

Интернет-журнал «Наукovedение» ISSN 2223-5167 <http://naukovedenie.ru/>

Том 7, №6 (2015) <http://naukovedenie.ru/index.php?p=vol7-6>

URL статьи: <http://naukovedenie.ru/PDF/133TVN615.pdf>

DOI: 10.15862/133TVN615 (<http://dx.doi.org/10.15862/133TVN615>)

УДК 621:51-74

Меньшов Евгений Николаевич

ФГБОУ ВПО «Ульяновский государственный технический университет (УлГТУ)»

Россия, Ульяновск¹

Доцент

Кандидат техник наук

Старший научный сотрудник

E-mail: raynd2@rambler.ru

РИНЦ: http://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=632844

Математическая модель магнитной коагуляции при магнитной сепарации водно-технологических жидкостей от ферромагнитных частиц

¹ 432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32, кафедра «Электроснабжение»

Аннотация. Впервые разработана математическая модель стохастических характеристик дисперсного распределения ферромагнитных примесей в жидких средах при магнитной коагуляции в неоднородном поле. Эта модель получена на основе предложенного нового подхода математического моделирования процесса магнитной коагуляции. Разработанный метод правомерен для произвольного исходного дисперсного распределения твердой фазы. Доказано научное положение, что магнитная коагуляция обусловлена двумя независимыми случайными величинами. В качестве оператора преобразования дисперсного распределения ферромагнитных частиц предложена и обоснована математическая операция – свертка функций распределения случайных величин. Разработана процедура синтеза дискретной весовой функции (ядра) свертки. Разработана теория и методика преобразования дискретной весовой функции в непрерывную весовую функцию при неоднородном магнитном поле. Для оценки интенсивности процесса коагуляции обоснован критерий – коэффициент глубины магнитной коагуляции, который выводится из закона сохранения массы. Установлена зависимость параметров дискретизации непрерывной функции дисперсного распределения агрегированных частиц с коэффициентом глубины магнитной коагуляции. При этом разработанная математическая модель описывает эволюцию дисперсного распределения ферромагнитных примесей от изменения критерия интенсивности магнитной коагуляции. Задача моделирования эволюции во времени магнитной коагуляции будет сводиться к задаче эволюции критерия интенсивности магнитной коагуляции. Коэффициент глубины коагуляции будет зависеть от физико-геометрических параметров индивидуального сепаратора. Таким образом, разработанный метод моделирования процесса магнитной коагуляции конкретно разбивается на концептуальную составляющую и индивидуальную техническую составляющую. Поэтому предложенный метод математического моделирования приближен к реализации практических задач. Разработанная математическая модель позволит управлять востребованным процессом магнитной коагуляции для проектирования эффективных магнитных сепараторов.

Ключевые слова: магнитная сепарация; магнитная коагуляция; ферромагнитные частицы; дисперсное распределение; синтез весовой функции; теорема отсчетов; свертка функций.

Ссылка для цитирования этой статьи:

Меньшов Е.Н. Математическая модель магнитной коагуляции при магнитной сепарации водно-технологических жидкостей от ферромагнитных частиц // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 7, №6 (2015) <http://naukovedenie.ru/PDF/133TVN615.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/133TVN615

Статья опубликована 25.11.2015.

Введение. Большинство современных технологических процессов обработки металлов в машиностроительных и металлургических производствах невозможно без применения водных технологических жидкостей (ВТЖ), которые используются в качестве смазочно-охлаждающих жидкостей (СОЖ) и загрязняются различными примесями. Отработанные ВТЖ должны быть оборотными, а не являться одним из главных источников загрязненности. Правительство Российской Федерации озабочено проблемой сохранения высокого уровня негативного антропогенного воздействия на водные объекты. Для актуализации поставленных задач разработана ФЕДЕРАЛЬНАЯ ЦЕЛЕВАЯ ПРОГРАММА "РАЗВИТИЕ ВОДОХОЗЯЙСТВЕННОГО КОМПЛЕКСА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ В 2012-2020 ГОДАХ", которая направлена на повышение рациональности использования водных ресурсов, на сокращение негативного антропогенного воздействия на водные объекты на основе реконструкции комплексов очистных сооружений и систем оборотного и повторно-последовательного водоснабжения.

Реализация замкнутых технологических циклов применения СОЖ возможно при помощи широкого внедрения в технологические циклы различных сепараторов. Для очистки ВТЖ от ферромагнитных примесей применяются магнитные сепараторы. Современные магнитные сепараторы выполняются на постоянных магнитах, в том числе, и из редкоземельных магнитотвердых материалов, создающих высокоградиентные магнитные поля. Такие сепараторы надежно обеспечивают нормы чистоты от ферромагнитных частиц размером более 10 мкм [1-3].

Однако эти требования трудно обеспечить за длительное время эксплуатации для ферромагнитных примесей размером менее 10 мкм. Проблема заключается в постепенном накоплении тонких частиц в оборотных СОЖ вследствие недостаточной эффективности очистителей, так как в настоящее время нет эффективной и экономически доступной техники очистки жидкости от тонкодисперсных ферромагнитных частиц. В рассматриваемом аспекте необходимость технологии тонкой очистки оборотных вод от ферромагнитных примесей становится актуальной и важной народнохозяйственной задачей.

Под действием градиентных магнитных сил в магнитных сепараторах происходят не только процессы осаждения примесей, но предшествующие им процессы магнитной коагуляции, которые приводят к укрупнению твердой фазы и тем самым к увеличению эффективности таких машин [4]. При проектировании и оптимизации сепараторов ВТЖ актуальны оценки распределения дисперсного состава ферромагнитных примесей за счет магнитной коагуляции, что в настоящее время не поддается расчету. В такой постановке задача математического моделирования магнитной коагуляции до настоящего времени не ставилась. Традиционная теория коагуляции, базирующаяся на неявных интегро-дифференциальных уравнениях Смолуховского [5], ставит цель определения эволюции во времени функции распределения частиц взвеси по их массам. Из-за сложности уравнений задача при произвольных исходных дисперсных распределениях ферромагнитных частиц становится непреодолимой. В нашей работе [6] предложен новый подход математического моделирования характеристик магнитной коагуляции, в котором для случая однородного магнитного поля показана возможность использования математической операции свертки функций. Правомерность такого подхода подтверждено совпадением теоретических результатов дисперсного распределения агрегатов с экспериментальными данными.

Настоящая работа посвящена строгому обоснованию применения операции свертки для математического моделирования стохастических характеристик магнитной агрегации исходных частиц и разрабатывается теория математического моделирования магнитной коагуляции в градиентном магнитном поле, которое присутствует в магнитных сепараторах.

