

Замятин Александр Витальевич

Zamyatin Alexander

Доцент кафедры «Начертательной геометрии и черчение».

Associate professor of the chair of “Descriptive geometry and sketching”

E-Mail: alex080262@mail.ru

Замятина Екатерина Александровна

Zamyatina Ekaterina

Ассистент кафедры «Начертательной геометрии и черчение»

Assistant of the chair of “Descriptive geometry and sketching”

Ростовский государственный строительный университет

Rostov State Building University

05.01.01.-«Инженерная геометрия и компьютерная графика»

E-Mail: kng@rgsu.donpac.ru

Алгоритм построения линии пересечения каналových поверхностей

Algorithm of construction of a line of crossing of bending around surfaces

Аннотация: В статье описан алгоритм построения линии пересечения каналových поверхностей. Алгоритм реализован по технологии ObjectARX для AutoCAD. Это позволяет значительно ускорить работу программы, т.к. можно использовать стандартные функции системы AutoCAD и упростить интерфейс пользователя. Разработанные алгоритмы могут быть использованы в различных технических задачах, где существует необходимость построения линии пересечения каналových поверхностей.

The Abstract: In article the algorithm of construction of a line of crossing of bending around surfaces is described. The algorithm is realised on technology ObjectARX for AutoCAD. It allows to accelerate considerably program work since it is possible to use standard functions of system AutoCAD and to simplify the interface of the user. The developed algorithms can be used in various technical problems where there is a necessity of construction of a line of crossing of bending around surfaces.

Ключевые слова: Каналовая поверхность, направляющая линия, образующая поверхность, сплайн.

Keywords: Bending around surface, directing line, forming a surface, spline.

При конструировании современных технических объектов широко применяются огибающие поверхности. Это обусловлено удобными определителями поверхностей, возможностью аналитического описания поверхностей. Среди огибающих поверхностей наибольшее распространение получили каналовые поверхности, которые являются огибающими однопараметрического множества сфер постоянного или переменного радиуса. Каналовые поверхности, образованные сферами постоянного радиуса называются трубчатыми. Каналовые поверхности применяются для моделирования различных каналов в стесненных условиях, например в двигателях, компрессорах и других сложных устройствах. Часто приходится строить линии пересечения таких поверхностей. Например, для определения траектории движения сферы по пространственным линиям [1, 2] необходимо решать данную задачу. В статье при-

веден алгоритм построения линии пересечения двух каналовых поверхностей. Алгоритм реализован в среде *ObjectARX* для *AutoCAD* [3] на языке C++[4].

Если в пространстве задано однопараметрическое множество образующих поверхностей

$$F(x, y, z, t) = 0, \quad (1)$$

то уравнение поверхности, которая огибает однопараметрическое множество поверхностей (1), определяется следующей системой уравнений [5]

$$\begin{cases} F(x, y, z, t) = 0; \\ \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим случай, когда огибающей является каналовая поверхность. Пусть задано однопараметрическое множество сфер, радиусы которых равны R_a , центры расположены на линии a , векторное уравнение которой имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}_a(u). \quad (3)$$

Будем считать, что линия (3) непрерывна и имеет в каждой точке непрерывные первую и вторую производные. Запишем уравнение однопараметрического множества этих сфер

$$(x - x_a(u))^2 + (y - y_c(u))^2 + (z - z_c(u))^2 - R_a^2 = 0, \quad (4)$$

где $x_a(u)$, $y_a(u)$, $z_a(u)$ координаты центров сфер, входящих в однопараметрическое множество, т.е. координаты точек, лежащих на линии a . Эти координаты являются функциями от параметра u . Подставив (4) в (2), получим уравнение каналовой поверхности

$$\begin{cases} (x - x_a(u))^2 + (y - y_a(u))^2 + (z - z_a(u))^2 - R_a^2 = 0; \\ (x - x_a(u))x'_a + (y - y_a(u))y'_a + (z - z_a(u))z'_a = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где $x'_a = \frac{dx_a(u)}{du}$, $y'_a = \frac{dy_a(u)}{du}$, $z'_a = \frac{dz_a(u)}{du}$ – координаты вектора $\frac{d\vec{r}_a(u)}{du}$. Система уравнений (5) определяет однопараметрическое множество окружностей, принадлежащих поверхности (параметр – u).

