

Дьяков Станислав Федорович

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Аспирант

Dyakov Stanislav Fedorovitch

Saint-Petersburg state polytechnic university

Post-graduate student

E-Mail: stass.f.dyakov@gmail.com

Лалин Владимир Владимирович

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Профессор, доктор технических наук

Lalin Vladimir Vladimirovitch

Saint-Petersburg state polytechnic university

Professor

E-Mail: lalin@cef.spbstu.ru

05.23.17 – строительная механика

Дисперсия крутильной волны, распространяющаяся в тонкостенном стержне

The dispersion of the torsion wave in the thin-walled bar

Аннотация: В настоящей работе рассматриваются три теории крутильных колебаний однородных тонкостенных стержней. Проанализированы дисперсионные зависимости и фазовые скорости крутильных волн по каждой из теорий.

Abstract: The article covers three theories of the thin-walled bar torsion oscillation. Frequency dependences and phase velocities according to all of the three theories are analyzed.

Ключевые слова: Крутильная волна, тонкостенный стержень, частота волны, теория Тимошенко, теория Власова, теория Сливкера.

Keywords: Torsion wave, thin-walled bar, wave frequency, Timoshenko theory, Vlasov theory, Slivker theory.

Крутильные волны играют большую роль в формировании вибрационных полей [1,2]. Ниже анализируются дисперсионные свойства практически наиболее важных теорий крутильных колебаний однородных тонкостенных стержней.

Теория Тимошенко

В том случае если деформация неоднородна вдоль стержня, то кручение такого стержня называется стесненным. Впервые стесненное кручение стержня рассмотрел С. П. Тимошенко. Основное отличие теории Тимошенко от теории Сен-Венана состоит в том, что угол кручения $\theta(x,t)$ является функцией продольной координаты x и времени t .

Чтобы вывести уравнение крутильных колебаний Тимошенко запишем выражение кинетической энергии перемещения стержня:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_r \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx, \text{ где} \quad (1)$$

I_r - полярный момент инерции; ρ - плотность материала стержня; θ - угол закручивания стержня.

Определим потенциальную энергию деформации:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left[G I_x \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + E I_\omega \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx, \text{ где} \quad (2)$$

E - модуль Юнга; I_x - крутильный момент инерции; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, ν - коэффициент Пуассона; I_ω - секториальный момент инерции.

Первое слагаемое в (2) описывает потенциальную энергию сдвиговых деформаций, второе — потенциальную энергию продольных деформаций, вызывающих неоднородную деформацию.

Уравнение движения стержня может быть получено с помощью функционала Гамильтона:

$$\Phi = \int_{t_1}^{t_2} (K - W) dt \quad (3)$$

и по теории Тимошенко примет вид [3]:

$$E I_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - G I_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \rho I_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

Для изучения дисперсионных свойств системы представим вращение поперечного сечения стержня в виде бегущей гармонической волны:

$$\theta(x, t) = \theta_0 \cdot \exp(i\omega t - ikx) \quad (5)$$

Тогда после подстановки (5) в (4) и упрощения получим дисперсионное уравнение:

$$E I_\omega k^4 + G I_x k^2 - \rho I_r \omega^2 = 0 \quad (6)$$

Откуда может быть получена зависимость между частотой ω и волновым числом k , из которой следует, что крутильные волны обладают дисперсией:

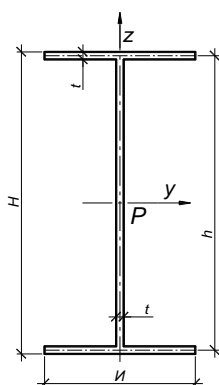
$$\omega = c_s k \cdot \sqrt{1 + \frac{c_0^2 I_\omega}{c_\tau^2 I_x} k^2}, \text{ где} \quad (7)$$

$c_0 = \sqrt{E/\rho}$ - скорость распространения продольных волн в стержне;
 $c_\tau = \sqrt{G/\rho}$ - скорость распространения сдвиговых волн в стержне; $c_s = \sqrt{GI_x/\rho I_r}$ - скорость распространения крутильных волн в стержне.

