Интернет-журнал «Науковедение» ISSN 2223-5167 http://naukovedenie.ru/
Том 7, №6 (2015) http://naukovedenie.ru/index.php?p=vol7-6
URL статьи: http://naukovedenie.ru/PDF/25TVN615.pdf
DOI: 10.15862/25TVN615 (http://dx.doi.org/10.15862/25TVN615)

УДК 519.688

Цветкова Инна Владимировна
ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный строительный университет»
Россия, Ростов-на-Дону[1]
Ассистент
E-mail: pilipenkoIV@ mail.ru

Алгоритм вычислительных процедур при построении хеджирующих стратегий на финансовых рынках с бесконечным числом состояний

[1] 344022, Ростов-на-Дону, ул. Социалистическая, 162

Аннотация. Построение хеджирующих стратегий является одной из основных задач, возникающих в теории (B,S)-рынков. В связи с кризисными событиями, происходит расширение и усложнение финансовых рынков. При этом возникает необходимость создания инструментов, позволяющих производить сложные расчёты, связанные с определением справедливых цен финансовых обязательств, вычислением компонент хеджирующих портфелей ценных бумаг. Создание таких инструментов основано на разработке соответствующих алгоритмов. В данной работе рассматриваются одношаговые безарбитражные неполные рынки со счётным числом состояний. Для них представлен общий алгоритм вычисления компонент хеджирующего портфеля для платёжных обязательств марковского типа. Вычисления основаны на теории хааровских интерполяций финансовых рынков с помощью специальных мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному свойству универсальной хааровской единственности – важному интерполяционному свойству, позволяющему преобразовывать неполные модели в полные.

Ключевые слова: финансовый рынок; мартингальная мера; ослабленное свойство универсальной хааровской единственности; самофинансируемый портфель; полный капитал; платёжное обязательство; интерполирующая фильтрация.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00637а).

Ссылка для цитирования этой статьи:

Цветкова И.В. Алгоритм вычислительных процедур при построении хеджирующих стратегий на финансовых рынках с бесконечным числом состояний // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 7, №6 (2015) http://naukovedenie.ru/PDF/25TVN615.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/25TVN615

Статья опубликована 25.11.2015.

Рассмотрим случай, когда на рынке действует очень большое число скупщиков акций. С математической точки зрения эту ситуацию представляют в виде (B,S)-рынка с бесконечным числом состояний. По этой причине возникает много технических идейных трудностей при моделировании и исследовании таких финансовых рынков. Результаты, представленные в данной статье, основаны на том, что счётное вероятностное пространство допускает возможность использования методов хааровских интерполяций. Благодаря этому удаётся преобразовывать неполные безарбитражные рынки в полные безарбитражные рынки со счётным числом состояний, на которых осуществляется вычисление всех расчётов, необходимых для оптимального поведения инвесторов на финансовых рынках.

Модели одношаговых (B,S)-рынков

Пусть Ω — счётное пространство элементарных событий $\mathbf{F}=\left(\mathsf{F}_0,\mathsf{F}_1\right)$ — одношаговая фильтрация, F_0 — тривиальная σ-алгебра, F_1 — σ-алгебра, порождённая разбиением Ω на счётное число атомов A_i, $i=1,2,3,\ldots$. Рассмотрим $\mathbf{F}$-адаптированный случайный процесс $Z=\left(Z_k,\mathsf{F}_k\right)_{k=0}^{1}$. На пространстве $\left(\Omega,\mathbf{F}\right)$ зададим одношаговый (B,S)-рынок, где случайный процесс Z — дисконтированная стоимость акции. Обозначим его значения: $Z_0(\Omega)=a,\ Z_1(A_i)=b_i,\quad a\in R,\ b_i\in R,\ i=1,2,3,\ldots,$ где R — множество всех действительных чисел. Представленный в данной работе алгоритм написан для случая, когда среди значений $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ только три различных: b_1,b_2,b_3.

