

Интернет-журнал «Наукоедение» ISSN 2223-5167 <http://naukovedenie.ru/>

Том 9, №4 (2017) <http://naukovedenie.ru/vol9-4.php>

URL статьи: <http://naukovedenie.ru/PDF/28TVN417.pdf>

Статья опубликована 11.08.2017

**Ссылка для цитирования этой статьи:**

Лапиков А.Л., Масюк В.М. Анализ решения прямой задачи о положении механизма параллельной структуры с вращательными приводами в кинематических цепях // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 9, №4 (2017) <http://naukovedenie.ru/PDF/28TVN417.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

**УДК 621.86/87**

**Лапиков Антон Леонидович**

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
Филиал в г. Калуга, Россия, Калуга<sup>1</sup>  
Ассистент кафедры М6-КФ «Мехатроника и робототехника»  
E-mail: [anton.lapikov@inbox.ru](mailto:anton.lapikov@inbox.ru)  
РИНЦ: [http://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=801711](http://elibrary.ru/author_profile.asp?id=801711)

**Масюк Владимир Михайлович**

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
Филиал в г. Калуга, Россия, Калуга  
Доцент кафедры М6-КФ «Мехатроника и робототехника»  
Кандидат физико-математических наук  
E-mail: [masyuk77@mail.ru](mailto:masyuk77@mail.ru)  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3543-2781>  
РИНЦ: [http://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=110211](http://elibrary.ru/author_profile.asp?id=110211)  
Scopus: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7801670833>

**Анализ решения прямой задачи о положении  
механизма параллельной структуры с вращательными  
приводами в кинематических цепях**

**Аннотация.** В работе рассмотрен пространственный механизм параллельной структуры с вращательными кинематическими парами в каждой цепи. Данный механизм применяется в качестве отдельной секции многосекционного механизма параллельной структуры. Проведён структурный анализ механизма, показавший, что механизм обладает шестью степенями подвижности.

Предложен метод решения прямой задачи о положении с использованием аналитического уравнения плоскости, в которой лежит выходное звено механизма. Подход сводится к решению системы нелинейных уравнений, а использование данного метода позволило сформировать систему из однотипных уравнений и уменьшить их количество.

Решение данной системы нелинейных уравнений представляется достаточно сложной задачей в связи с высокой ресурсоемкостью при использовании численных методов, помимо этого задача усложняется не единственностью получаемого решения. Произведена классификация решений, где отмечено, что получаемые решения можно разделить на

---

<sup>1</sup> 248000, г. Калуга, ул. Баженова, д. 2

комплексные и действительные. Количество комплексных решений, полученных для данного механизма, составило 8, действительных – 8. Анализ показал, что не все действительные решения являются физически реализуемыми. Выявлено, что физическая нереализуемость в данном случае имеет две основные причины: симметричность полученного решения относительно плоскости ХОУ, причиной чего является тип нелинейности исходных уравнений, и вторая причина – конструктивная невозможность исполнения корректного, с точки зрения математики, решения. Наглядно было показано существование математически корректных, но физически нереализуемых решений. Таким образом, был сделан вывод, что из 8 действительных решений только одно является адекватным. Внесены предложения по устранению некорректных решений.

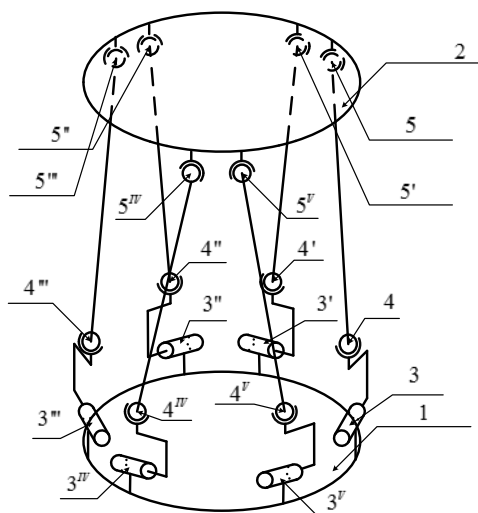
**Ключевые слова:** механизмы параллельной структуры; прямая задача о положении; кинематическая цепь; структура решения; адекватные решения