Фазовая скорость волны определяется соотношением:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c_s \sqrt{1 + \frac{c_0^2 I_\omega}{c_\tau^2 I_x} k^2} \quad (8)$$

Здесь и далее, для проведения численных расчетов используется тонкостенный стержень сечением в виде двутавра, обладающего следующими характеристиками:



$$\begin{aligned} H &= 0,40\text{м}; & E &= 206,01\text{ГПа}; \\ t &= 0,022\text{м}; & \nu &= 0,3; & \rho &= 7800\text{кг/м}^3; \\ B &= 0,2\text{м}; & G &= 79,3\text{ГПа} \end{aligned}$$

Геометрические характеристики стержня:

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{t^3(2B+h)}{3} = 276,0\text{см}^4; & I_\omega &= \frac{B^3 \cdot h^2 \cdot t}{24} = 1,048 \cdot 10^6\text{см}^6; \\ I_g &= \frac{480 \cdot I_\omega}{t \cdot h^2 \cdot B^5} = 52391\text{см}^4; & I_r &= I_z + I_y = 42706\text{см}^4 \end{aligned}$$

Оценим предельные значения частоты (7) и фазовой скорости (8) в длинноволновом ($k \rightarrow 0$) и коротковолновом ($k \rightarrow \infty$) диапазонах. В длинноволновом диапазоне:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{GI_x}{\rho I_r}} \cdot k = c_s k \quad v_\phi = \frac{\omega}{k} = c_s \quad (9)$$

В коротковолновом диапазоне:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{EI_\omega}{\rho I_r}} \cdot k^2 = c_0 \sqrt{\frac{I_\omega}{I_r}} \cdot k^2 \quad v_\phi = \frac{\omega}{k} = c_0 \sqrt{\frac{I_\omega}{I_r}} \cdot k \quad (10)$$

При малых волновых числах фазовая скорость близка к скорости распространения крутильной волны и неограниченно возрастает при стремлении k к бесконечности (см. **Рис. 1**).