1. Обоснование подхода. Анализ априорной научно-технической информации показал, что в суспензиях с ферромагнитными частицами наблюдается формирование нитевидных (цепочечных) агрегатов и устойчивое выстраивание их вдоль магнитных линий внешнего поля. Это свойство является характерной особенностью процесса наведенной магнитной коагуляции [4, 7].

В основе магнитной коагуляции лежит процесс объединения намагниченных внешним магнитным полем ферромагнитных частиц. Существенная анизотропия магнитных сил взаимодействия ферромагнитных частиц (*вдоль магнитных линий намагниченные феррочастицы притягиваются, в поперечном направлении они отталкиваются друг от друга*) [8], служит причиной объединения их в цепочечные агрегаты, строго ориентированные по направлениям магнитных линий при наличии разориентирующего диффузионно-броуновского механизма. Поскольку агрегирование феррочастиц в нитеобразные формы происходит вдоль магнитных линий, то сближаться могут только лежащие на линиях поля соседние частицы (агрегаты), объединяясь в пары. Если массы соседних частиц (агрегатов) m_i и m_j , то результирующая масса объединенной пары равна $m_i + m_j$. При моделировании магнитной коагуляции положим допущение об исключительно парном объединении частиц (агрегатов) в каждом элементарном акте процесса коагуляции. Такое допущение является традиционным приближением в задачах моделирования коагуляции [5, 9].

Утверждение 1. Функцию плотности вероятности $f_k(m)$ распределения дисперсной фазы для магнитной коагуляции можно представить *сверткой* (1) функций плотности вероятности $f_i(m)$ распределения дисперсной фазы до коагуляции и весовой функции $g(x)$, являющейся характеристикой процесса магнитной коагуляции, при условии, что функции $g(m)$ и $f_i(m)$ непрерывны:

$$f_k(m) = \int_0^m f_i(\eta)g(m - \eta)d\eta. \quad (1)$$

Утверждение 2. Стохастический процесс магнитная коагуляция – характеризуется двумя независимыми случайными величинами $\xi_1(m)$ и $\xi_2(m)$.

Доказательство. Пусть на вход процесса магнитной коагуляции поступает дисперсная система с функцией распределения по массам $f_i(m)$ дисперсной фазы. Сначала покажем, что стохастический процесс – магнитная коагуляция – характеризуется двумя независимыми случайными величинами $\xi_1(m)$ и $\xi_2(m)$.

Случайная величина $\xi_1(m)$ обусловлена случайным порядком расположения, вдоль магнитных линий, ансамбля ферромагнитных частиц с различными, но с детерминированными массами. Тогда при парном объединении соседних частиц, например, частиц с массами m_i и m_j , *случайной величиной $\xi_1(m)$ является количество пар* с одинаковой бинарной массой $m = m_{i1} + m_{j1} = C_k = const$, которое обусловлено вариацией детерминированных масс m_{i1} и m_{j1} за счет случайного их размещения. Так как пространственное размещение ферромагнитных частиц приводит к их объединению, то вероятностная характеристика $g(x)$ размещения пар частиц вдоль магнитных линий может выступать потенциальной характеристикой процесса магнитной коагуляции.

Случайной величиной $\xi_2(m)$ является *количество пар* с одинаковой бинарной массой $m = m_{i2} + m_{j2} = C_k = const$, но при условии фиксированного пространственного расположения ферромагнитных частиц вдоль магнитных линий, при котором массы m_{i2} и m_{j2} феррочастиц варьируются случайным законом $f_i(m)$ их исходного распределения в дисперсной системе.

Случайные величины $\xi_1(m)$ и $\xi_2(m)$ не зависят друг от друга, так как обусловлены

независимыми случайными ситуациями: первая связана со случайным пространственным размещением различных, но детерминированных по массе частиц; вторая связана со случайным исходным распределением количества частиц по их массам для фиксированного расположения частиц. Поэтому при объединении частиц (агрегатов) число пар с массой $m_i + m_j$ будет состоять из числа пар $m_{i_1} + m_{j_1} = const$, обусловленных пространственным размещением частиц (агрегатов), и числа пар $m_{i_2} + m_{j_2} = const$, обусловленных исходным распределением частиц по их массам.

Следовательно, процесс коагуляции характеризуется суммой двух независимых непрерывных случайных величин $\xi_1(m) + \xi_2(m)$, поэтому утверждение 2 обосновано.

Положим, что распределения случайных величин $\xi_1(m)$ и $\xi_2(m)$ задаются соответствующими непрерывными функциями плотности вероятности $g(m)$ и $f_u(m)$.

Согласно «формуле свертки» теории вероятностей [10], «если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют абсолютно непрерывные распределения с плотностями $f_{\xi_1}(x_1)$ и $f_{\xi_2}(x_2)$, то плотность распределения суммы $\xi_1 + \xi_2$ равна свертке плотностей f_{ξ_1} и f_{ξ_2}

$$f_{\xi_1+\xi_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(u)f_{\xi_2}(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(u)f_{\xi_1}(t-u)du. \quad (2)$$

Заменяя в (2) абстрактные переменные на физические $t = m$, $f_{\xi_1}(x_1) = g(m)$, $f_{\xi_2}(x_2) = f_u(m)$, $f_{\xi_1+\xi_2}(t) = f_k(m)$ и учитывая физическое условие положительности массы $m \geq 0$, т.е. носители функций $g(m)$ и $f_u(m)$ ($\text{supp } g(m)$ и $\text{supp } f_u(m)$, $m \in R$) содержатся в интервале $[0, \infty]$, получаем (1). Таким образом, утверждение 1 доказано.

Для оценки интенсивности процесс коагуляции введем критерий.

Утверждение 3. В качестве критерия интенсивности процесса коагуляции используем коэффициент (3), полученный из закона сохранения массы при коагуляции. Назовем его коэффициентом глубины коагуляции:

$$\gamma_k = \bar{m}_k / \bar{m}_u = N_{vu} / N_{vk}. \quad (3)$$

Соотношение (3) следует из уравнения инвариантности $\bar{m}_k N_{vk} = \bar{m}_u N_{vu} \equiv C$, полученного в [8], где: \bar{m}_k , \bar{m}_u – средние массы соответственно агрегатов и исходных частиц; N_{vk} , N_{vu} – средние концентрации соответственно агрегатов и исходных частиц; C – средняя массовая концентрация ферропримесей во взвеси.

Из теории свертки известно, что для определения весовой функции $g(m)$ процесса магнитной коагуляции достаточно определить вероятностную функцию некоторого дисперсного распределения агрегатов при простейшем исходном распределении ферромагнитных частиц.

2. Синтез дискретной весовой функции процесса магнитной коагуляции.