### Введение

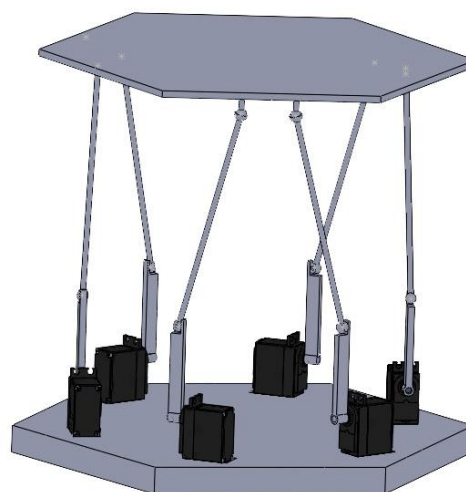
Во многих работах [1-9] подтверждается факт наличия значительных преимуществ механизмов параллельной структуры по сравнению с механизмами последовательной структуры. Среди таких характеристик выделяют высокую жесткость, равномерное распределение усилий по всей конструкции, точность позиционирования выходного звена манипулятора, более значительную грузоподъемность устройства при исходной одинаковой массе, возможные скорость перемещения и ускорение выходного звена, обусловленные его меньшей массой, показатели металлоемкости.

Однако, общеизвестным недостатком механизмов параллельной структуры является малый объем рабочего пространства. И одним из самых простых и очевидных методов устранения данного недостатка стало консольное объединение нескольких механизмов в один, называемый многосекционным механизмом параллельной структуры (ММПС).

В данной работе рассматривается механизм параллельной структуры с вращательными приводами в кинематических цепях, на базе которого возможно построение ММПС. На рис. 1 приведена структурная схема данного устройства, а на рис. 2 – 3D-модель для проверки теоретических расчетов.



**Рисунок 1.** Структурная схема механизма параллельной структуры с вращательными приводами в кинематических цепях (составлен авторами)



**Рисунок 2.** 3D-модель механизма параллельной структуры с вращательными приводами в кинематических цепях (составлен авторами)

Решение прямой задачи о положении является важным этапом исследования любого механизма, необходимым как для определения рабочего пространства, так и для проведения моделирования движения. Однако при решении данной задачи для механизмов параллельной структуры возникает ряд проблем, связанных, во-первых, с вычислительными трудностями [7, 8] и, во-вторых, с неоднозначностью получаемого решения [10, 11].

Целью данной работы является получение решения прямой задачи о положении механизма параллельной структуры с вращательными приводами в кинематических цепях и последующий анализ полученных результатов.

### Структурный анализ механизма

Как показано на рис. 1, рассматриваемый механизм состоит из основания 1, выполненного в виде круга, и выходного звена 2, также выполненного в виде круга. Входное и выходное звенья соединены между собой шестью кинематическими цепями. Кинематические цепи имеют одинаковую структуру, которая будет разобрана на примере первой цепи. Каждая кинематическая цепь содержит начальную вращательную кинематическую пару 3, закрепленную на основании 1, конечную сферическую пару 5, закрепленную на выходном звене 2, и промежуточную сферическую пару 4. Данный механизм работает следующим образом: выходное звено механизма 2 перемещается в пространстве из-за движения в кинематических цепях, реализуемое вращательными кинематическими парами  $3, 3', 3'', 3''', 3^{IV}, 3^V$ .

Для расчета числа степеней подвижности механизма воспользуемся структурной формулой Сомова-Малышева для пространственных механизмов

$$W = 6n - 5p_{5i} - 4p_{4i} - 3p_{3i} - 2p_{2i} - p_{1i}, \quad (1)$$

где:  $n$  – число подвижных звеньев;  $p_{5i}, p_{4i}, p_{3i}, p_{2i}, p_{1i}$  – число кинематических пар с 1, 2, 3, 4, 5 подвижностями в  $i$ -ой кинематической цепи.