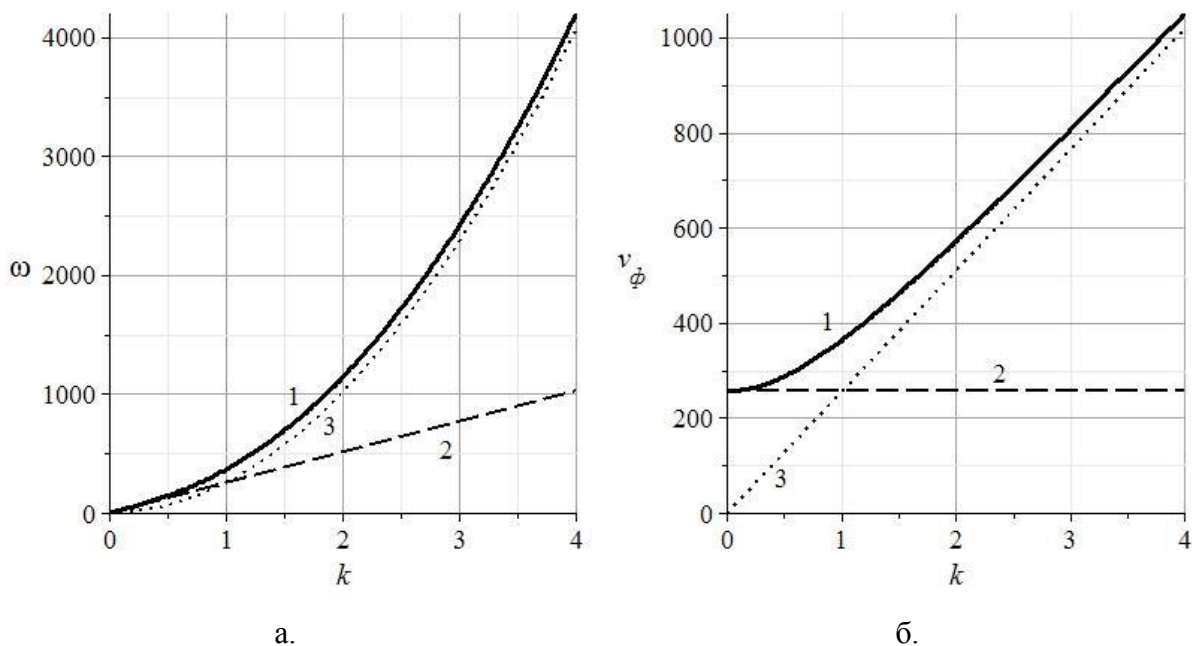


Рис. 1. а – дисперсионная кривая: 1 – угловая частота по формуле (7), 2 – угловая частота по формуле (9), 3 – угловая частота по формуле (10). б – зависимость фазовой скорости v_{ϕ} от волнового числа k : 1 – фазовая скорость по формуле (8), 2 – фазовая скорость по формуле (9), 3 – фазовая скорость по формуле (10).

Теория Власова

Отличие теории Власова от теории Тимошенко заключается в том, что в выражении для кинетической энергии учитывается не только кинетическая энергия вращения, но и кинетическая энергия деформации:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho I_r \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \rho I_{\omega} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] dx \quad (11)$$

Выражение для потенциальной энергии по теории Власова остается аналогичным теории Тимошенко (2). Уравнение динамики стержня может быть получено с помощью принципа Гамильтона и будет иметь вид:

$$EI_{\omega} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - GI_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \rho I_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \rho I_{\omega} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (12)$$

Выполнив подстановку (5) в (12) получим дисперсионное уравнение Власова [4]:

$$EI_{\omega} k^4 + GI_x k^2 - \rho I_r \omega^2 - \rho I_{\omega} k^2 \omega^2 = 0 \quad (13)$$

Тогда зависимость между частотой ω и волновым числом k будет иметь вид:

$$\omega = k \sqrt{\frac{c_s^2 + c_0^2 (I_\omega/I_r) k^2}{1 + (I_\omega/I_r) k^2}} \quad (14)$$

Фазовая скорость волны определяется соотношением:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{c_s^2 + c_0^2 (I_\omega/I_r) k^2}{1 + (I_\omega/I_r) k^2}} \quad (15)$$

Оценим предельные значения частоты (14) и фазовой скорости (15) в длинноволновом и коротковолновом диапазонах. В длинноволновом диапазоне:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{GI_x}{\rho I_r}} \cdot k = c_s k \quad v_\phi = \frac{\omega}{k} = c_s \quad (16)$$

В коротковолновом диапазоне:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot k = c_0 k \quad v_\phi = \frac{\omega}{k} = c_0 \quad (17)$$

При малых волновых числах фазовая скорость распространения волн близка к скорости распространения крутильной волны, а при $k \rightarrow \infty$ фазовая скорость стремится к скорости распространения продольной волны (см. **Рис. 2**).

