Бескопыльный Алексей Николаевич
Ростовский государственный строительный университет
Проректор по учебно-методической работе
Доктор технических наук, профессор
Beskopylny Alexei Nikolaevich
Rostov State University of civil engenering
Vice-Rector for Teaching and Studies
E-Mail: sopromat@rgsu.ru

Языев Батыр Меретович
Ростовский государственный строительный университет
Заведующий кафедрой «Сопротивление материалов»
Доктор технических наук, профессор
Yazyyev Batyr
Rostov State University of Civil Engineering
Head of the Department "Strength of Materials"
Doctor of Technical Sciences, Professor
E-Mail: 277588@rambler.ru

Краснобаев Игорь Алексеевич
Ростовский государственный строительный университет
Кандидат технических наук, профессор
Krasnobaev Igor A.
Rostov State University of civil engineering
Professor
E-Mail: sopromat@rgsu.ru

Маяцкая Ирина Александровна
Ростовский государственный строительный университет
Кандидат технических наук, доцент
Mayatskaya Irina A.
Rostov State University of civil engenering
Associate Professor
E-Mail: irina.mayatskaya@mail.ru

Икуру Годфрей Аарон
Ростовский государственный строительный университет
Аспирант
Ikura Aaron Godfrey
Rostov State University of civil engineering
Postgraduate
E-Mail: sopromat@rgsu.ru

05.23.17 – Строительная механика

Определение частоты собственных колебаний составной конструкции

Determination of the natural frequency of the composite structure

Аннотация: Определение частоты собственных колебаний составной конструкции, состоящей из шестиугольной пластины и круговой цилиндрической оболочки, представлена в виде функционала, зависящего от коэффициентов при аппроксимирующих функциях.

Abstract: Determination of the natural frequency of the composite structure consisting of hexagonal plates and circular cylindrical shells, is presented in the form of functional which depends on the coefficients of the approximating function.

Ключевые слова: Пластина; оболочка; прочность; составная конструкция.

Key words: Plate; shell; the strength; the composite structure.

***

Рассмотрим свободные колебания составной конструкции, состоящей из шестиугольной пластины и круговой цилиндрической оболочки. Толщины пластинки и цилиндрической оболочки достаточно малы. Материал блока принят упругим, однородным, изотропным. Внешняя нагрузка считается приложенной в вершинах шестиугольных пластин оснований [1] – [11].

Условие функционала энергии $\dfrac{\partial \Pi}{\partial a_{km,rs}^{ji}} = 0$, (1)

где $j = I, II$ – номер тела; $i = 1,2,...6$ – номер нагружения; $m = 1,2,3$ – номер координатной оси; $r, s = 0,1,2,..., n$ – номер приближения.

Выражение для функционала, зависящего от коэффициентов при аппроксимирующих функциях, имеет вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{km,rs}^{ji}} = {}^{l}M_{km}^{ji} \cdot {}^{l}a_{km}^{ji} - {}^{l}N_{km}^{ji} \cdot {}^{l}P_{k}^{i}, \quad (2)$$

где j – номер тела; $l = 1,2,...$ – номер загружения пары соответствующих вершин; $i = 1,2,...6$ – номер нагружения; $k = 1,2,...$ – номер блока; $m = 1,2,3$ – номер координатной оси; ${}^{l}a_{km}^{ji}$ – матрица неизвестных коэффициентов системы при загружении пары соответствующих вершин тел нагрузкой P_k^i; ${}^{l}M_{km}^{ji}$ – некоторая числовая матрица при неизвестных коэффициентах, если загружена пара соответствующих вершин в k – ом блок; ${}^{l}P_k^i$ – матрица нагрузок, приложенных в той же паре вершин; ${}^{l}N_{km}^{ji}$ – некоторая числовая матрица аппроксимирующих функций, вычисленных в точках приложения нагрузок. Порядок алгебраической системы определяется по формуле: $n_c = (n \cdot n - 1) \cdot 6$.