Будем говорить, что число b имеет кратность m , если в последовательности $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ оно присутствует m раз $(m\le\infty)$. Пусть m_i кратность значения b_i, $i=1,2,3$ $(m_i\le\infty)$. Изменив нумерацию, получим следующую систему обозначений:

$$\begin{aligned} &b_1=b_4=b_7=\ldots=b_{3j-2},\quad 1\le j<m_1+1\\ &b_2=b_5=b_8=\ldots=b_{3j-1},\quad 1\le j<m_2+1\\ &b_3=b_6=b_9=\ldots=b_{3j},\quad 1\le j<m_3+1. \end{aligned} \tag{1}$$

При этом считаем, что как минимум две цепочки этих равенств должны быть бесконечными. В последовательности $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ можно также выделить три группы событий, на каждом из которых значения с.в. Z_1 совпадают соответственно с b_1,b_2,b_3: $\{A_{3i-2}\}_{i=1}^{m_1}$; $\{A_{3i-1}\}_{i=1}^{m_2}$; $\{A_{3i}\}_{i=1}^{m_3}$. Обозначим:

$$D_1=\bigcup_{i=1}^{m_1}A_{3i-2};\ D_2=\bigcup_{i=1}^{m_2}A_{3i-1};\ D_3=\bigcup_{i=1}^{m_3}A_{3i}.$$

Пусть $\mathsf{P}=\{P=(p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots):p_i=P(A_i)>0,\ i=1,2,3,\ldots\}$, $\mathsf{P}(Z,\mathbf{F})\subset\mathsf{P}$ — множество вероятностных мер, относительно которых процесс Z является мартингалом. Это множество совпадает с множеством решений системы:

$$\begin{cases} b_1p_1+b_2p_2+\ldots+b_np_n+\ldots=a\\ p_1+p_2+\ldots+p_n+\ldots=1\\ p_i>0,\quad i=1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{2}$$

Пусть: $x_1=\sum_{i=1}^{m_1}p_{3i-2}$, $x_2=\sum_{i=1}^{m_2}p_{3i-1}$, $x_3=\sum_{i=1}^{m_3}p_{3i}$. Тогда система (2) может быть записана:

$$\begin{cases} b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = a \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i > 0, \quad i = 1,2,3 \end{cases} \tag{3}$$

Для того, чтобы множество решений системы (3) было непусто, необходимо выполнение неравенства: $\min\limits_{1\le i\le 3} b_i < a < \max\limits_{1\le i\le 3} b_i$. Решив систему (3) можно найти все решения системы (2). В дальнейшем будем считать, что $b_1 < a < b_2 < b_3$.

Алгоритм хеджирования произвольного платёжного обязательства марковского типа

Шаг 1. Конструируем модель исходного (B,S)-рынка.

1) Определяем значения кратностей m_1, m_2, m_3. При этом возможно четыре случая:

случай 1: $m_1 = 1, m_2 = \infty,\ m_3 = \infty$;

случай 2: $m_1 = \infty, m_2 < \infty,\ m_3 = \infty$;

случай 3: $m_1 = \infty, m_2 = \infty,\ m_3 < \infty$;

случай 4: $m_1 = \infty, m_2 = \infty,\ m_3 = \infty$.

2) Задаём значения случайного процесса Z.

3) Задаем ограниченное финансовое обязательство марковского типа (например опцион-call: $f = (Z_1 - K)^+$ или опцион-put: $f = (K - Z_1)^+$). Так как мы рассматриваем случай, когда случайная величина Z_1 принимает три различных значения, то $f = c_1 I_{D_1} + c_2 I_{D_2} + c_3 I_{D_3}$.

