

Интернет-журнал «Наукоедение» ISSN 2223-5167 <https://naukovedenie.ru/>

Том 9, №6 (2017) <https://naukovedenie.ru/vol9-6.php>

URL статьи: <https://naukovedenie.ru/PDF/146TVN617.pdf>

Статья опубликована 18.01.2018

Ссылка для цитирования этой статьи:

Латыпова В.А. О применении приближенных методов расчета в методе анализа иерархий // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 9, №6 (2017) <https://naukovedenie.ru/PDF/146TVN617.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 519.816

Латыпова Виктория Александровна

ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет», Россия, Уфа¹

Старший преподаватель

E-mail: vikva@zmail.ru

РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=824495

О применении приближенных методов расчета в методе анализа иерархий

Аннотация. При многокритериальном выборе решения проблемы в научной литературе очень часто используется метод анализа иерархий. При использовании данного метода могут использоваться как точные, так и приближенные методы расчета. При использовании приближенных методов расчета могут возникнуть проблемы в связи с грубыми вычислениями. Проблемы могут усугубиться тем, что распространение метода анализа иерархий очень обширно. В статье рассмотрены точные и приближенные методы расчета, применяемые в методе анализа иерархий. Данные методы расчета используются при определении вектора приоритетов для критериев и альтернатив по заданным критериям, а также для оценки согласованности мнений эксперта. Определены проблемы, возникающие при использовании приближенных методов расчета: в некоторых случаях отсутствует возможность корректной оценки согласованности мнений экспертов, а также есть вероятность принятия неверного решения. Поэтому чтобы избежать данных проблем, при использовании метода анализа иерархий необходимо использовать точный метод расчета. В статье представлен результат анализа публикаций, посвященных многокритериальному выбору на основе метода анализа иерархий, на предмет используемых методов расчета в базе elibrary за 2017 год. Выявлено, что наиболее распространено использование приближенных методов расчета, поэтому описанные выше проблемы могут иметь очень широкое распространение.

Ключевые слова: многокритериальный выбор; метод анализа иерархий; вектор приоритетов; собственный вектор матрицы; собственное значение матрицы; оценка согласованности; метод расчета

Введение

При многокритериальном выборе решения проблемы в научной литературе очень часто используется метод анализа иерархий (МАИ), разработанный Саати. Например, при расширенном поиске в базе elibrary по запросу «МАИ» в названии публикации, при типе

¹ 450008, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12

публикации: статьи в журналах, книги и материалы конференций, без учета морфологии определяется 792 работы (ситуация на 23 декабря 2017). При сравнении с другими методами принятия решений, когда осуществляется многокритериальный выбор между альтернативами, МАИ их значительно опережает. Например, при запросе «ELECTRE» (при описанных выше поисковых настройках) выдается 52 работы, при запросе «PROMETHEE»-18.

В запросе не использовался поиск по ключевым словам, в аннотации и полному тексту публикаций. Это связано с тем, что для анализа рассматриваются работы, основой которых является использование одного конкретного метода при решении многокритериальной проблемы.

Также можно проанализировать тенденцию в использовании МАИ по годам (рисунок 1).

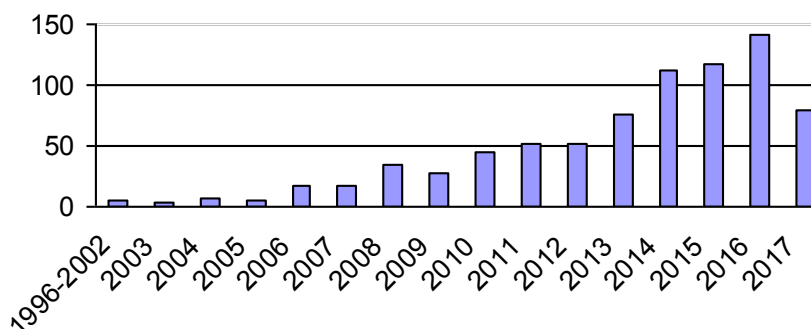


Рисунок 1. Тенденция в использовании МАИ по годам (разработано автором)

По рисунку видно, что пик использования МАИ приходится на 2016, когда количество статей составило около 150 работ. Однако и в 2017 году он использовался в значительном количестве работ: в elibrary определяется 80 работ, посвященных МАИ.