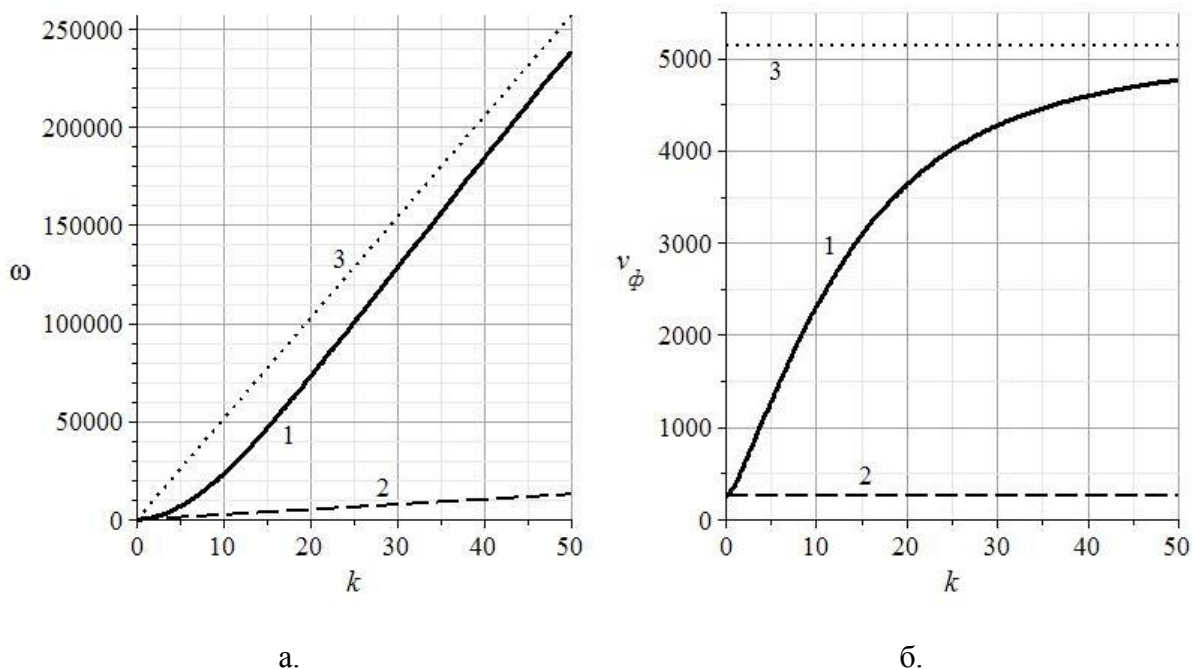


Рис. 2. а – дисперсионная кривая: 1 – угловая частота по формуле (14), 2 – угловая частота по формуле (16), 3 – угловая частота по формуле (17). б – зависимость фазовой скорости v_ϕ от волнового числа k : 1 – фазовая скорость по формуле (15), 2 –

фазовая скорость по формуле (16), 3 – фазовая скорость по формуле (17).

Теория Сливкера

Обе рассмотренные в предыдущих пунктах теории пренебрегают энергией деформации сдвига. Сливкер В. И. в своей монографии [5] предложил теорию, которая позволяет частично учесть деформацию сдвига. Главная его мысль заключается в том, что он предлагает представить касательные напряжения как сумму двух слагаемых: *касательных напряжений изгиба*, порожденных поперечными силами Q_x и Q_y и *касательных напряжений кручения*, вызываемых моментом стесненного кручения M_ω . Далее предлагается пренебречь касательными напряжениями изгиба, отнеся их в разряд второстепенных, в тоже время сохранив касательные напряжения кручения. Теория с таким разделением называется *полусдвиговой теорией тонкостенных стержней*.

В рамках полусдвиговой теории, когда угол закручивания $\theta(x)$ и мера депланации $\beta(x)$ являются независимыми функциями, выражение для кинетической энергии имеет вид:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho I_r \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \rho I_\omega \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 \right] dx, \text{ где} \quad (18)$$

β - функция меры депланации.

Определим выражение для потенциальной энергии:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left[G I_x \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + E I_\omega \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + G I_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right)^2 \right] dx, \text{ где} \quad (19)$$

$I_g = \frac{I_x}{\psi - 1}$, ψ - геометрический параметр (подробнее см. [6])

Система уравнений крутильных колебаний стержня может быть найдена с помощью принципа наименьшего действия и будет иметь вид:

$$\begin{cases} E I_\omega \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + G I_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right) - \rho I_\omega \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0 \\ G I_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + G I_g \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) - \rho I_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Представим вращение поперечного сечения стержня и перемещение продольных точек стержня в результате депланации в виде бегущей гармонической волны:

$$\theta(x, t) = \theta_0 \cdot \exp(i\omega t - ikx) \quad \beta(x, t) = \beta_0 \cdot \exp(i\omega t - ikx) \quad (21)$$