Пусть задана вторая каналовая поверхность, огибающая однопараметрическое множество сфер, радиуса R_b , центры которых находятся в точках линии b

$$\vec{r} = \vec{r}_b(v).$$

Уравнение этой каналовой поверхности имеет вид

$$\begin{cases} (x - x_b(v))^2 + (y - y_b(v))^2 + (z - z_b(v))^2 - R_b^2 = 0; \\ (x - x_b(v))x'_b + (y - y_b(v))y'_b + (z - z_b(v))z'_b = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $x'_b = \frac{dx_b(v)}{dv}$, $y'_b = \frac{dy_b(v)}{dv}$, $z'_b = \frac{dz_b(v)}{dv}$ – координаты вектора $\frac{d\vec{r}_b(v)}{dv}$.

Построим линию пересечения каналовых поверхностей (5) и (6). Она определяется следующей системой уравнений

$$\begin{cases} (x - x_a(u))^2 + (y - y_a(u))^2 + (z - z_a(u))^2 - R_a^2 = 0; \\ (x - x_a(u))x'_a + (y - y_a(u))y'_a + (z - z_a(u))z'_a = 0; \\ (x - x_b(v))^2 + (y - y_b(v))^2 + (z - z_b(v))^2 - R_b^2 = 0; \\ (x - x_b(v))x'_b + (y - y_b(v))y'_b + (z - z_b(v))z'_b = 0. \end{cases} \quad (7)$$

В качестве параметра искомой линии пересечения возьмем параметр линии $a - u$. Для определения координат точек линии пересечения решим систему (7) методом Ньютона. Обозначим

$$\begin{aligned} f_1 &= (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 + (z - z_a)^2 - R_a^2; \\ f_2 &= (x - x_a)x'_a + (y - y_a)y'_a + (z - z_a)z'_a; \\ f_3 &= (x - x_b)^2 + (y - y_b)^2 + (z - z_b)^2 - R_b^2; \\ f_4 &= (x - x_b)x'_b + (y - y_b)y'_b + (z - z_b)z'_b. \end{aligned} \quad (8)$$

Продифференцируем уравнения (8) по x, y, z, v , получим

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dx} &= 2(x - x_a), \quad \frac{df_1}{dy} = 2(y - y_a), \quad \frac{df_1}{dz} = 2(z - z_a), \quad \frac{df_1}{dv} = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= x'_a, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = y'_a, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = z'_a, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v} = 0, \\ \frac{df_3}{dx} &= 2(x - x_b), \quad \frac{df_3}{dy} = 2(y - y_b), \quad \frac{df_3}{dz} = 2(z - z_b), \\ \frac{df_3}{dv} &= -2(x - x_b)x'_b - 2(y - y_b)y'_b - 2(z - z_b)z'_b, \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} &= x'_b, \quad \frac{\partial f_4}{\partial y} = y'_b, \quad \frac{\partial f_4}{\partial z} = z'_b, \\ \frac{df_4}{dv} &= -x_b'^2 + (x - x_b)x_b'' - y_b'^2 + (y - y_b)y_b'' - z_b'^2 + (z - z_b)z_b'', \end{aligned} \quad (9)$$

где $x_b'' = \frac{d^2x_b}{dv^2}$, $y_b'' = \frac{d^2y_b}{dv^2}$, $z_b'' = \frac{d^2z_b}{dv^2}$ – координаты вектора $\frac{d^2\vec{r}_b}{dv^2}$.