4) Проверяем финансовое обязательство f на реплицируемость на исходном рынке. Решаем систему:

$$\begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 Z_1(D_1) = f(D_1) \\ \beta_1 + \gamma_1 Z_1(D_2) = f(D_2), \\ \beta_1 + \gamma_1 Z_1(D_3) = f(D_3) \\ \beta_1 + \gamma_1 Z_0(\Omega) = X_0 \end{cases}$$

при этом $X_0 = \beta_0 + \gamma_0 Z_0(\Omega)$. Предположим, что $\gamma_0 = 0$, тогда $X_0 = \beta_0$.

Если финансовое обязательство реплицируемо, то есть рассматриваемая система имеет решение $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n=0}^{1}$, тогда вычисления завершаются (переход на шаг 5). Если же финансовое обязательство нереплицируемо, то рассматриваемый рынок является неполным. Переход к полному рынку осуществляется с помощью метода специальных хааровских интерполяций, который работает только при наличии мартингальной меры, удовлетворяющей ослабленному свойству универсальной хааровской единственности (ОСУХЕ, [1], [2]).

Шаг 2. Работа с мартингальной мерой, удовлетворяющей ОСУХЕ.

1) Для построенной на шаге 1 модели, находим мартингальную меру, удовлетворяющую ОСУХЕ. В *случае 1* любая мартингальная мера удовлетворяет ОСУХЕ (см.

[3]), для *случаев 2-4* мартингальная мера, удовлетворяющая ОСУХЕ, конструируется специальным образом (см. [4]). Получаем значения $x_1 = \sum_{i=1}^{m_1} p_{3i-2}$, $x_2 = \sum_{i=1}^{m_2} p_{3i-1}$, $x_3 = \sum_{i=1}^{m_3} p_{3i}$.

2) Вычисляем цену финансового обязательства:

$$f(P) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 .$$

Шаг 3. Строим специальную хааровскую интерполяцию исходного рынка.

1) Для интерполирующего рынка задаём вычислительный горизонт N. Типичной схемой специальной хааровской фильтрации является схема, когда при переходе от момента времени n к моменту $n+1,\ n=1,2,3,...$ дробится только один атом, причём тот, который в результате дробления был получен на предыдущем шаге.

Порядок появления событий $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ между моментами времени n и $n+1,\ n=1,2,3,...,N$ представим в виде вектора $\delta = \left(\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, ..., \delta^{(N)}\right)$, координаты которого зависимые случайные величины и определяются с помощью генератора случайных векторов, основанного на геометрическом распределении (см. [5], [6]). Фильтрация $\mathbf{H}$, интерполирующая фильтрацию $\mathbf{F}$, представляет собой: $\mathsf{H}_0 = \mathsf{F}_0$, $\mathsf{H}_1 = \sigma\left\{A_{\delta^{(1)}}\right\}, \ldots, \mathsf{H}_N = \sigma\left\{A_{\delta^{(1)}}, A_{\delta^{(2)}}, ..., A_{\delta^{(N)}}\right\}$.

2) Для каждого случайного события с помощью специального алгоритма вычисляются компоненты мартингальной меры, полученной на шаге 2.

3) Решая мартингальную задачу Дирихле с граничной случайной величиной Z_1, получаем значения случайного процесса $(Y_k)_{k=0}^{N}$, интерполирующего процесс Z:

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} b_{\delta^{(k)}} I_{A_{\delta^{(k)}}} + \frac{a - \sum_{k=1}^{n} b_{\delta^{(k)}} p_{\delta^{((k))}}}{1 - \sum_{k=1}^{n} p_{\delta^{(k)}}} I_{B_{n,\delta^{(n)}}}, \qquad n = 0,1,2,...,N,$$

где $B_{n,\delta^{(n)}} = \overline{A_{\delta^{(1)}} + A_{\delta^{(2)}} + ... + A_{\delta^{(n)}}},\ n = 1,2,...,N$.

Шаг 4. Вычисление компонент самофинансируемого портфеля и его полного капитала.