Данный механизм характеризуется 14 звеньями, 6 кинематическими парами с 1 подвижностью и 12 кинематическими парами с 3 подвижностями. Подставляя эти данные в (1), получим

$$W = 6(14 - 1) - 5 \cdot 6 - 3 \cdot 12 = 12.$$

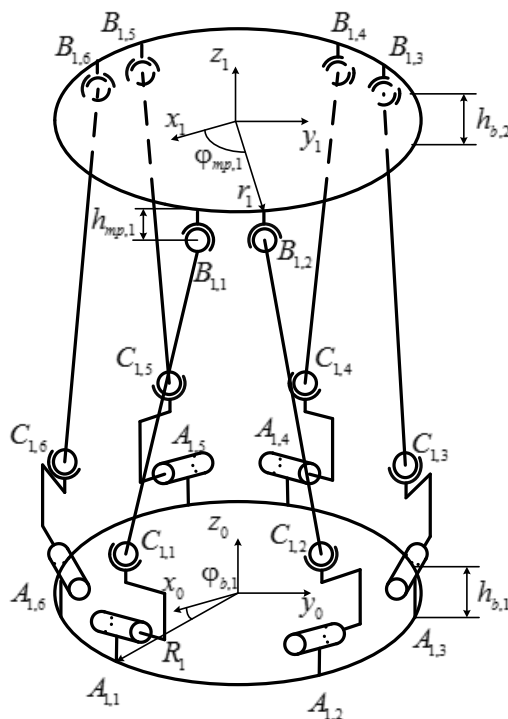
Рассматриваемый механизм характеризуется 12 подвижностями, которые могут быть редуцированы до 6 с помощью замены промежуточных сферических пар  $4, 4', 4'', 4''', 4^{IV}, 4^V$  на кинематические пары с 2 степенями подвижности. После замены формула (1) примет вид

$$W = 6(14 - 1) - 5 \cdot 6 - 4 \cdot 6 - 3 \cdot 6 = 6.$$

### Решение прямой задачи о положении

Введем следующие обозначения, как это показано на рис. 3. Входные вращательные пары секции обозначим точками  $A_i, i = \overline{1..6}$ , где индекс  $i$  определяет номер пары в секции. Выходные сферические пары секции обозначим точками  $B_i, i = \overline{1..6}$ , где индекс используется

аналогичным образом. Промежуточные сферические пары обозначим точками  $C_i, i = \overline{1..6}$ . Входные и выходные звенья будем считать идеальными дисками. Свяжем локальную систему координат с выходным звеном. При этом центр системы координат расположим в центре идеального диска, оси  $O_1x_1$  и  $O_1y_1$  считаем лежащими в плоскости диска, ось  $O_1z_1$  перпендикулярна плоскости диска. Положением и ориентацией механизма в пространстве будем считать положение и ориентацию системы координат выходного звена. Пусть входные и выходные пары располагаются в вершинах шестиугольников с радиусами  $R$  и  $r$  соответственно. Величины отрезков  $A_iC_i$  и  $C_iB_i$  обозначим за  $l_1$  и  $l_2$ . Будем считать, что входные и выходные пары секций отстоят от плоскостей основания и выходного звена на величины  $h_b$  и  $h_{mp}$  соответственно. Для определения координат шарниров введем параметры  $\Phi_b$  и  $\Phi_{mp}$ , определяющие угловые координаты первого шарнира основания и подвижной платформы. В качестве обобщенных координат данного механизма будем использовать углы между кулисой, соединяющей входную кинематическую пару  $A_i$  с промежуточной сферической парой  $C_i$ , и нормалью к плоскости основания. Обозначим данную величину  $\theta_i, i = \overline{1..6}$ .



**Рисунок 3.** Введенные обозначения (составлен авторами)

Прямую задачу о положении поставим следующим образом: найти положение и ориентацию выходного звена механизма по известным обобщенным координатам.

Положение и ориентацию выходного звена представим в виде матрицы однородного преобразования, общий вид которой:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) & \mathbf{p}(x, y, z) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix},$$

где:  $\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)$  – матрица поворота ( $3 \times 3$ ), функционально зависящая от углов Эйлера,  $\mathbf{p}(x, y, z)$  – вектор переноса ( $3 \times 1$ ),  $\mathbf{0}$  – нулевой вектор ( $1 \times 3$ ).

Решение прямой задачи о положении механизмов параллельной структуры является трудоемким. Наиболее часто применяется подход, требующий составления уравнений связи, описывающих расстояние между некоторыми точками [12]. Однако применение данного подхода к рассматриваемому механизму приведет к необходимости решения системы из 18 нелинейных уравнений. Для сокращения числа уравнений введем виртуальные точки и выразим через них координаты выходных кинематических пар.