Пусть x_i, y_i, z_i, v_i – некоторое приближение искомым параметрам, для нахождения приращения параметров $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i, \Delta v_i$, на i -м шаге итерации, решаем следующую систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial f_1}{\partial y} \Delta y_i + \frac{\partial f_1}{\partial z} \Delta z_i + \frac{\partial f_1}{\partial v} \Delta v_i = -f_1; \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial f_2}{\partial y} \Delta y_i + \frac{\partial f_2}{\partial z} \Delta z_i + \frac{\partial f_2}{\partial v} \Delta v_i = -f_2; \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial f_3}{\partial y} \Delta y_i + \frac{\partial f_3}{\partial z} \Delta z_i + \frac{\partial f_3}{\partial v} \Delta v_i = -f_3; \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial f_4}{\partial y} \Delta y_i + \frac{\partial f_4}{\partial z} \Delta z_i + \frac{\partial f_4}{\partial v} \Delta v_i = -f_4. \end{cases} \quad (10)$$

Значения функций (8) и их производных (9) в системе (10), берутся при $x = x_i, y = y_i, z = z_i, v = v_i$. Следующее приближение параметров вычисляется по формулам

$$\Delta x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, \quad \Delta y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad \Delta z_{i+1} = z_i + \Delta z_i, \quad \Delta v_{i+1} = v_i + \Delta v_i. \quad (11)$$

Процесс итерации завершается, когда максимальное по модулю значение приращения параметра меньше заданной точности ϵ .

Рассмотрим программные алгоритмы решения данной задачи. При описании алгоритмов входящий, если ни указано дополнительно, тип или функция относятся к стандартным типам или функциям C++[4] или *ObjectARX* [3]. Для хранения данных различных типов в памяти компьютера используются связные списки шаблонов *ListNode<Type>*. Алгоритмы работы с этими списками приведены в [6]. В качестве направляющих линий взяты сплайны (объекты *AcDbSpline*).

Основной функцией, разработанного программного обеспечения, является функция *MN*. Она предназначена для решения системы уравнений (7) методом Ньютона. Рассмотрим подробнее ее алгоритм. Входными параметрами функции являются следующие переменные:

- *pSpl* – указатель на сплайн, который является направляющей линией *b* (тип *AcDbSpline**);
- *pta* – центр образующей сферы на направляющей линии *a* (тип *AcGePoint3d*);
- *va* – первая производная в точке *pta* (тип *AcGeVector3d*);
- *R* – радиус образующей сферы (тип *double*);
- *pt_pr* – начальное приближение точки искомой линии (тип *AcGePoint3d*);
- *v_pr* – начальное приближение параметра *v* (тип *double*);
- *e* – точность вычисления (тип *double*);
- *ppt* – указатель, по адресу которого записывается найденная точка линии пересечения (тип *AcGePoint3d**);
- *pv* – указатель, по адресу которого записывается найденный параметр (тип *double**).

Функция возвращает значение *true*, если вычисление завершено успешно и *false*, если точка не определена (тип *bool*).