При использовании МАИ могут использоваться как точные, так и приближенные расчеты. При использовании приближенных методов расчета могут возникнуть проблемы в связи с грубыми вычислениями. И проблемы могут усугубиться тем, что распространение МАИ очень обширно.

В задачи исследования входят следующее:

- рассмотреть точные и приближенные методы расчета, применяемые в МАИ;
- выявить проблемы, возникающие при использовании приближенных методов расчета в МАИ;
- осуществить анализ публикаций в базе elibrary, посвященных многокритериальному выбору на основе МАИ, на предмет используемых методов расчета для выявления ширины возможного распространения проблем.

1. Методы расчета в МАИ

После сбора экспертных данных производится их математическая обработка: определяется вектор приоритетов P для каждой матрицы суждений S при попарном сравнении критериев и попарном сравнении альтернатив. Далее осуществляется оценка согласованности мнений экспертов по каждой из матриц суждений. Первый элемент вектора приоритетов P является приоритетом 1-го сравниваемого объекта (критерия или альтернативы), а 2-й – 2-го и т. д. [7]

1.1 Расчет вектора приоритетов

1.1.1 Точный расчет

Точный метод расчета основан на следующем: на основании полученной матрицы суждений S рассчитывается ее главный собственный вектор \bar{x}_{\max} , затем данный вектор нормализуется. Нормализованный главный собственный вектор и является вектором приоритетов \bar{P} .

Собственный вектор \bar{x} матрицы S – это такой ненулевой вектор, для которого:

$$S\bar{x} = \lambda\bar{x},$$

где: λ – собственное значение матрицы S .

Главный собственный вектор \bar{x}_{\max} , соответствует главному (максимальному) собственному значению λ_{\max} .

Алгоритм точного расчета вектора приоритетов \bar{P} следующий:

1. по заданной матрице суждений S определяем матрицу $S - \lambda E$, где E – единичная матрица;
2. находим определитель матрицы $S - \lambda E$ и приравниваем его нулю;
3. решаем уравнение и находим все значения λ , выбираем из них максимальное. Это и будет главное собственное значение λ_{\max} .
4. подставляем значение λ_{\max} в матрицу $S - \lambda E$ и решаем полученную систему уравнений, получаем соответствующий вектор \bar{x}_{\max} .
5. нормализуем вектор \bar{x}_{\max} и получаем вектор приоритетов \bar{P} .

1.1.2 Приближенный расчет

При использовании приближенного метода можно использовать один из 4-х методов [7]:

1. построчно суммируются элементы матрицы суждений, затем каждая построчная сумма делится на сумму всех элементов матрицы суждений;
2. по столбцам суммируются элементы матрицы суждений, затем по данным суммам получают обратные числа. Обратные числа по каждому столбцу делят на сумму обратных чисел всех столбцов;
3. элементы столбца матрицы суждений делятся на сумму элементов данного столбца (данную процедуру осуществляют для всех столбцов матрицы), получают преобразованную матрицу. Затем в данной матрице построчно находят среднее арифметическое;
4. построчно находят среднее геометрическое, которое затем нормализуют делением на сумму всех средних геометрических.

Точность оценок, полученных данными способами, увеличивается с 1-го и до 4-го способа.

Однако, несмотря на простоту расчетов, приближенный метод позволяет получать только грубые оценки вектора приоритетов, и он может применяться лишь при отсутствии ЭВМ [7].

1.2 Расчет оценки согласованности мнений экспертов

Чтобы оценить согласованность мнений эксперта используется значение λ_{\max} , которое необходимо для расчета индекса согласованности ИС и отношения согласованности ОС.

Формула расчета ИС [7]:

$$ИС = \frac{\lambda_{\max} - r}{r - 1},$$

где: r – ранг матрицы суждений S .

Формула расчета ОС [7]:

$$ОС = \frac{ИС}{СИ},$$

где: $СИ$ – средний случайный индекс.

$СИ$ – это среднее значение ИС, которое было получено по случайно сгенерированным обратно симметричным матрицам с элементами со значением от 1 до 9 и соответствующими им обратными значениями. $СИ$ зависит от ранга матрицы суждений S . Его значение для ранга матрицы от 1 до 15 представлено в работе [7].