Выполнив подстановку (21) в (20) получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд β_0 и θ_0 :

$$\begin{cases} -k^2 EI_{\omega} \beta_0 - GI_g \beta_0 + \rho I_{\omega} \omega^2 \beta_0 - iGI_g k \theta_0 = 0 \\ -k^2 GI_x \theta_0 - GI_g k^2 \theta_0 + \rho I_r \omega^2 \theta_0 + iGI_g k \beta_0 = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Приравняв определитель системы (22) нулю, находим дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} \rho^2 I_{\omega} I_r \omega^4 - (\rho GI_r I_g + G\rho \psi I_{\omega} I_g k^2 + E\rho I_{\omega} I_r k^2) \omega^2 + \\ + G^2 I_g I_x k^2 + EG\psi I_{\omega} I_g k^4 = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Дисперсионное уравнение (23) представляет собой уравнение, имеющее четвертый порядок относительно ω ; решая его как биквадратное уравнение, получим зависимость частоты волны ω от волнового числа k :

$$\omega = \sqrt{\frac{-(B + Ck^2) \pm \sqrt{(B + Ck^2)^2 - 4A(Dk^2 + Fk^4)}}{2A}}, \text{ где} \quad (24)$$

$$A = \rho^2 I_{\omega} I_r; \quad B = -\rho GI_r I_g; \quad C = -G\rho \psi I_{\omega} I_g - E\rho I_{\omega} I_r; \quad D = G^2 I_g I_x; \quad F = EG\psi I_{\omega} I_g$$

Соотношение (24) дает две дисперсионные ветви. При этом знак минус соответствует акустической (первой), а знак плюс – оптической (второй) ветви дисперсии.

Фазовая скорость волны определяется соотношением:

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{-(B + Ck^2) \pm \sqrt{(B + Ck^2)^2 - 4A(Dk^2 + Fk^4)}}{2Ak^2}} \quad (25)$$

Оценим предельные значения частоты (24) и фазовой скорости (25) в длинноволновом ($k \rightarrow 0$) и коротковолновом ($k \rightarrow \infty$) диапазонах. Для акустической ветви в длинноволновом диапазоне:

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{GI_x}{\rho I_r}} \cdot k = c_s k \quad v_{\phi 1} = \frac{\omega}{k} = c_s \quad (26)$$

В коротковолновом диапазоне:

$$\omega_2 \approx \sqrt{\frac{GI_g \psi}{\rho I_r}} \cdot k = c_s \sqrt{\frac{\psi}{\psi - 1}} \cdot k \quad v_{\phi 2} = \frac{\omega}{k} = c_s \sqrt{\frac{\psi}{\psi - 1}} \quad (27)$$

Для оптической ветви в длинноволновом диапазоне:

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{GI_g}{\rho I_\omega}} \left[1 + \frac{I_\omega}{2GI_g} \frac{EI_r + \frac{GI_x}{\Psi - 1}}{I_r} k^2 \right] = c_\tau \sqrt{\frac{I_g}{I_\omega}} \cdot \left[1 + \frac{I_\omega \left(c_0^2 + \frac{c_s^2}{\Psi - 1} \right)}{2I_g c_\tau^2} k^2 \right] \quad (28)$$

$$v_{\phi 1} = \frac{\omega}{k} = c_\tau \sqrt{\frac{I_g}{I_\omega}} \cdot \left[\frac{1}{k^2} + \frac{I_\omega \left(c_0^2 + \frac{c_s^2}{\Psi - 1} \right)}{2I_g c_\tau^2} \right]$$

В коротковолновом диапазоне:

$$\omega_2 \approx \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot k = c_0 k \quad v_{\phi 2} = \frac{\omega}{k} = c_0 \quad (29)$$

Для первой дисперсионной ветви при любом значении волнового числа k фазовая скорость распространения волны близка к скорости распространения крутильной волны стержня Сен-Венана. (см. **Рис. 3**).