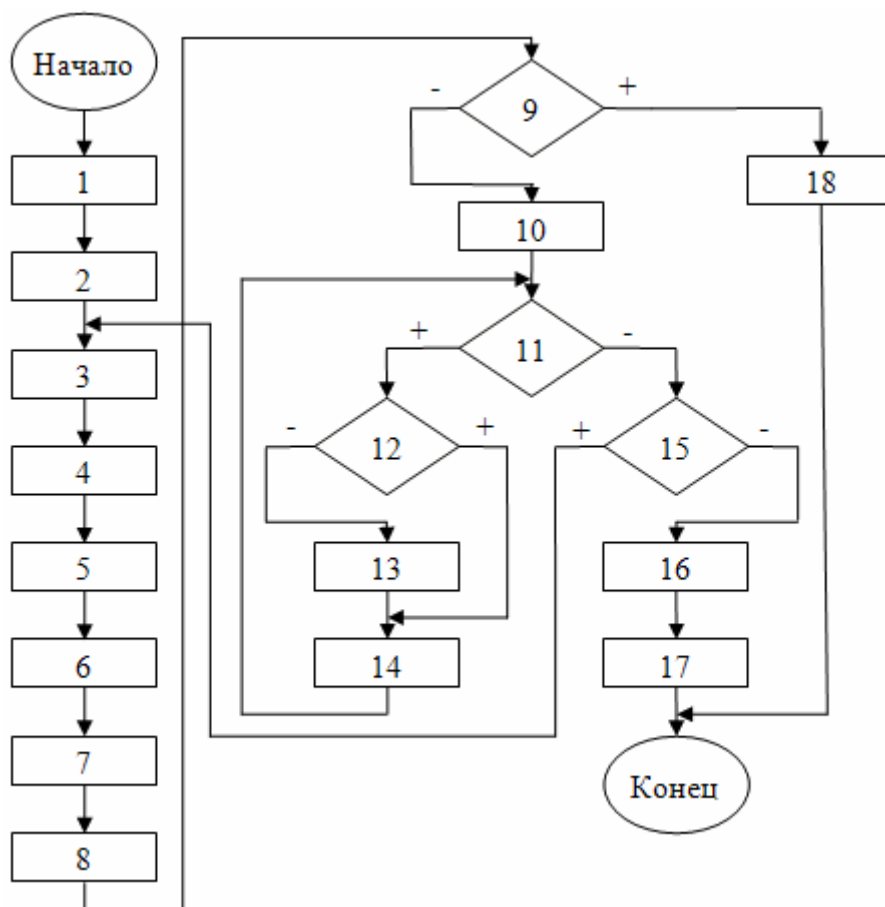


Рис. 1. Блок-схема алгоритма функции *MN*

Рассмотрим блок-схему алгоритма, приведенную на рис. 1.

1. Присвоить $pt=pt_pr$, $v=v_pr$, $n=0$.
2. Присвоить v_min начальный параметр сплайна $pSpl$ (функция $getStartParam$), присвоить v_max конечный параметр сплайна $pSpl$ (функция $getEndParam$).
3. Переменной ptb присвоить точку на сплайне $pSpl$, соответствующую параметру v (функция $getPointAtParam$). Переменной vb присвоить первую производную (функция $getFirstDeriv$). Переменной vvb присвоить вторую производную (функция $getSecondDeriv$). Первая и вторая производные берутся в точке ptb .
4. Вычислить коэффициенты системы (10) по формулам (9) и присвоить их значения элементам массива $a[ij]$.
5. Вычислить свободные члены системы (10) по формулам (8) и присвоить их значения элементам массива $b[i]$.
6. Решить систему (10). Система (10) решается методом Гаусса [5]. В качестве входных данных использовались массивы $a[ij]$ и $b[i]$, результаты помещаются в массив $x[i]$.
7. Вычислить новые значения параметров по формулам (11) и присвоить их значения переменным pt и v .
8. Увеличить значение переменной n на 1.
9. Условие: если $v < v_min$ или $v > v_max$ или $n > 500$, то вычисление ведется по ветви «+», иначе – по ветви «-».
10. Присвоить $e_max = |x[1]|$, $i=2$.
11. Условие: если $i \leq 4$, то вычисление ведется по ветви «+», иначе – по ветви «-».
12. Условие: если $e_max > |x[i]|$, то вычисление ведется по ветви «+», иначе – по ветви «-».
13. Присвоить $e_max = |x[i]|$.
14. Значение переменной i увеличить на 1.
15. Условие: если $e_max > e$, то вычисление ведется по ветви «+», иначе – по ветви «-».
16. Записать значения переменных pt и v по адресам указателей ppt и pv .
17. Функции присвоить значение $true$.
18. Функции присвоить значение $false$.