Условие приемлемой согласованности мнений эксперта следующее:

$$ОС \leq 0,1.$$

При точном расчете λ_{\max} определяется до определения вектора приоритетов. Способ его расчета приведен ранее в алгоритме точного расчета вектора приоритетов.

При приближенный расчете λ_{\max} определяется на основе полученного ранее вектора приоритетов \bar{p} [11]:

$$\lambda_{\max} = \bar{s} \cdot \bar{p}, \quad (1)$$

где: \bar{s} – вектор, полученный суммированием элементов матрицы суждений S по столбцам.

Для положительной обратно симметричной матрицы должно выполняться условие:

$$\lambda_{\max} \geq r \quad (2)$$

2. Проблемы, выявленные при использовании приближенных методов

2.1 Проблема при оценке согласованности мнений эксперта

В Уфимском государственном авиационном техническом университете на кафедре «Автоматизированные системы управления» студенты специальности «Применение и эксплуатация автоматизированных систем специального назначения» при изучении дисциплины «Системология и реинжиниринг систем управления» и студенты направления «Информатика и вычислительная техника» при изучении дисциплины «Системное

моделирование и автоматизация управления» на одном из практических занятий осуществляли многокритериальный выбор решения поставленной проблемы на основе МАИ [3]. Студенты самостоятельно определяли критерии, альтернативы и значения по каждому критерию для всех альтернатив. Каждый выполнял индивидуальное задание, поэтому составлялось большое количество различных матриц суждений при попарном сравнении критериев и альтернатив. Расчет вектора приоритетов студента выполнялся 4-м, самым точным из 4-х приближенных способов. Однако при проверке среди работ попадались такие, где максимальное собственное значение некоторых матриц суждений было менее ранга матрицы, т. е. нарушалось условие (2).

Первоначально автор посчитал, что причиной является неверный расчет или слишком грубое округление (до сотых) при расчете. Однако, позже выяснилось, что причиной может являться также приближенный метод вычисления вектора приоритетов \bar{P} и главного собственного значения λ_{\max} .

Рассмотрим пример, взятый из работы одного студента. Согласно заданию было необходимо решить проблему многокритериального выбора квартиры из соответствующих альтернатив. Исходные данные учебной задачи, разработанные студентом, приведены в таблице.

Таблица

Исходные данные к задаче многокритериального выбора

	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Стоимость	до 1,5 млн руб.	от 1,5 млн до 3 млн руб.	более 3 млн руб.
Состояние квартиры	Отличное	Среднее	Плохое
Расположение дома	Удобное	Удобное	Неудобное
Тип дома	Кирпичный	Кирпичный	Панельный

У студента возникли проблемы при расчете главного собственного значения λ_{\max} при попарном сравнении альтернатив по третьему критерию «Расположение дома».

Матрица суждения S при попарном сравнении альтернатив по критерию «Расположение дома» имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

При приближенном расчете был получен следующий вектор приоритетов \bar{P} :

$$\begin{pmatrix} 0,4444 \\ 0,4444 \\ 0,1111 \end{pmatrix}$$

Также приближенным способом по формуле (1) было получено значение λ_{\max} .

$\lambda_{\max} = 2,9997$. $\lambda_{\max} < 3$, т. е. нарушается условие (2). Поэтому корректно оценить согласованность мнений экспертов нельзя, т. к. значения ИС и ОС являются отрицательными числами.

При точном расчете проблем с оценкой согласованности мнений эксперта не возникает. Рассмотрим ручной расчет.

Матрица $S - \lambda E$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 - \lambda & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Найдем определитель Δ данной матрицы:

$$\Delta = \lambda^2 (3 - \lambda).$$

$\Delta = 0$, следовательно, $\lambda_{1,2} = 0$ и $\lambda_3 = 3$. Отсюда $\lambda_{\max} = 3$, т. е. условие (2) выполняется. ИС = ОС = 0. Следовательно, мнения эксперта согласованы.