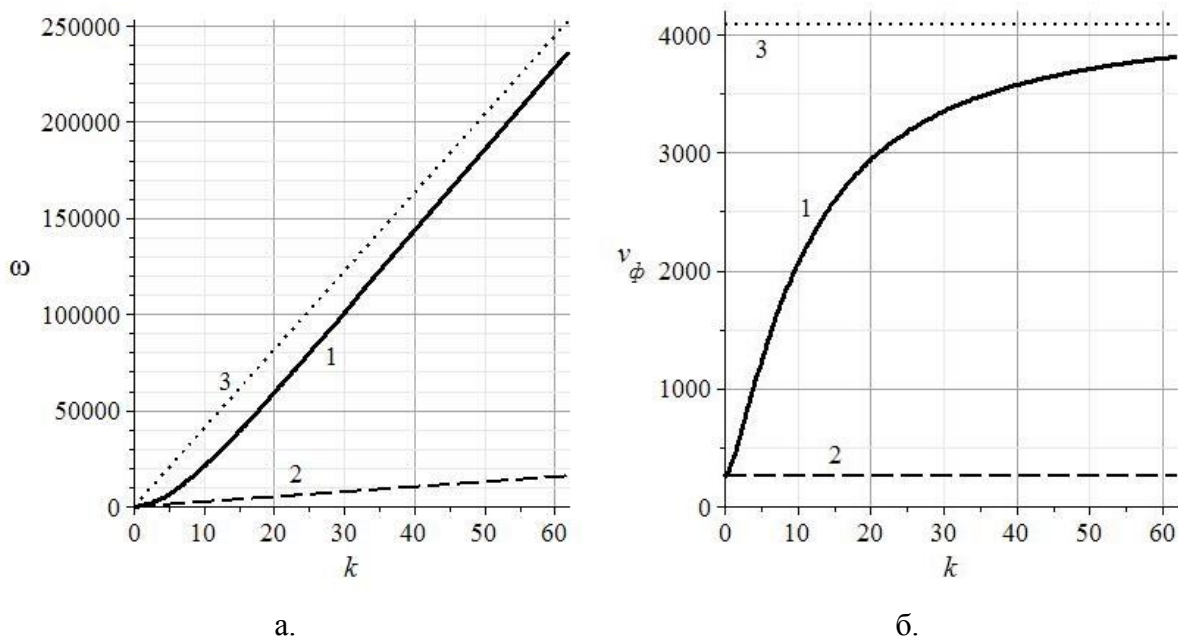


Рис. 3. а – дисперсионная кривая (акустическая ветвь): 1 – угловая частота по формуле (24), 2 – угловая частота по формуле (26), 3 – угловая частота по формуле (27). б – зависимость фазовой скорости v_ϕ от волнового числа k : 1 – фазовая скорость по формуле (25), 2 – фазовая скорость по формуле (26), 3 – фазовая скорость по формуле (27).

Для второй ветви дисперсии на высоких частотах фазовая скорость распространения волны близка к скорости продольной волны в стержне Бернулли (см. **Рис. 4**).