Пример построения линии пересечения каналовых поверхностей приведен на рис. 2. На рис. 2 направляющие линии обозначены через a и b , линия пересечения поверхностей обозначена через c .

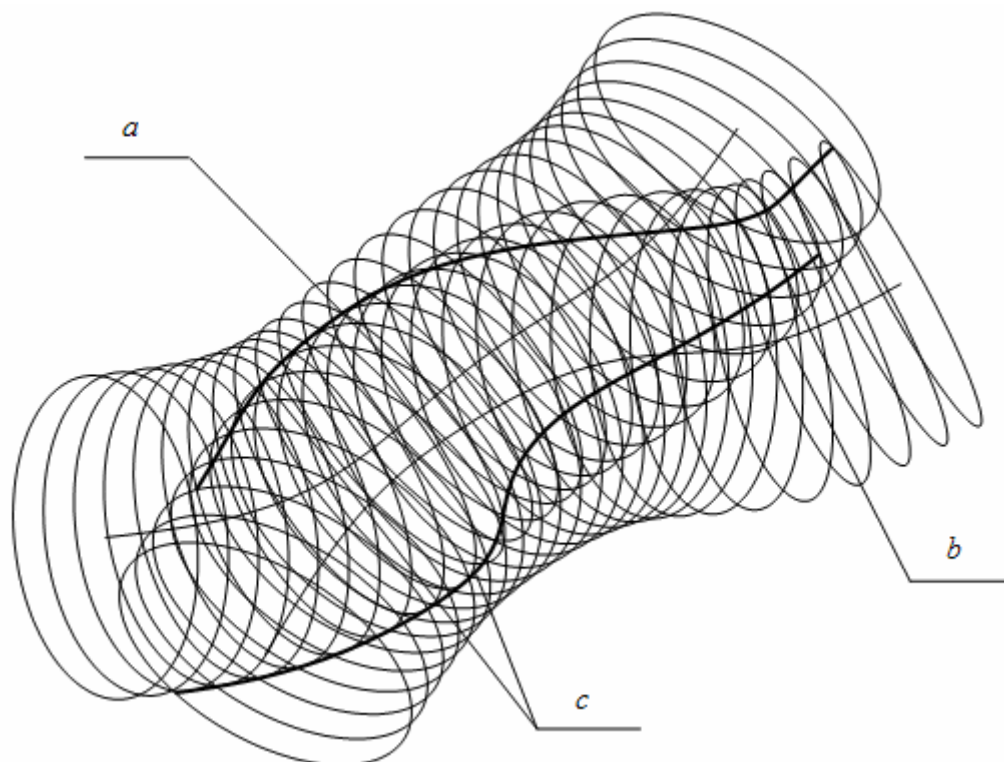


Рис. 8. Пример расчета линии пересечения

Описанный алгоритм может быть использован самостоятельно в качестве системы построения линий пересечения каналовых поверхностей. Так как алгоритм разработан в *ObjectARX*, он легко интегрируется в *AutoCAD* и запускается в ней специальной командой. Алгоритм может быть использован в качестве модуля автоматизированных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Замятин А.В. Формообразование поверхностей на основе аппарата кинематики поверхностей 2-го порядка / А.В. Замятин. – Ростов-на-Дону: Издательство РГСУ, 2004. – 120 с.
2. Замятин А.В. Новые способы образования оболочек на основе кинематики поверхностей второго порядка / А.В. Замятин. – Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. Приложение №9, 2004 г.
3. Полищук Н.Н. AutoCAD: разработка приложений, настройка и адаптация / Н.Н. Полищук. – СПб.: БХВ – Петербург, 2006. – 992 с.
4. Секунов Н.Ю. Visual C++ Визуальная среда программирования / Н.Ю. Секунов. – СПб.: БХВ – Петербург, 1999. – 960 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
6. Труб И.И. Объектно-ориентированное моделирование на C++ / И.И. Труб. – СПб.: Питер, 2006. – 411 с.