Подставляем данное значение в матрицу $S - \lambda E$, получаем следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -2 \end{pmatrix}$$

Отсюда система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} -2x + y + 4z = 0, \\ x - 2y + 4z = 0, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y - 2z = 0. \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений, получаем вектор:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

После нормализации получаем вектор приоритетов \bar{P} :

$$\begin{pmatrix} 0,4444 \\ 0,4444 \\ 0,1111 \end{pmatrix}$$

Вектор приоритетов получился таким же, что и при приближенном расчете, т. к. ОС = 0.

Ясно, что ручной точный расчет неприемлем в связи с трудоемкостью вычислений, особенно в случае с большей размерностью матриц суждений, когда количество критериев и альтернатив более 3-х. Однако существует программное средство, работа которого основана на точных расчетах. Это программа «Super Decisions» [6]. Она была разработана под руководством автора МАИ Саати. При ее использовании можно получить точное значение компонентов вектора приоритетов и корректно оценить согласованность мнений экспертов.

2.2 Проблема при оценке альтернатив и критериев

Из-за погрешности в расчетах при использовании приближенных методов при расчете вектора приоритетов альтернативы и критерии могут быть оценены некорректно.

Рассмотрим пример. Пусть матрица суждений S эксперта имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

При расчете 4-м приближенным способом получаем следующий вектор приоритетов \bar{P} :

$$\begin{pmatrix} 0,1731 \\ 0,2448 \\ 0,2911 \\ 0,2911 \end{pmatrix}$$

На основании полученного вектора приоритетов \bar{P} можно сделать вывод, что объект №3 и №4 равны и являются наилучшими по оценкам эксперта.

При точном расчете вектор приоритетов \bar{P} имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0,1595 \\ 0,2592 \\ 0,2857 \\ 0,2957 \end{pmatrix}$$

На основании данного вектора приоритетов \bar{P} можно сделать вывод, что объект №4 является наилучшим, а объект №3 является менее предпочтительным.

Таким образом, при приближенном и точном расчете вектора приоритетов были получены различные результаты. Неверная оценка веса альтернатив и критериев в итоге могут привести к неверно принятому решению.

3. Анализ работ, посвященных многокритериальному выбору с использованием МАИ за 2017 г.

В данном разделе представлен результат анализа 80 публикаций на предмет способа расчета вектора приоритетов в рамках МАИ.

Рассмотренные работы можно разбить на 2 категории:

- работы, в которых не удалось определить способ получения вектора приоритетов или способ в них отличается от классического, представленного в МАИ;

- работы, в которых способ получения вектора приоритетов был определен и соответствовал классическому МАИ.

На рисунке 2 представлено распределение работ по данным категориям:

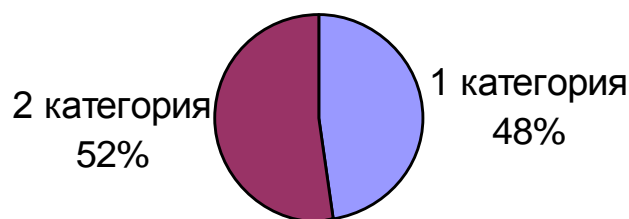


Рисунок 2. Распределение рассмотренных работ по категориям (разработано автором)

Рассмотрим подробнее каждую из категорий. В состав первой категории входят следующие типы работ, у которых:

- нет свободного доступа к публикации;
- не описан метод расчета вектора приоритетов;
- метод расчета вектора приоритетов отличается от представленного в МАИ.

На рисунке 3 рассмотрен состав и распределение элементов в категории 1.

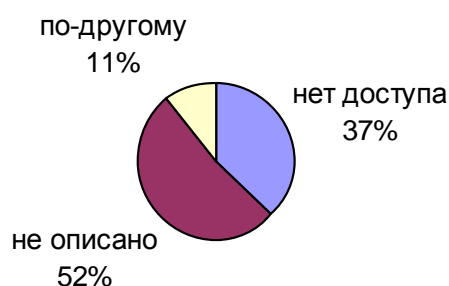


Рисунок 3. Элементы категории 1 (разработано автором)

Исходя из рисунка видно, что в половине работ метод определения вектора приоритетов не описан. К около трети работ доступ был ограничен, поэтому изучить их не удалось. Самую небольшую долю составили работы, где расчет векторов приоритетов был отличным от метода расчета, представленного в классическом МАИ.