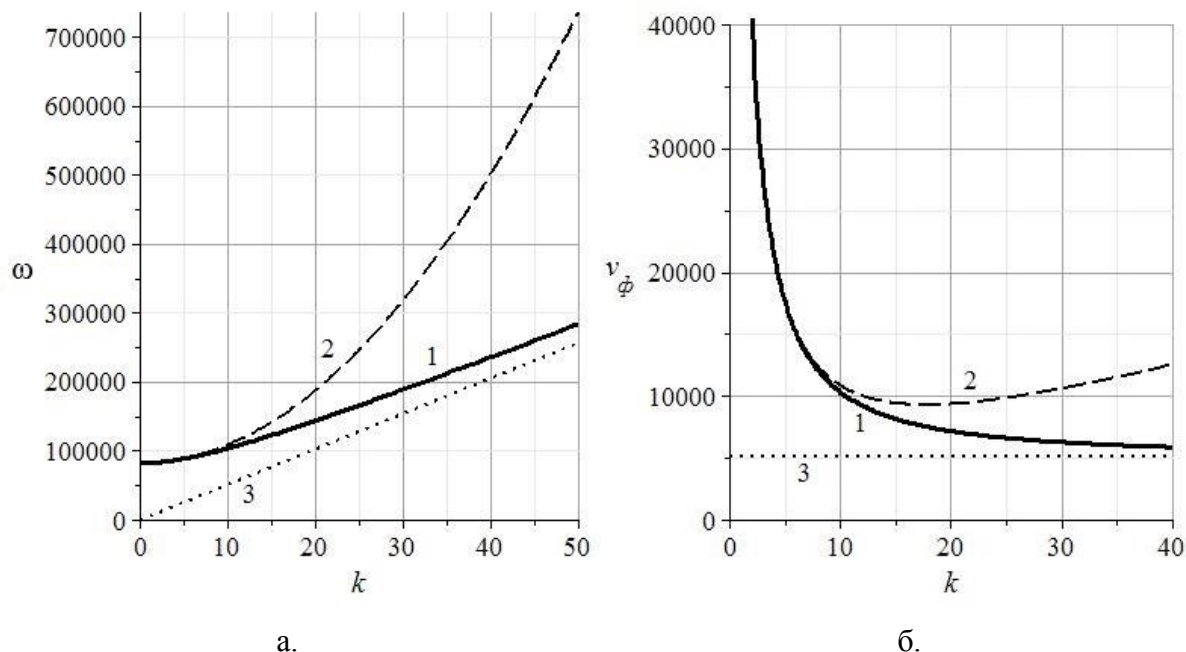


Рис. 4. а – дисперсионная кривая (оптическая ветвь): 1 – угловая частота по формуле (24), 2 – угловая частота по формуле (28), 3 – угловая частота по формуле (29). б – зависимость фазовой скорости v_{ϕ} от волнового числа k : 1 – фазовая скорость по формуле (25), 2 – фазовая скорость по формуле (28), 3 – фазовая скорость по формуле (29).

Выводы:

1. Независимо от рассматриваемой теории, для акустической ветви дисперсии фазовая скорость распространения волны в длинноволновом диапазоне близка к скорости крутильной волны стержня Сен-Венана.
2. В коротковолновом диапазоне фазовые скорости крутильной волны по теориям Тимошенко и Власова пропорциональны скорости распространения продольной волны, но при этом довольно значительно разнятся. При этом акустическая ветвь по теории Сливкера в коротковолновом диапазоне пропорциональна скорости крутильной волны.
3. Теория Сливкера обладает тем преимуществом, что позволяет обнаружить оптическую ветвь дисперсии, фазовая скорость которой в коротковолновом диапазоне близка к скорости продольной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И.И. Введение в акустическую динамику машин/ И. И. Артоболевский, Ю. И. Бобровницкий, М. Д. Генкин. – М.: Наука, 1979. – 296с.
2. Ерофеев В.И. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность/ В. И. Ерофеев, В. В. Кажаяв, Н. П. Семерикова. – М.: Физматлит, 2002. – 2008с. – ISBN 5-9221-0294-X.
3. Джанелидзе Г.Ю. К теории тонких и тонкостенных стержней/ Г.Ю. Джанелидзе // Прикладная математика и механика. – 1949. – т.13 – вып. 6.
4. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. – М.:Физматгиз, 1959. – 568 с.
5. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. Учебное пособие. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. – 736 с.
6. Дьяков С.Ф. Сравнительный анализ задачи кручения тонкостенного стержня по моделям Власова и Сливкера/ С.Ф. Дьяков// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – №1. – с.24-32. – Библиограф.:5