Заметим, что в теории вероятностей правомерна свертка и для дискретных случайных величин [10], поэтому сначала проведем идентификацию весовой функции процесса магнитной коагуляции при простейшем законе дискретного дисперсного распределения исходных феррочастиц. При этом ограничимся случаем равной вероятности исходного распределения частиц по массам.

Пусть на вход системы подается N дискретных частиц разного калибра, массы которых образуют последовательность натуральных дискретных чисел nM (M – интервал дискретизации массы частиц примеси, а при отсутствии частицы с нулевой массой $n = 1, 2, \dots, N$). Во-первых, такое множество частиц становится упорядоченным – каждой частице присваивается номер $n = 1, 2, \dots, N$. Во-вторых, вероятность присутствия частицы с массой

nM равна:

$$p_n[nM] = 1/N. \quad (4)$$

В неоднородном магнитном поле на ферромагнитные частицы в числе прочих будет действовать градиентная магнитная сила, приводящая к их ускоренному движению. Согласно математической модели магнитных сил в магнитном сепараторе [8], градиентная сила пропорциональна объему феррочастицы V_ϕ и соответственно её инертной массе $m_\phi = \rho_\phi V_\phi$, где ρ_ϕ массовая плотность материала феррочастицы. Тогда в поле внешних сил более массивная частица, обладая большим ускорением и скоростью, будет догонять частицу с меньшей массой. Такой механизм объединения частиц, положим в основу механизма магнитной коагуляции.

Задачу решаем в рамках следующих идеализаций:

- сосредоточимся только на механизме бинарного объединения дискретных частиц (агрегатов);
- в результате одного акта парного объединения частиц количество агрегатов будет составлять половину числа исходных частиц $N_1 = N/2$, $\gamma_k = 2$, поэтому рассматриваем случай, когда число частиц N – четное;
- минимальная масса бинарной частицы равна $(1M+2M) = 3M$, максимальная масса бинарного объединения соответствует значению $(2N - 1)M$ как результат объединения частиц с массами NM и $(N - 1)M$;
- процессом разрушения агрегатов в ламинарном водном потоке пренебрегаем.

При оговоренных исходных данных будем искать вероятность распределения объединенных в пары ферромагнитных частиц. При этом масса каждого агрегата складывается из масс отдельных частиц, поэтому вероятности бинарного объединения частиц будем привязывать к массе бинарных агрегатов. Для определения распределения этой вероятности по массам подсчитаем все возможные правильно ориентированные ($i > j$) пары i, j при выполнении условия $i + j = k = \text{const}$ ($k = 3, 4, \dots, 2N - 1$).

Пусть порядок расположения среднестатистических частиц вдоль направления движения выстраивается по случайному закону. Возьмем конкретную правильно ориентированную пару N, j ($j = 1, 2, 3, \dots, N - 1$), которая будет повторяться в перестановках элементов подмножества из $N - 1$ элементов: одним элементом будет сама пара N, j , другими элементами будут $N - 2$ оставшихся номеров, не вошедших в пару N, j . Количество перестановок равно $(N - 1)!$ [11]. Таким образом, общее количество возможного соответствующего бинарного соединения обозначим символом $q_{N,j}$ и равно

$$q_{N,j} = (N - 1)!. \quad (5)$$

Количество возможных соединений в правильно ориентированную пару $(N - 1), j$ ($j = 1, 2, 3, \dots, N - 2$) будет определяться возможным числом перестановок, равным $(N - 1)!$ за исключением результирующего числа возможных случаев выстраивания тройки частиц в следующий порядок следования $N, (N - 1); j$. При таком порядке следования частиц будет формироваться другая пара $N, (N - 1)$, которая исключает появление пары $(N - 1), j$, потому что скорость сближения первой комбинации выше скорости сближения второй комбинации. Таким образом, при данном порядке следования тройки частиц более тяжелая пара частиц будет перехватывать процесс формирования бинарного объединения у менее тяжелой пары. При этом тройка элементов $[N; (N - 1); j]$ с оставшимися частицами образуют подмножество, состоящее из $N - 2$ элементов. Поэтому возможное количество перехватов

равно числу перестановок в данном подмножестве $(N - 2)!$. Итак, общее количество возможного соответствующего бинарного соединения равно

$$q_{N-1,j} = (N - 1)! - (N - 2)! \tag{6}$$

Количество возможных соединений в правильно ориентированную пару $(N - 2), j$ ($j = 1, 2, 3, \dots, N - 3$) будет определяться возможным числом перестановок, равным $(N - 1)!$ за исключением результирующего числа возможных случаев выстраивания тройки частиц в следующие порядки следования $N, (N - 2); j$ и $(N - 1), (N - 2); j$. Поэтому возможное суммарное количество перехватов будет равно $2(N - 2)!$. При этом для второй комбинации тройки частиц (номеров) возможны вторичные перехваты в случае выстраивании четвертки номеров в следующем порядке $N, (N - 1); (N - 2), j$. В такой комбинации построения порядка поступления номеров образуются две пары соединений $N, (N - 1)$ и $(N - 2), j$. А значит, добавляется количество возможных событий формирования бинарного соединения типа $(N - 2), j$, которое соответствует количеству перестановок в подмножестве, состоящее из $N - 3$ элементов: четвертки номеров $[N; (N - 1); (N - 2); j]$ и $N - 4$ оставшихся номеров, не вошедших в четверку элементов. Оно равно $(N - 3)!$. Итак, общее количество возможного соответствующего бинарного соединения равно

$$q_{N-2,j} = (N - 1)! - 2(N - 2)! + (N - 3)! \tag{7}$$

Обобщая изложенные принципы (5) – (7) подсчета $q_{i,j}$ при $i = N - \nu$, получаем

$$q_{N-\nu,j} = (N - 1)! + \sum_{\alpha=2}^{\nu+1} (-1)^{\alpha+1} C_{\nu,\alpha} (N - \alpha)! \tag{8}$$

$$q_{j+1,j} = (N - 1)! + \sum_{\alpha=2}^{N-j} (-1)^{\alpha+1} C_{N-j-1,\alpha} (N - \alpha)! \tag{9}$$

Значения коэффициентов $C_{\nu,\alpha}$ для (8) представлены в таблице 1.