В состав второй категории входят следующие типы работ, в которых используется способ расчета вектора приоритетов: точный и приближенный.

На рисунке 4 показано распределение работ по точности расчета.

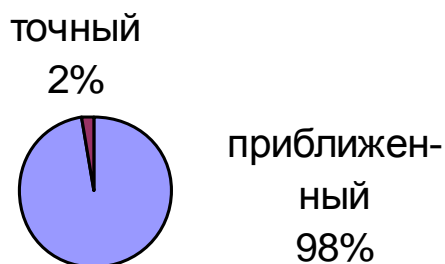


Рисунок 4. Распределение работ по точности расчета (разработано автором)

На рисунке видно, что практически во всех работах используется приближенный метод расчета. Только в работе [10] используется точный расчет.

Рассмотрим, как распределились работы по используемому способу приближенных вычислений:

- 1-й приближенный способ;
- 2-й приближенный способ;
- 3-й приближенный способ;
- 4-й приближенный способ.

На рисунке 5 представлено распределение работ по используемому способу приближенных вычислений:

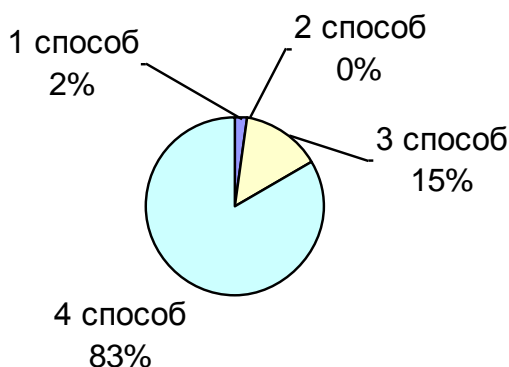


Рисунок 5. Распределение работ по типу приближенных вычислений (разработано автором)

Наиболее часто с большим отрывом от остальных используется 4-й способ расчета, далее 3-й способ, затем 1-й способ. 1-й способ использовался только в одной работе [9]. 2-й способ не использовался ни в одной работе.

Ранее автор при многокритериальном выборе на основе МАИ также использовал 4-й способ, как наиболее точный среди остальных приближенных [2].

Определение способа расчета вектора приоритетов в публикациях

Способ расчета вектора приоритетов был представлен в явном и неявном виде. В первом случае в работе были представлены формулы расчета. Во втором случае были представлены:

- таблицы, содержащие попарные оценки и соответствующие векторы приоритетов;
- скриншоты работы программ, реализующих МАИ, где были представлены попарные оценки и соответствующие векторы приоритетов.

Автор для определения способа расчета вектора приоритетов использовал разработанные самостоятельно программы в Excel, которые осуществляли расчет с помощью 4-х различных приближенных способов, а также программу Super Decisions, осуществляющую точный расчет.

Также было выявлено, что некоторые программы, реализующие МАИ, основаны на приближенном методе расчета. Например, такие программы как: «Решение» [8] и «MPRIORITY» [1, 5] используют 4-й приближенный способ расчета вектора приоритетов.

Также в работе [4] авторы предлагают свое программное средство, которое также разработано на основе использования приближенного метода расчета вектора приоритетов (4-й способ).

В некоторых работах предлагаются модификации МАИ. Однако в них или используется приближенный метод расчета вектора приоритетов, или данный вектор рассчитывается не в классическом варианте МАИ.

Выводы

Были выявлены следующие проблемы, связанные с использованием приближенных методов расчета в МАИ:

- в некоторых случаях отсутствие возможности корректной оценки согласованности мнений экспертов;
- наличие вероятности принятия неверного решения вследствие неверного оценивания веса критериев и веса альтернатив по критериям.

Таким образом, чтобы избежать проблем, при использовании МАИ необходимо использовать точный метод расчета вектора приоритетов и оценки согласованности мнений экспертов. Существует программное средство Super Decisions, которое позволяет выполнять такой расчет. Оно бесплатно для использования в научных и учебных целях.

