects of Fiber-Optic Communication Channels : Doktor-Ingenieurs genehmigten Dissertation / Bernhard Walter Göbel. – Technische universitat munchen, 2010. – 208 c.
9. Zjuko A.G. Teorija jelektricheskij svjazi: Uchebnik dlja vuzov / A.G. Zjuko, D.D. Klovs'kij, V.I. Korzhik, M.V. Nazarov; pod. red. D.D. Klovs'kogo. – M. : Radio i svjaz', 1999. – 432 s.
10. Perina Ja. Kvantovaja statistika linejnyh i ne linejnyh opticheskikh javlenij / Ja. Perina. – M. : Mir, 1987. – 368s.
11. Koroljuk, V.S. Spravochnik po teorii verojatnostej i matematicheskij statistike / V.S. Koroljuk, N.I. Potapenko, A.V. Skorohod, A.F. Turbin. – 2-e izd., per. i dop. – M. : Nauka, 1985. – 640 s.
12. Glauber R.J. Photon counting and field correlations / R.J. Glauber // Materialy konferencii po kvantovoj jelektronike v Pujerto-Riko. – 1965. – S. 788–811.
13. Kaliteevskij N.I. Volnovaja optika: Uchebnoe posobie dlja universitetov / N.I. Kaliteevskij. – 2-e izd., ispr. i dop. – M. : Vysshaja shkola, 1978. – 383 s.
14. Siemetz M. High-order modulation for optical fiber transmission / M. Siemetz. – Berlin : Springer, 2009. – 262 c.
15. Haris M. Advanced modulation formats for high-bit-rate optical networks : dis. kand. tehn. nauk : Jelektronika i komp'juternaja inzhenerija. : zashhishhena 23.04.2008 / Haris Muhammad. – School of Electrical and computer Engineering Georgia Institute of Technology, 2008. – 118 s.
16. Knipp D. Optical signal to noise ratio / D. Knipp, T. Chakma. – Bremen : Mezhdunarodnyj bremens'kij universitet, 2005. – 18 s.
17. Moench, W. Measuring the optical signal-to-noise ratio in agile optical networks / W. Moench, J. Larikova // Paper NFOEC-NWC1 JDSU. – 2007. – 4 c.