Таблица 1

Значения коэффициентов $C_{\nu,\alpha}$

	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=4$	$\nu=5$	$\nu=6$
$\alpha=2$	1	2	3	4	5	6
$\alpha=3$	0	1	3	6	10	15
$\alpha=4$	0	0	1	4	10	20
$\alpha=5$	0	0	0	1	5	15
$\alpha=6$	0	0	0	0	1	6
$\alpha=7$	0	0	0	0	0	1

На основе данных табл. 1 следуют:

- для строки $\alpha=2$

$$C_{\nu,2} = \nu = N - i; \tag{10}$$

- каждое значение ν столбца $\alpha=3$ строки совпадает с суммой значений всех $C_{\nu,2}$, входящих в столбцы от $\nu = 1$ до $\nu - 1 = N - i - 1$

$$C_{\nu,3} = \sum_{\eta=1}^{\nu-1} C_{\eta,2} = \sum_{\eta=1}^{\nu-1} \eta; \tag{11}$$

- каждое значение ν столбца $\alpha=4$ строки совпадает с суммой значений всех $C_{\nu,3}$, входящих в столбцы от $\nu = 2$ до $\nu - 1 = N - i - 1$

$$C_{\nu,4} = \sum_{\eta=2}^{\nu-1} C_{\eta,3} = \sum_{\eta=2}^{\nu-1} \sum_{k=1}^{\eta-1} k = \sum_{\eta=1}^{\nu-2} \sum_{k=1}^{\eta} k; \tag{12}$$

- каждое значение ν столбца $\alpha=5$ строки совпадает с суммой значений всех $C_{\nu,4}$, входящих в столбцы от $\nu = 3$ до $\nu - 1 = N - i - 1$

$$C_{\nu,5} = \sum_{\eta=3}^{\nu-1} C_{\eta,4} = \sum_{\eta=3}^{\nu-1} \sum_{k=2}^{\eta-1} \sum_{\eta=1}^k \eta = \sum_{\eta=1}^{\nu-3} \sum_{k=1}^{\eta} \sum_{\eta=1}^k \eta. \quad (13)$$

Обобщая (10) – (13) для произвольного значения α коэффициент $C_{\nu,\alpha}$ получим выражение через « $\alpha - 2$ » вставленных друг в друга сумм, которые преобразуются в произведение [12]

$$C_{\nu,\alpha} = \sum_{\eta=1}^{\nu-\alpha+2} \dots \sum_{k=1}^{\eta} \sum_{\eta=1}^k \eta = \prod_{\eta=0}^{\alpha-2} \frac{(\nu-\eta)}{(\alpha-1)!}. \quad (14)$$

Применяя преобразование к (14) и учитывая $\nu = N - i$, имеем

$$\prod_{\eta=0}^{\alpha-2} \frac{(\nu-\eta)}{(\alpha-1)!} = \frac{\nu!}{(\alpha-1)!(\nu+1-\alpha)!} = \frac{(N-i)!}{(\alpha-1)!(N-i+1-\alpha)!}$$

Таким образом, (14) принимает вид:

$$C_{N-i,\alpha} = C_{\nu,\alpha} = \frac{(N-i)!}{(\alpha-1)!(N-i+1-\alpha)!}$$

и соответственно (8) принимает вид:

$$q_{i,j} = q_{N-\nu,j} = (N-1)! + \sum_{\alpha=2}^{N-i+1} (-1)^{\alpha+1} \frac{(N-\alpha)!(N-i)!}{(\alpha-1)!(N-i+1-\alpha)!}. \quad (15)$$

Для подсчета вероятности p_{ij} соединения пары i, j вычислим сначала общее количество возможных пар соединений при условии ($N \geq i \geq j + 1, j = 1, 2, \dots, i - 1$). При этом количество правильно ориентированных пар i, j при фиксированном i определяется варьированием номера j от 1 до $i - 1$ и будет равно числу $i - 1$. И учитывая то, что согласно (15) значения $q_{i,j}$ не зависят от номера j , то общее количество возможных пар соединений i, j при условии ($N \geq i \geq j + 1, j = 1, 2, \dots, i - 1$) будет определяться по следующей формуле

$$Q_N = \sum_{i=2}^N (i-1) q_{i,j}. \quad (16)$$

Подставляя (15) в (16) и совершая алгебраические преобразования, получим окончательное выражение

$$Q_N = \frac{(N-1)N(N-1)!}{2} + \sum_{i=2}^N (i-1) \sum_{\alpha=2}^{N-i+1} (-1)^{\alpha+1} \frac{(N-\alpha)!(N-i)!}{(\alpha-1)!(N-i+1-\alpha)!}. \quad (17)$$

На основе (15) и (17) вероятность p_{ij} соединения в пару i, j определяем по формуле (18), которая выражает вероятность присутствия частицы с массой $kM = (i + j)M$, ($k = 3, 4, \dots, 2N - 1$):

$$p_{ij} = P_1[kM] = \frac{q_{i,j}}{Q_N}. \quad (18)$$

Дискретная свертка имеет следующий вид [12]:

$$f_k[nM] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_n[kM] g^*[(n-k)M],$$

где $f_n[(k)M]$ – плотность вероятности исходного распределения примеси; $f_k[nM]$ – плотность вероятности распределения агрегатов; $g^*[kM]$ – дискретная весовая функция процесса магнитной коагуляции, которая по смыслу является откликом на единичный отсчет: $\delta[nM] = 1$ при $n = 0$; $\delta[nM] = 0$ при $n \neq 0$, [12].

Функции дискретных аргументов запишем в форме дискретных рядов с учетом свойств $f_n(m) = f_k(m) = g^*(m) = 0$, при $m < 0$ следующим образом:

$$f_n[nM] = \sum_{k=0}^{\infty} f_n[kM] \delta[(n-k)M], \quad (19)$$

$$\begin{aligned} f_k[nM] &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k[kM] \delta[(n-k)M], \\ g^*[nM] &= \sum_{k=0}^{\infty} g^*[kM] \delta[(n-k)M]. \end{aligned} \quad (20)$$

С учетом (19) – (20) дискретная свертка примет вид

$$f_k[nM] = \sum_{k=0}^n f_n[kM] g^*[(n-k)M].$$

Представив вероятности соответствующих распределений следующим образом

$$p_n[kM] = M f_n[kM]; p_1[kM] = M f_k[kM], \quad (21)$$

перейдем к дискретной свертке, моделирующей вероятность распределения агрегатов бинарного объединения частиц:

$$p_1[nM] = \sum_{k=0}^n p_n[kM] g^*[(n-k)M]. \quad (22)$$

Применяя z -преобразование [13, 14] к свертке (22), переходим к выражению, устанавливающему связь между изображениями соответствующих дискретных функций $F_k(z) = W(z)F_n(z)$, где $W(z)$ -передаточная функция. С учетом (19), (20) получим

$$W(z) = \frac{F_k(z)}{F_n(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} p_1[kM] z^{-k}}{\sum_{k=0}^N p_n[kM] z^{-k}}. \quad (23)$$

При этом $z = e^{sM}$ – комплексная переменная, s – оператор Лапласа, представляющий собой бесконечный односторонний ряд Лорана по степеням z^{-1} [14].