Пусть $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ — самофинансируемый портфель, где $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$ и $(\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ — предсказуемые относительно $\mathbf{H}$ последовательности (см. [7]):

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_n^{\delta^{(k)}} I_{A_{\delta^{(k)}}} + \gamma_n^{\delta^{(n)}} I_{B_{n-1,\delta^{(n-1)}}}, \quad n = 1,2,3,...$$

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_n^{\delta^{(k)}} I_{A_{\delta^{(k)}}} + \beta_n^{\delta^{(n)}} I_{B_{n-1,\delta^{(n-1)}}}, \quad n = 1,2,3,... .$$

Для удобства будем предполагать, что $\gamma_n^{\delta^{(k)}} = 0, \quad k = 1,2,3,...,n-1,\ n \ge 2$. Известно (см. [8], [9]), что

$$\gamma_n^{\delta^{(n)}} = \frac{c_{\delta^{(n)}} - f(P) + \sum_{k=1}^{n-1} c_{\delta^{(k)}} p_{\delta^{(k)}}}{b_{\delta^{(n)}} - a + \sum_{k=1}^{n-1} b_{\delta^{(k)}} p_{\delta^{(k)}}}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$\beta_n^{\delta^{(k)}} = c^{\delta^{(k)}}, \quad k = 1,2,3,\ldots,n-1, \quad n \geq 2,$$

$$\beta_n^{\delta^{(n)}} = c_{\delta^{(n)}} - \gamma_n^{\delta^{(n)}}, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Полный капитал портфеля $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ вычисляется по формуле:

$$X_n = E^P\left[f \middle| H_n\right] = \sum_{k=1}^{n} c_{\delta^{(k)}} I_{A_{\delta^{(k)}}} + \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} c_{\delta^{(k)}} p_{\delta^{(k)}}}{\sum_{k=n+1}^{\infty} p_{\delta^{(k)}}} I_{B_{n,\delta^{(n)}}}, \qquad n = 1,2,3,\ldots.$$

Так как $\beta_n = \beta_n^n = \beta_n^{n+1} = \ldots$, $\gamma_n = \gamma_n^n = \gamma_n^{n+1} = \ldots$, $\forall n = 0,1,2,\ldots$ и $\lim_{n\to\infty} X_n = f$ P-п.н. (см. [10]), то мы получаем полный рынок, интерполирующий исходный.

Шаг 5. Конец алгоритма.

Заключение

Полученный алгоритм позволяет применить метод специальных хааровских интерполяций к реальным расчётам на безарбитражных финансовых рынках. Поэтому он может быть положен в основу соответствующего программного комплекса, что существенно облегчит выбор оптимальных стратегий инвесторов на финансовых рынках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данекянц А.Г. Моделирование безарбитражных финансовых рынков с помощью хааровских интерполяций на счётном вероятностном пространстве: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Ростов-на-Дону, 2005.
2. Данекянц А.Г., Павлов И.В. Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности // Обозрение прикл. и промышл. матем., М.: ТВП. 2004. Т. 11. В. 3. – с. 506-508.
3. Павлов И.В., Цветкова И.В., Шамраева В.В. Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров // Вестник РГУПС, 2012, №3, с. 177-181.
4. Павлов И.В., Цветкова И.В., Шамраева В.В. О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров: конструктивистский подход. Вестник РГУПС, 2014, №4 (56), с. 132-138.
5. Можаев Г.А. Случайные интерполяции финансовых рынков с тремя агрессивными скупщиками акций // Изв. Вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2006, Приложение №12 (48), с. 4-17.
6. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям // «Наука», 2001, 296 с.
7. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики // Том 1. Факты. Модели. М: ФАЗИС, 1998. 512 с.
8. Цветкова И.В., Шамраева В.В. Расчёт компонентов хеджирующего портфеля с помощью процедуры хааровской интерполяции // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Выпуск 3 - 2013 (16) http://naukovedenie.ru/PDF/45trgsu313.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.
9. Шамраева В.В. Вычисление компонентов хеджирующего портфеля для некоторых платежных обязательств, заданных в финальный момент времени финансового рынка с бесконечным числом состояний // Вестник Московского университета им. С.Ю. Витте. Серия 1: Экономика и управление. 2014, №1.
10. Ширяев А.Н., Чёрный А.С. Векторный стохастический интеграл и фундаментальные теоремы теории арбитража. // Труды математического института им. В.А. Стеклова РАН, 2002, т. 237, с. 7-11.