Для определения координат точек  $C_i$  введем вспомогательный вектор, характеризующий геометрические особенности механизма

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} R - l_1 \sin(\theta_i) \\ 0 \\ h_b + R \cos(\theta_i) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Координаты точек  $C_i$  могут быть получены путем вращения вокруг оси  $\mathbf{z}_0$  на величину угловой координаты шарнира. Матрица однородного преобразования, описывающая поворот вокруг оси  $\mathbf{z}_0$ , имеет следующий вид

$$\mathbf{T}_{ROT}(\psi_i) = \begin{bmatrix} \cos(\psi_i) & -\sin(\psi_i) & 0 & 0 \\ \sin(\psi_i) & \cos(\psi_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где:  $\psi_i$  – угловая координата  $i$ -ой входной кинематической пары.

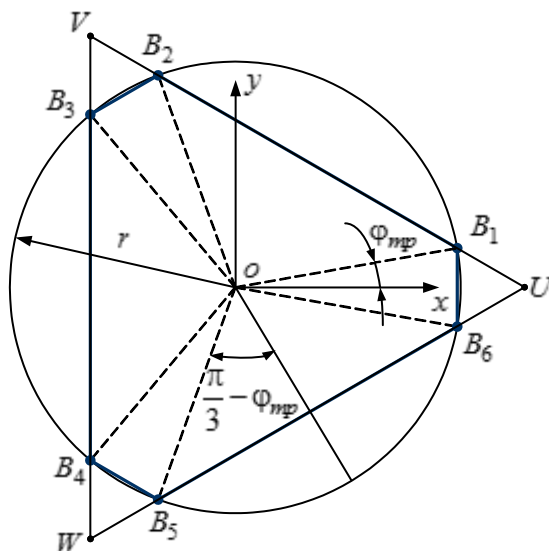
Для рассматриваемого механизма параллельной структуры с вращательными приводами угловые координаты входных кинематических пар равны:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_b, & \psi_2 &= \frac{2\pi}{3} - \varphi_b, & \psi_3 &= \frac{2\pi}{3} + \varphi_b, \\ \psi_4 &= \frac{4\pi}{3} - \varphi_b, & \psi_5 &= \frac{4\pi}{3} + \varphi_b, & \psi_6 &= -\varphi_b. \end{aligned}$$

Домножив вспомогательный вектор (2) на матрицу поворота (3), получим искомые координаты точек

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{T}_{ROT}(\psi_i) \mathbf{C}_0. \quad (4)$$

Положение и ориентация могут быть получены из аналитического уравнения плоскости подвижной платформы. Аналитическое уравнение плоскости может быть построено, если известны координаты трех точек, принадлежащих данной плоскости. При выборе данных точек необходимо придерживаться следующего ограничения: координаты шарниров должны выражаться через координаты выбранных точек. Выберем в качестве данных точек виртуальные точки  $U_i, V_i, W_i$ , как показано на рис. 4.



**Рисунок 4.** Подвижная платформа (вид сверху) (составлен авторами)

Длину стороны треугольника  $UVW$ , например,  $WU$ , будем искать как сумму длин отрезков  $WB_5$ ,  $B_5B_6$  и  $B_6U$ . Применив ряд тригонометрических преобразований получим

$$UV = VW = WU = 4r \sin(\varphi_{mp}) + 2r \sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi_{mp}\right).$$

Из следствия теоремы Фалеса

$$\begin{cases} x_c = x_a + k(x_b - x_a), \\ y_c = y_a + k(y_b - y_a), \\ z_c = z_a + k(z_b - z_a), \end{cases} \quad (5)$$

где  $k = \frac{|ac|}{|ab|}$ .