Подставляя в (21) – (20) условия тестового опыта $p_n[kM] = 0$ (при $k = 0, N, N + 1, \dots$) и $p_n[kM] = 1/N$ (при $k = 1, 2, \dots, N$), z -изображение $F_n(z)$ принимает вид $F_n(z) = \{\sum_{k=0}^{N-1} z^{-(k+1)}\}/N$. Аналогично с учетом соответствующих нулевых значений $p_1[kM]$ ($p_1[kM] = 0$ при $k = 0, 2N, 2N + 1, \dots$) переходим к следующему виду z -изображения $F_k(z) = \{\sum_{k=0}^{2N-2} p_1[(k+1)M] z^{-(k+1)}\}$. После подстановки скорректированных z -изображений $F_n(z)$, $F_k(z)$ в (23) с учетом (18), имеем

$$W(z) = \frac{N}{Q_N} \left[\frac{\sum_{k=0}^{2N-2} \lambda_{k+1} z^{-(k+1)}}{\sum_{k=0}^{N-1} z^{-(k+1)}} \right] = \frac{N}{Q_N} \left[\frac{\sum_{k=0}^{2N-2} \lambda_{k+1} z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} z^{-k}} \right]. \quad (24)$$

Выполнив в (23) процедуру деления полинома числителя на полином знаменателя, получим

$$W(z) = \frac{N}{Q_N} [W_1(z) + W_2(z)]; \quad (25)$$

$$W_1(z) = [\lambda_{2N-1} z^{-(N-1)} + \sum_{k=2}^{N-1} (\lambda_{2N-k} - \lambda_{2N+1-k}) z^{-(N-k)}], \quad (26)$$

$$W_2(z) = \frac{a_{N-1} z^{-(N-1)} + a_{N-2} z^{-(N-2)} + \dots + a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1}}{z^{-(N-1)} + z^{-(N-2)} + \dots + z^{-2} + z^{-1} + 1}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} a_{N-1} &= (\lambda_{2N} + \lambda_N - \lambda_{N+1}), a_{N-2} = (\lambda_{2N-1} + \lambda_{N-1} - \lambda_{N+1}), \dots \\ a_k &= (\lambda_{N+k+1} + \lambda_{k+1} - \lambda_{N+1}), a_2 = (\lambda_{N+3} + \lambda_3 - \lambda_{N+1}), \\ a_1 &= (\lambda_{N+2} + \lambda_2 - \lambda_{N+1}), \text{ где } \lambda_{2N} = \lambda_2 = \lambda_1 = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Разложив дробную функцию (27) в ряд Тейлора по обратным степеням переменной z [15], имеем:

$$W_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^{-k}, A_0 = 0, \quad (29)$$

$$A_k = a_k - \sum_{v=1}^k A_{k-v}, (k = 1, 2, \dots, N-1), \quad (30)$$

$$A_{N+r} = -\sum_{i=1}^{N-1} A_{i+r}, (r = 0, 1, 2, \dots). \quad (31)$$

Подставив последовательно формулы (28) для расчета a_k в рекуррентную формулу

(30), получим

$$A_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k + \lambda_{N+k+1} - \lambda_{N+k}, (k = 1, 2, \dots, N - 1) \quad (32)$$

При $A_0 = 0$,

$$A_{N-1} = a_{N-1} - \sum_{\nu=1}^{N-2} A_{N-1-\nu} = a_{N-1} - \sum_{i=N-2}^1 A_i. \quad (33)$$

По формуле (31) для $r = 0$ с учетом (33),

$$A_N = -\sum_{i=1}^{N-1} A_i = -A_{N-1} - \sum_{i=1}^{N-2} A_i = -a_{N-1}. \quad (34)$$

Для $r = 1$ с учетом (34),

$$A_{N+1} = -\sum_{i=1}^{N-1} A_{i+1} = -\sum_{\nu=2}^N A_\nu = A_1 - A_N - \sum_{\nu=1}^{N-1} A_\nu = A_1,$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} A_{N+2} &= A_2, A_{N+3} = A_3, \dots, A_{2N} = A_N; \\ A_{2N+1} &= A_{N+1} = A_1, A_{2N+2} = A_{N+2} = A_2, \dots, A_{3N} = A_{2N} = A_N; \\ A_{kN+\nu} &= A_\nu, (\nu = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (35)$$

Отметим, что индексы при λ_k выражают результирующую массу $Mk = M(i + j)$ бинарного соединения частиц i и j , тогда как число λ_k соответствует количеству пар с массой Mk . Принимая это во внимание подсчитаем все возможные вариации номеров i и j при условиях $k = i + j = const, i > j, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N$ для шести значений: $k = 2\nu - 1, k = 2\nu, k = 2\nu + 1, k = N + 2\nu - 1, k = N + 2\nu, k = N + 2\nu + 1$.

$$\lambda_{2\nu-1} = q_{2\nu-2,1} + q_{2\nu-3,2} + \dots + q_{\nu+2,\nu-3} + q_{\nu+1,\nu-2} + q_{\nu,\nu-1}, \quad (36)$$

$$\lambda_{2\nu} = q_{2\nu-1,1} + q_{2\nu-2,2} + \dots + q_{\nu+3,\nu-3} + q_{\nu+2,\nu-2} + q_{\nu+1,\nu-1}, \quad (37)$$

$$\lambda_{2\nu+1} = q_{2\nu,1} + q_{2\nu-1,2} + \dots + q_{\nu+3,\nu-2} + q_{\nu+2,\nu-1} + q_{\nu+1,\nu}, \quad (38)$$

$$\lambda_{N+2\nu-1} = q_{N,2\nu-1} + q_{N-1,2\nu} + \dots + q_{\frac{N}{2}+\nu+1, \frac{N}{2}+\nu-2} + q_{\frac{N}{2}+\nu, \frac{N}{2}+\nu-1}, \quad (39)$$

$$\lambda_{N+2\nu} = q_{N,2\nu} + q_{N-1,2\nu+1} + \dots + q_{\frac{N}{2}+\nu+2, \frac{N}{2}+\nu-2} + q_{\frac{N}{2}+\nu+1, \frac{N}{2}+\nu-1}, \quad (40)$$

$$\lambda_{N+2\nu+1} = q_{N,2\nu+1} + q_{N-1,2\nu+2} + \dots + q_{\frac{N}{2}+\nu+2, \frac{N}{2}+\nu-1} + q_{\frac{N}{2}+\nu+1, \frac{N}{2}+\nu}. \quad (41)$$

Подставляя (36)-(41) в (32) и учтя равенства $q_{i,j} = q_{i,\nu}$ при $j \neq \nu < i$, получим:

для $k = 2\nu - 1$ с учетом $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$A_1 = a_1 = -q_{\frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}}, A_{2\nu-1} = q_{2\nu-1,1} - q_{\nu,\nu-1} - q_{\frac{N}{2}+\nu, \frac{N}{2}+\nu-1}; \quad (42)$$

для $k = 2\nu$

$$A_{2\nu} = q_{2\nu,1}. \quad (43)$$

$$A_N = -a_{N-1} = -(\lambda_N - \lambda_{N+1}) = q_{N,1}. \quad (44)$$

Подставив (42), (43) в (29) для $k = 1, 2, \dots, N - 1$, имеем

$$W_2(z) = A_1 + \sum_{\eta=2}^{\frac{N}{2}} A_{2\eta-1} z^{-(2\eta-1)} + \sum_{\nu=1}^{\frac{N}{2}-1} A_{2\nu} z^{-2\nu} + \sum_{k=N}^{\infty} A_k z^{-k}. \quad (45)$$

Раскрывая содержание коэффициентов $A_{2\nu-1}, A_{2\nu}$ в (45), будем иметь

$$W_2(z) = -q_{\frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}} z^{-1} + \sum_{\nu=2}^{\frac{N}{2}} \left(q_{2\nu-1,1} - q_{\nu,\nu-1} - q_{\frac{N}{2}+\nu, \frac{N}{2}+\nu-1} \right) z^{-(2\nu-1)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\nu=1}^{\frac{N}{2}-1} q_{2\nu,1} z^{-2\nu} + \sum_{k=N}^{\infty} A_k z^{-k} = \\
 = & \sum_{\nu=1}^{\frac{N}{2}-1} q_{2\nu,1} z^{-2\nu} + \sum_{\nu=2}^{\frac{N}{2}} (q_{2\nu-1,1} - q_{\nu,\nu-1}) z^{-(2\nu-1)} - \\
 & - \sum_{\nu=1}^{\frac{N}{2}} q_{\frac{N}{2}+\nu, \frac{N}{2}+\nu-1} z^{-(2\nu-1)} + \sum_{k=N}^{\infty} A_k z^{-k}. \quad (46)
 \end{aligned}$$

Подставив (39) – (41) в (26), раскрываем содержание выражения

$$W_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\frac{N}{2}-1} q_{N-\nu, N-1-\nu} z^{-(N-2\nu-1)} = \sum_{\frac{N}{2}}^{\eta=1} q_{\frac{N}{2}+\eta, \frac{N}{2}+\eta-1} z^{-(2\eta-1)}, \quad (47)$$

вторая версия которого получена преобразованием индекса суммирования $N - \nu = \eta +$

$\frac{N}{2}$.

После подстановки (46), (47) в (27) с учетом (44) приходим к конечному результату

$$W(z) = \frac{N}{Q_N} \left[\sum_{\nu=2}^{\frac{N}{2}} (q_{2\nu-1,1} - q_{\nu,\nu-1}) z^{-(2\nu-1)} + \sum_{\nu=1}^{\frac{N}{2}} q_{2\nu,1} z^{-2\nu} + \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k z^{-k} \right]. \quad (48)$$

Переходя от z -изображения (48) к оригиналу, получаем дискретную весовую характеристику процесса коагуляции

$$\begin{aligned}
 g^*[nM] = & \frac{N}{Q_N} \left[\sum_{k=1}^{N/2} q_{2k,1} \delta[(n-2k)M] + \sum_{k=2}^{\frac{N}{2}} (q_{2k-1,1} - q_{k,k-1}) \times \right. \\
 & \left. \times \delta[(n-2k+1)M] + \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k \delta[(n-k)M] \right]. \quad (49)
 \end{aligned}$$

При вычислении ряда в (29) можно ограничиться N числом его членов, так как системы алгебраических уравнений (30), (31) однозначно определяют коэффициенты дробной функции (27).

3. Определение непрерывной весовой функции процесса магнитной коагуляции. Замена непрерывных функций совокупностью выборок основана на теореме отсчетов, доказанной В.А. Котельниковым [16]. В соответствии с этой теоремой непрерывный сигнал $u(t)$, ограниченный по спектру наивысшей частотой $\Omega_m = \pi/T$ (T интервал между отсчетами времени) представляется выражением

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} u(nT) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-Tn)}{\frac{\pi}{T}(t-Tn)}. \quad (50)$$

Такой ряд используем для восстановления непрерывной весовой функция процесса магнитной коагуляции $g(m)$.

По аналогии с выражениями (21) отсчеты непрерывной функции $g(m)$ свяжем с дискретной весовой функцией $g^*[nM]$

$$g[nM] = \frac{g^*[(n)M]}{M}. \quad (51)$$

Представляя $g(m)$ в форме ряда (50) с учетом (51), получим выражение для восстановления непрерывной весовой функции магнитной коагуляции

$$g(m) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{n=\infty} g^*[nM] \frac{\sin \frac{\pi}{M}(m-Mn)}{\frac{\pi}{M}(m-Mn)}. \quad (52)$$

Подставив (49) в (52) и заменив k соответственно на n и $n + 1$ с учетом свойства единичного отсчета $\delta[nM]$ и учтя диапазон изменения n ($2 \leq n \leq 2N - 1$), в котором применима функция $g^*[nM]$, переходим к рабочей формуле непрерывной весовой функции:

$$g(m) = K \left[\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} q_{2n,1} \frac{\sin \pi(2n - \frac{m}{M})}{\pi(2n - \frac{m}{M})} + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} (q_{2n+1,1} - q_{n+1,n}) \frac{\sin \pi(2n+1 - \frac{m}{M})}{\pi(2n+1 - \frac{m}{M})} \right], \quad (53)$$

где $K = N/Q_N M$. На рис. 1 представлен график весовой функции (53) для случая $N = 50$, $M = 0.12$, $NM = 6$.

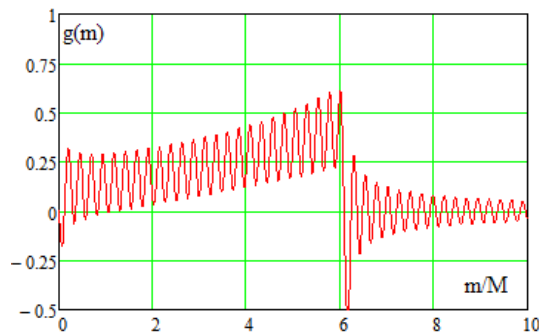


Рис. 1. Непрерывная весовая функции процесса магнитной коагуляции: $N = 50$, $M = 0.12$

Отметим, что число N для дискретного распределения примесей имеет прямой физический смысл – является числом частиц; для непрерывного распределения становится числом отсчетов (выборок) непрерывной функции дисперсного распределения ферромагнитных агрегатов по массам, расположенных через интервал M независимой переменной. При этом необходимо относительно большое значение N , так как по теории В.А. Котельникова при избыточном числе отсчетов ($N > N_0$) ряд (53) описывает непрерывную функцию без искажений. Тогда значения M определим следующим образом:

$$M = m_m N^{-1},$$

где m_m – граничное значение массы непрерывного распределения агрегатов согласно теоремы отсчетов В.А. Котельникова. Так как функция $f_k(m)$ является объектом поиска, то как m_m , так и её преобразование Фурье неизвестны. Поэтому нельзя определить интервал дискретизации M по методу В.А. Котельникова.