Используем принцип возможной работы для определения частоты свободных колебаний:

$$\delta\left(\Pi^0 - T^0\right) = 0, \quad (3)$$

где Π^0,– потенциальная энергия деформируемой конструкции, вычисленная для величин амплитуд; T^0,– кинетическая энергия деформируемой конструкции, вычисленная для величин амплитуд.

При свободных колебаниях конструкции из всех амплитуд перемещений, удовлетворяющих граничным условиям, действительными будут те, которые доставляют экстремальное значение величине $(\Pi^0 - T^0)$, которую можно рассматривать как некоторую функцию амплитуд перемещений всех незакрепленных узлов конструкции. Поэтому условие экстремума имеет вид

$$\frac{\partial \Pi^0}{\partial V_m^{L0}} - \frac{\partial T^0}{\partial V_m^{L0}} = 0, \tag{4}$$

где $m = 1,2,3$ – номер координатной оси; $L = 1,2,3...$ – номер узла.

Так как система состоит из некоторого числа блоков, то получим следующее условие

$$\sum_\kappa \frac{\partial \Pi_\kappa^{\ 0}}{\partial V_m^{L0}} - \sum_\kappa \frac{\partial T_\kappa^{\ 0}}{\partial V_m^{L0}} = 0, \tag{5}$$

В каждой вершине сходится не более трех блоков, поэтому в сумме будет не больше трех слагаемых. Для некоторого узла *r* получим

$$\sum_{\kappa=1,2,3} \frac{\partial \Pi_\kappa^{\ 0}}{\partial V_m^{r0}} - \sum_{\kappa=1,2,3} \frac{\partial T_\kappa^{\ 0}}{\partial V_m^{r0}} = 0. \tag{6}$$

Последовательно перебираем все блоки конструкции. Для решения задачи нужно найти каждое слагаемое в выражении (5). Для определения $\frac{\partial \Pi_\kappa^{\ 0}}{\partial V_m^{r0}}$ достаточно перейти к их амплитудам.

$$\frac{\partial \Pi_\kappa^{\ 0}}{\partial V_m^{r0}} = \mathbf{N_к S_к^{-1} L_к Z_к} V^L \mathbf{W_к L_к Z_к} \frac{\partial V^{L0}}{\partial V_m^{r0}} \;. \tag{7}$$

В результате получим $\frac{\partial \Pi_\kappa^{\ 0}}{\partial V_m^{r0}} = \mathbf{A_к} V^{L0}$. (8)

Определим кинетическую энергию деформируемой конструкции, вычисленную для величин амплитуд. Известно, что $T_\kappa^{\ 0} = \frac{\omega^2}{2} \iiint\limits_{(V)} \left[(u_{k1}^0)^2 + (u_{k2}^0)^2 + (u_{k3}^0)^2 \right] dV,$ (9)

где u_{km}^0– амплитуды перемещений любой точки *к* блока по направлению *m*.

Проведем дифференцирование по амплитуде перемещения узлов выражения (9):

$$\frac{\partial T_\kappa^{\ 0}}{\partial V_m^{r0}} = \omega^2 \iiint\limits_{(V)} \left[(u_{k1}^0) \frac{\partial u_{k1}^0}{\partial V_m^{r0}} + (u_{k2}^0) \frac{\partial u_{k2}^0}{\partial V_m^{r0}} + (u_{k3}^0) \frac{\partial u_{k3}^0}{\partial V_m^{r0}} \right] dV, \tag{10}$$

Введем обозначения: $\mathbf{u_k^0} = (u_{k1}^0, u_{k2}^0, u_{k3}^0)$, $\frac{\partial \mathbf{u_k^0}}{\partial V_m^{r0}} = \left(\frac{u_{k1}^0}{\partial V_m^{r0}}, \frac{u_{k2}^0}{\partial V_m^{r0}}, \frac{u_{k3}^0}{\partial V_m^{r0}} \right)$.