Были рассмотрены работы, посвященные многокритериальному выбору с помощью МАИ на предмет способа расчета вектора приоритетов, представленные в базе elibrary за 2017 г. В около половине работ способ расчета вектора приоритетов выявить не удалось по следующим причинам: нет свободного доступа к публикации, не описан метод расчета вектора приоритетов. Также в части работ использовался метод расчета вектора приоритетов отличный от классического, представленного в МАИ.

В результате анализа второй половины работ, где определить способ расчета вектора приоритетов оказалось возможным, было выявлено, что практически во всех работах используются приближенные методы расчета, а точный расчет используется только в 2 % работ. Также было выявлено, что в некоторых программных средствах также реализован приближенный метод вычисления вектора приоритетов. В некоторых работах, где используется модификация МАИ, также используют приближенный метод расчета вектора приоритетов. Таким образом, выявленные проблемы имеют очень широкое распространение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладков А. Н., Магомедов У. А. Исследование проблем принятия решений методом анализа иерархий // Применение современных информационных технологий в образовательном процессе: сборник статей Межвузовской научно-практической конференции, Пермь, 23 марта 2017 г. Пермь: Пермский военный институт войск национальной гвардии РФ, 2017. С. 252-257.
2. Латыпова В. А. Выбор оптимального способа реализации инструментального средства управления обучением с помощью метода анализа иерархий // Инженерный вестник Дона. 2017. Т. 45. № 2 (45). С. 45. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2017/4120.
3. Латыпова В. А. Методика определения возможности организации смешанного обучения и степени его индивидуализации при проведении практических и лабораторных работ в вузе // Инженерный вестник Дона. 2017. Т. 47. № 4 (47). URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4532.
4. Мукина И. А., Соловьев Д. С., Литовка Ю. В. Программное обеспечение для выбора проектных решений в гальваническом производстве на основе модифицированного метода анализа иерархий // Инновационные материалы и технологии в машиностроительном производстве: сборник статей по итогам Международной научно-практической конференции, Омск, 18 августа 2017 г. Уфа: Общество с ограниченной ответственностью "Агентство международных исследований". 2017.
5. Официальный сайт программы MPRIORITY URL: tomakechoice.com/mpriority.html.
6. Официальный сайт программы Super Decisions URL: superdecisions.com.
7. Саати Т. Принятие решений / Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. 278 с.
8. Сорокина Е. С., Скрипина И. В. Экспертная оценка приоритетности объектов инвестирования на основе метода анализа иерархий // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. 2017. Т.42. №9(258). С. 133-141.
9. Степин Ю. П. Метод группового анализа иерархий для выбора вариантов разработки месторождений нефти и газа // Труды Российского государственного университета нефти и газа им. И. М. Губкина. 2017. №1. С. 102-120.
10. Цой В. В. Выбор системы автоматизации управления складом в инженерно-строительных организациях методом анализа иерархий // Теория. Практика. Инновации. 2017. № 4 (16). С.102-108.
11. Saaty T. L., Vargas L. G. Models, methods, concepts & applications of the analytic hierarchy process. New York: Springer Science+Business Media, 2001. 333 p.

Latypova Viktoriya Aleksandrovna

Ufa state aviation technical university, Russia, Ufa

E-mail: vikva@zmail.ru

About using approximate calculating methods in the analytic hierarchy process

Abstract. Very often the analytic hierarchy process is used in multicriterion choice of decision in scientific literature. Exact or approximate calculating methods can be used in the analytic hierarchy process. Using of approximate calculating methods can cause problems because of rough computing. The analytic hierarchy process is quite common and this can be adding to the problem. Exact and approximate calculating methods in the analytic hierarchy process are considered in the paper. These methods are used for priority vector defining for criteria and alternatives and for expert judgments consistency assessment. Problems associated with using of approximate calculating methods are defined: there's no opportunity for correct expert judgments consistency assessment in all cases. Also there is the probability of incorrect decision making. To avoid such problems in the analytic hierarchy process one must use exact calculating methods. The result of analysis of papers, using multicriterion choice based on the analytic hierarchy process, for 2017 year in elibrary is provided. The calculating methods were analyzed in the papers. The approximate calculating methods are more common, that is why the problems mentioned above can be very common.

Keywords: multicriterion choice; analytic hierarchy process; priority vector; eigenvector of matrix; eigenvalue of matrix; consistency assessment; calculating method