В работе [6] установлена связь параметров дискретизации M и N непрерывной функции $f_k(m)$ плотности вероятности дисперсного распределения агрегатов с коэффициентом глубины коагуляции γ_k (3):

$$M = \frac{2\bar{m}_u}{N-4} \left[\frac{\pi\gamma_k(N-1)}{3.7N} + \frac{2}{N} - 1 \right].$$

На рис. 2 иллюстрируются функции $f_k(m)$ для различных значений γ_k . При этом исходное распределение феррочастиц задавался логарифмически-нормальный закон плотности вероятности [15], выраженным в относительных переменных $x = m/m_u$, $y_u(x) = f_u(x)/m_u$:

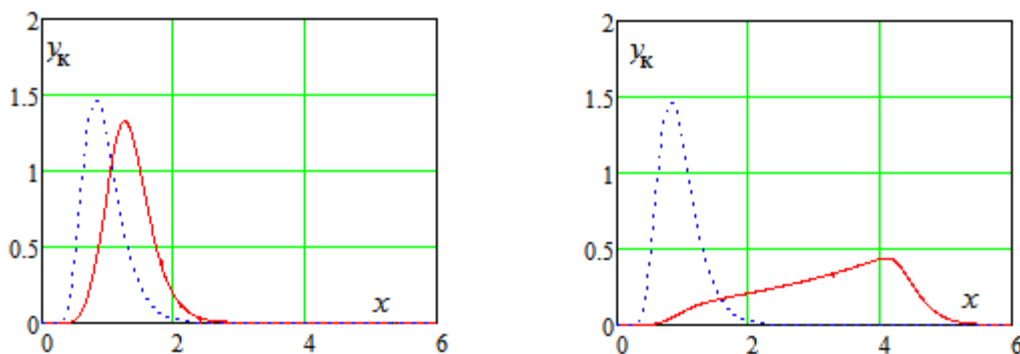


Рис. 2. Теоретические зависимости стохастических характеристик дисперсного распределения ферромагнитных примесей: для исходного; ----- после процесса магнитной коагуляции – а) при $\gamma_k = 1.53$; б) при $\gamma_k = 3.55$

$$y_n(x) = \frac{e^{-4.5s^2}}{3s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{18s^2} - 2\ln x};$$

на выходе на основе выражений при $\mu = M/m_u$:

$$y_k(x) = \frac{e^{-4.5s^2} N}{3s\sqrt{2\pi}\mu Q_N} \int_0^x e^{-\frac{(\ln(\xi))^2}{18s^2} - 2\ln \xi} g(x - \xi) d\xi,$$

где параметр $m_u = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \bar{d}_u^3}{6}$, здесь \bar{d}_u – средний размер феррочастиц в исходном дисперсном распределении.

Заключение

1. Впервые разработана математическая модель стохастических характеристик дисперсного распределения ферромагнитных примесей в жидких средах при магнитной коагуляции.
2. Разработанная модель получена на основе предложенного нового подхода математического моделирования процесса магнитной коагуляции. Разработанный метод правомерен для произвольного исходного дисперсного распределения твердой фазы.
3. Строго доказано, что оператором преобразования дисперсного распределения ферромагнитных агрегатов является свертка функций распределения случайных величин.
4. Разработана процедура синтеза дискретной весовой функции (ядра) свертки.
5. Разработана теория и методика преобразования дискретной весовой функции в непрерывную весовую функцию для неоднородного магнитного поля на основе теоремы отсчетов В.А. Котельникова.
6. Для оценки интенсивности процесса коагуляции обоснован критерий – коэффициент глубины магнитной коагуляции, который выводится из закона сохранения массы.
7. Установлена зависимость параметров дискретизации непрерывной функции дисперсного распределения ферромагнитной примеси с коэффициентом глубины магнитной коагуляции.
8. Разработанная математическая модель описывает эволюцию дисперсного распределения ферромагнитных примесей от изменения критерия

интенсивности магнитной коагуляции. Тогда задача моделирования эволюции во времени магнитной коагуляции будет сводиться к задаче эволюции критерия интенсивности магнитной коагуляции.

9. Коэффициент глубины коагуляции будет зависеть от физико-геометрических параметров индивидуального сепаратора. Таким образом, разработанный метод моделирования процесса магнитной коагуляции конкретно разбивается на концептуальную составляющую и индивидуальную техническую составляющую. Поэтому предложенный метод математического моделирования приближен к реализации практических задач.
10. Разработанная математическая модель позволит управлять востребованным процессом магнитной коагуляции для проектирования эффективных магнитных сепараторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моделирование, расчет и проектирование кассетных патронных магнитных сепараторов для очистки больших объемов водных технологических жидкостей / Е.М. Булыжев, Е.Н. Меньшов, Н.Н. Кондратьева, А.Ю. Богданов, Э.Е. Булыжев; под общей редакцией Е.М. Булыжева. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 216 с.
2. Булыжев Е.М., Меньшов Е.Н., Орлов Г.А. Расчет характеристик качества очистки СОЖ при проектировании патронного магнитного сепаратора // Инженерный журнал. Справочник. – 2014. – №2. – С. 36-45.
3. Меньшов Е.Н. Оптимизация патронных магнитных сепараторов // Инженерный журнал. Справочник. – 2014. – №11. – С. 39-45.
4. Low-field magnetic separation of monodisperse Fe_3O_4 nanocrystals / С.Т. Yavuz, J.Т. Mayo, W.W., Yu.A. Prakash // Science. – 2006. – Vol. 314. – P. 964-967.
5. Галкин В.А. Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского / В.А. Галкин. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 408 с.
6. Меньшов Е.Н. Синтез оператора преобразования дисперсного распределения ферромагнитных частиц в водной среде при магнитной коагуляции / Е.Н. Меньшов // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2014. – №8 (67). – С. 39-46.
7. Dullens R. Water purification by magnetic separate [Электронный ресурс] / R. Dullens, S. Tsai. – 2013 – Режим доступа: <https://www0.maths.ox.ac.uk/groups/occam/research/resources-energy-and-environment/ree11-2>.
8. Булыжев Е.М., Меньшов Е.Н. Математическая теория магнитной коагуляции ферромагнитных частиц в слабозагрязненных сточных водах // Известия Самарского научного центра РАН. – 2014. – Т. 16. – №1. – С. 247-254.
9. Волков В.А. Коллоидная химия (Поверхностные явления и дисперсные системы) / В.А. Волков. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2001. – 640 с.
10. Чернова Н.И. Теория вероятностей / Н.И. Чернова. – Новосибирск: СГУТИ, 2009. – 139 с.
11. Элементы комбинаторики / И.И. Ежов, А.В. Скороходов, М.И. Ядренко и др. – М.: Наука, 1977. – 80 с.
12. Прудников А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 798 с.
13. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы: В 2-х ч. Ч. 1: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 336 с.
14. Залманов Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
15. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973. – 831 с.
16. Котельников В.А. Теория потенциальной помехоустойчивости. – М.-Л.: Энергоиздат, 1956. – 151 с.