В результате получаем

$$\frac{\partial T_{\kappa}{}^{0}}{\partial V_m^{r0}} = \omega^2 \iiint\limits_{(V)} \left[\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{0}} \frac{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{0}}}{\partial V_m^{r0}} \right] dV. \qquad (11)$$

Величины перемещений любой точки блока были определены в [7],[8]. Амплитуды перемещений определяются формулами: $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{0}} = \mathbf{T}_{\mathbf{k}} \mathbf{L}_{\mathbf{k}} \mathbf{Z}_{\mathbf{k}} V^{0L}$. (12)

Подставляя (12) в (11), получим:

$$\frac{\partial T_{\kappa}{}^{0}}{\partial V_m^{r0}} = \omega^2 \iiint\limits_{(V)} \left[\mathbf{T}_{\mathbf{k}} \mathbf{L}_{\mathbf{k}} \mathbf{Z}_{\mathbf{k}} V^{0L} \mathbf{T}_{\mathbf{k}} \mathbf{L}_{\mathbf{k}} \mathbf{Z}_{\mathbf{k}} \frac{\partial V^{0L}}{\partial V_m^{r0}} \right] dV. \qquad (13)$$

где $\frac{\partial V^{0L}}{\partial V_m^{r0}} = \begin{cases} 1, \text{если } L = r \\ 0, \text{если } L \neq r \end{cases}.$

В результате получим $\frac{\partial T_{\kappa}{}^{0}}{\partial V_m^{r0}} = \omega^2 \mathbf{B}_{\mathbf{\kappa}} V^{L0}$. (14)

Подставляя (8) и (14) в выражение (6), получим систему линейных однородных алгебраических уравнений, которая имеет решение, если $\left| \mathbf{A}^{\mathbf{2}} - \omega^2 \mathbf{B} \right| = 0$, (15)

где $\mathbf{A} = \sum\limits_{\kappa=1,2,3} \mathbf{A}_{\mathbf{\kappa}}$ и $\mathbf{B} = \sum\limits_{\kappa=1,2,3} \mathbf{B}_{\mathbf{\kappa}}$.

Данное уравнение решается численно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А. Техническая теория тонких упругих оболочек [Текст]: Монография / А.А. Амосов.– М.:АСВ, 2009. – 332 с.
2. Филин А.П. Элементы теории оболочек [Текст]: Монография / А.П. Филин.– Л.: Стройиздат, 1975. – 256 с.
3 Огибалов П.М., Колтунов М.Л. Оболочки и пластины [Текст]: Монография / П.М. Огибалов, М.Л.Колтунов.– М.:МГУ, 1969. – 696 с.
4. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки [Текст]: Монография / Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.–М.: Наука, 1966. – 636 с.
5. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А. Основы расчета на изгиб тонких жестких пластин [Текст]: Монография / Краснобаев И.А., Маяцкая И.А. – Ростов н/Д, РГСУ, 2011.– 108 с.
6. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А., Смирнов И.И., Язьев Б.М. Теория пластин и оболочек: [Текст]: Монография / Краснобаев И.А., Маяцкая И.А., Смирнов И.И., Язьев Б.М. – Ростов н/Д, РГСУ, 2011.– 120 с.
7. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А., Икуру Годфрей Аарон Энергия деформации составной конструкции, состоящей из шестиугольной пластины и круговой цилиндрической оболочки.[Текст] //Интернет-журнал «Науковедение». 2013 №3 (16) [Электронный ресурс].-М. 2013. – Режим доступа: http://naukovedenie.ru.
8. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А., Икуру Годфрей Аарон Нагружение блока составной конструкции из местиугольной пластины и круговой цилиндрической оболочки.[Текст] //Интернет-журнал «Науковедение». 2013 №3 (16) [Электронный ресурс].-М. 2013. – Режим доступа: http://naukovedenie.ru.
9. Calladine C.R. Theory of shell structures.– N.Y.: Cambridge University Press, 1989, – 788 p.
10. Zingoni A. Shell structures in civil and mechanical engineering.– N.Y.: Thomas Telford Publishing, 1997, –351 p.
11. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек.–Л.:Политехника, 1961, – 658 с.

Рецензент: Язьев Батыр Меретович, доктор технических наук, профессор, Ростовский государственный строительный университет, заведующий кафедрой "Сопротивление материалов".