Рецензент: Климентов Сергей Борисович, профессор, доктор ф.-м. н., «Южный Федеральный Университет», «Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича».

Tsvetkova Inna Vladimirovna
Rostov State University of Civil Engineering
Russia, Rostov-on-Don
E-mail: pilipenkoIV@ mail.ru

Algorithm for computing procedures at construction of hedging strategies in financial markets infinite number of states

Abstract. The construction of the hedging strategies is one of the main goals, which we can meet in the theory of (B,S)-markets. Due to the crisis events we have an expansion and a complexity of financial markets. Therefore we have to create the tools, which can help us to do the complex calculations. These calculations are devoted to the definition of the fair price of the financial obligations, the calculation of the components of the hedging portfolios. The creation of such kind instruments is based on the development of the algorithms. In this paper we consider one-step incomplete arbitrage-free markets with a countable number of states. For these markets there is a general algorithm for calculating of the components of the hedging portfolio for the payment obligations of Markov process. The calculations are based on the theory of Haar interpolations of financial markets with the special martingale measures that satisfy a weak property universal Haar uniqueness an important interpolation property, which allows us to convert incomplete models in complete ones.

Keywords: financial market; martingale measure; weakened universal Haar uniqueness property; self-financing portfolio; capital of portfolio; contingent claim; interpolating filtration.

REFERENCES

1. Danekyants A.G. Modeling of arbitration-free financial markets using Haar interpolations on a countable probability space: Dis. …Candidate Phis.-Math. Sciences / A.G. Danekyants. – Rostov-on-Don, 2005.
2. Danekyants A.G., Pavlov I.V. On the weakened Haar universal uniqueness property // Obozrenie Prikl. Promyshl. Mat. 2004. Vol. 11. №3. P. 506-508.
3. Pavlov I.V., Tsvetkova I.V., Shamraeva V.V. Some results on martingale measures of one-step models of financial markets associated with the noncoincidence barycenter condition // Vestnik RGUPS, 2012, No. 3, P. 177-181.
4. Pavlov I.V., Tsvetkova I.V., Shamraeva V.V. On the existing of martingale measures satisfying weakened noncoincidence barycenter condition: constructivist approach // Vestnik RGUPS, 2014, No.4 (56), P. 132-138.
5. Mozhaev G.A. Random interpolations of financial markets with three aggressive buyers up of shares. // Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkaz. Region. Estestv. Nauki. 2006, Annex №12 (48), p. 4-17.
6. Vadzinsky R.N. Handbook of probability distributions // "Nauka", 2001, 296 pp.
7. Shiryaev A.N. Essentials of Stochastic Financial Mathematics // Volume 1. Facts. Models. M: Fazis, 1998. 512 pp.
8. Tsvetkova I.V., Shamraeva V.V. Raschet komponentov khedzhiruyushchego portfelya s pomoshch'yu protsedury khaarovskoy interpolyatsii // Internet-zhurnal «NAUKOVEDENIE» Vypusk 3 - 2013 (16) http://naukovedenie.ru/PDF/45trgsu313.pdf (dostup svobodnyy). Zagl. s ekrana. Yaz. rus., angl.
9. Shamraeva V.V. The calculation of components of hedging portfolio for payment obligations fixed at final time moment of financial market with infinite number of states. Vestnik MOSCOW UNIVERSITY NAMED S.U. VITTE. Series 1: Economics and management. 2014, №1.
10. Shiryaev A.N., Cherny A.S. Vector stochastic integrals and fundamental theorems of asset pricing // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2002, t. 237, p. 7-11.