Рецензент: Статья рецензирована членами редколлегии журнала.

Menshov Eugene Nikolaevich
Ulyanovsk state technical university
Russia, Ulyanovsk
E-mail: raynd2@rambler.ru

Mathematical model of magnetic coagulation under the magnetic separation of water - process fluids from the ferromagnetic particles

Abstract. Mathematical model of the stochastic characteristics of the dispersed distribution of ferromagnetic impurities in the liquid media first has been developed under the magnetic coagulation in the inhomogeneous field. This model was obtained based on the proposed new approach to the mathematical simulation of the magnetic coagulation process. The developed method is legitimate for the generalized primary dispersed distribution of the solid phase. It is proved a scientific status lying in the fact that the magnetic coagulation is due to two independent random variables. As a conversion operator of the dispersed distribution of ferromagnetic particles the authors propose and substantiate a mathematical operation, namely, a convolution of random distribution functions. They developed a procedure of synthesis for a discrete weight function of convolution kernel as well as theory and methodology for converting discrete weight function into the continuous weight one in the inhomogeneous magnetic field. To assess the coagulation process intensity, there was substantiated the following criterion - a depth factor of magnetic coagulation, which is derived from the law of conservation of mass. It is determined a dependence of discretization parameters for a continuous function of the dispersed distribution of aggregated particles with a depth factor of the magnetic coagulation. As this case takes place, a developed mathematical model describes evolution of the dispersed distribution of ferromagnetic impurities from changing criterion of the magnetic coagulation intensity. The task of time evolution simulation of the magnetic coagulation will resolve oneself into the evolution problem of the magnetic coagulation intensity criterion. The depth factor of the coagulation will depend on the physico-geometrical parameters of individual separator. Thus, the developed method of simulation for a process of magnetic coagulation specifically breaks up into a conceptual component and an individual technical component. Therefore, the proposed method of mathematical simulation is near to the implementation of practical tasks. The developed mathematical model will allow you to manage the in-demand process of magnetic coagulation for designing efficient magnetic separators.

Keywords: magnetic separation; magnetic coagulation; ferromagnetic particles; dispersed distribution; synthesis of weighting function; sampling theorem; convolution of functions.

REFERENCES

1. Modelirovanie, raschet i proektirovanie kassetnykh patronnykh magnitnykh separatorov dlya ochistki bol'shikh ob'emov vodnykh tekhnologicheskikh zhidkostey / E.M. Bulyzhev, E.N. Men'shov, N.N. Kondrat'eva, A.Yu. Bogdanov, E.E. Bulyzhev; pod obshchey redaktsiey E.M. Bulyzheva.–Ul'yanovsk: UIGTU, 2011. – 216 s.
2. Bulyzhev E.M., Men'shov E.N., Orlov G.A. Raschet kharakteristik kachestva ochistki SOZh pri proektirovanii patronnogo magnitnogo separatora // Inzhenernyy zhurnal. Spravochnik. – 2014. – №2. – S. 36-45.
3. Men'shov E.N. Optimizatsiya patronnykh magnitnykh separatorov // Inzhenernyy zhurnal. Spravochnik. – 2014. – №11. – S. 39-45.
4. Low-field magnetic separation of monodisperse Fe₃O₄ nanocrystals / C.T. Yavuz, J.T. Mayo, W.W., Yu.A. Prakash // Science. –2006. –Vol. 314. – P. 964-967.
5. Galkin V.A. Analiz matematicheskikh modeley: sistemy zakonov sokhraneniya, uravneniya Bol'tsmana i Smolukhovskogo / V.A. Galkin. – M.: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2009. – 408 s.
6. Men'shov E.N. Sintez operatora preobrazovaniya dispersnogo raspredeleniya ferromagnitnykh chastits v vodnoy srede pri magnitnoy koagulyatsii / E.N. Men'shov // Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk. – 2014. – №8 (67). – S. 39-46.
7. Dullens R. Water purification by magnetic separate [Elektronnyy resurs] / R. Dullens, S. Tsai. – 2013 – Rezhim dostupa: <https://www0.maths.ox.ac.uk/groups/occam/research/resources-energy-and-environment/ree11-2>.
8. Bulyzhev E.M., Men'shov E.N. Matematicheskaya teoriya magnitnoy koagulyatsii ferromagnitnykh chastits v slabozagryaznennykh stochnykh vodakh // Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN.– 2014.–T.16. – №1. – S. 247-254.
9. Volkov V.A. Kolloidnaya khimiya (Poverkhnostnye yavleniya i dispersnye sistemy) / V.A. Volkov.–M.: MGTU im. A.N. Kosygina, 2001. – 640 s.
10. Chernova N.I. Teoriya veroyatnostey / N.I. Chernova. – Novosibirsk: SGUTI, 2009. – 139 s.
11. Elementy kombinatoriki / I.I. Ezhov, A.V. Skorokhodov, M.I. Yadrenko i dr. – M.: Nauka, 1977. – 80 s.
12. Prudnikov A.P. Integraly i ryady / A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev. – M.: Nauka, 1981. – 798 s.
13. Sibert U.M. Tsepi, signaly, sistemy: V 2-kh ch. Ch. 1: Per. s angl. – M.: Mir, 1988.– 336 s.
14. Zalmanov L.A. Preobrazovaniya Fur'e, Uolsha, Khaara i ikh primenenie v upravlenii, svyazi i drugikh oblastiakh. – M.: Nauka, 1989. – 496 s.
15. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. – M.: Nauka, 1973. – 831 s.
16. Kotel'nikov V.A. Teoriya potentsial'noy pomekhoustoychivosti.–M.-L.: Energoizdat, 1956. – 151 s.