С учетом соотношения (5) выразим координаты шарниров платформы через виртуальные точки

$$\mathbf{B}_1 = \left[ x_U + K(x_V - x_U) \quad x_U + K(y_V - y_U) \quad z_U + K(z_V - z_U) \right]^T,$$

$$\mathbf{B}_2 = \left[ x_V + K(x_U - x_V) \quad y_V + K(y_U - y_V) \quad z_V + K(z_U - z_V) \right]^T,$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} x_V + K(x_W - x_V) & y_V + K(y_W - y_V) & z_V + K(z_W - z_V) \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} x_W + K(x_V - x_W) & y_W + K(y_V - y_W) & z_W + K(z_V - z_W) \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} x_W + K(x_U - x_W) & y_W + K(y_U - y_W) & z_W + K(z_U - z_W) \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} x_U + K(x_W - x_U) & y_U + K(y_W - y_U) & z_U + K(z_W - z_U) \end{bmatrix}^T,$$

$$K = \frac{r_i \sin(\varphi_{mp,i})}{2r_i \sin(\varphi_{mp,i}) + r_i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi_{mp,i}\right)},$$

где

На основании полученных соотношений сформируем матрицу однородных координат шарниров платформы

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 & \mathbf{B}_5 & \mathbf{B}_6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Подставив координаты соответствующих виртуальных точек  $U_i(x_{U_i}, y_{U_i}, z_{U_i})$ ,  $V_i(x_{V_i}, y_{V_i}, z_{V_i})$ ,  $W_i(x_{W_i}, y_{W_i}, z_{W_i})$ , получим уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} x - x_U & x_V - x_U & x_W - x_U \\ y - y_U & y_V - y_U & y_W - y_U \\ z - z_U & z_V - z_U & z_W - z_U \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Упростив выражение (7), получаем

$$(x - x_U)A - (y - y_U)B + (z - z_U)C = 0,$$

где

$$A = (y_V - y_U)(z_W - z_U) - (y_W - y_U)(z_V - z_U), \quad (8)$$

$$B = (x_V - x_U)(z_W - z_U) - (x_W - x_U)(z_V - z_U), \quad (9)$$

$$C = (x_V - x_U)(y_W - y_U) - (x_W - x_U)(y_V - y_U). \quad (10)$$

Уравнение (7) описано относительно девяти неизвестных, определяющих координаты виртуальных точек плоскости. Для нахождения значения неизвестных координат составим систему из девяти уравнений, описывающих евклидовы расстояния между шарнирами. Подставив однородные координаты шарниров подвижной платформы (6), получим следующую систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_U - x_V)^2 + (y_U - y_V)^2 + (z_U - z_V)^2 = \Delta_{UV}^2, \\ (x_U - x_W)^2 + (y_U - y_W)^2 + (z_U - z_W)^2 = \Delta_{UW}^2, \\ (x_V - x_W)^2 + (y_V - y_W)^2 + (z_V - z_W)^2 = \Delta_{VW}^2, \\ (\mathbf{D}_{1,1} - \mathbf{C}_{1,1})^2 + (\mathbf{D}_{2,1} - \mathbf{C}_{1,2})^2 + (\mathbf{D}_{3,1} - \mathbf{C}_{1,3})^2 = l_2^2, \\ (\mathbf{D}_{1,2} - \mathbf{C}_{2,1})^2 + (\mathbf{D}_{2,2} - \mathbf{C}_{2,2})^2 + (\mathbf{D}_{3,2} - \mathbf{C}_{2,3})^2 = l_2^2, \\ (\mathbf{D}_{1,3} - \mathbf{C}_{3,1})^2 + (\mathbf{D}_{2,3} - \mathbf{C}_{3,2})^2 + (\mathbf{D}_{3,3} - \mathbf{C}_{3,3})^2 = l_2^2, \\ (\mathbf{D}_{1,4} - \mathbf{C}_{4,1})^2 + (\mathbf{D}_{2,4} - \mathbf{C}_{4,2})^2 + (\mathbf{D}_{3,4} - \mathbf{C}_{4,3})^2 = l_2^2, \\ (\mathbf{D}_{1,5} - \mathbf{C}_{5,1})^2 + (\mathbf{D}_{2,5} - \mathbf{C}_{5,2})^2 + (\mathbf{D}_{3,5} - \mathbf{C}_{5,3})^2 = l_2^2, \\ (\mathbf{D}_{1,6} - \mathbf{C}_{6,1})^2 + (\mathbf{D}_{2,6} - \mathbf{C}_{6,2})^2 + (\mathbf{D}_{3,6} - \mathbf{C}_{6,3})^2 = l_2^2. \end{array} \right. \quad (11)$$

где:  $\Delta_{UV}, \Delta_{VW}, \Delta_{WU}$  – расстояние между виртуальными точками,  $l_2$  – длина кулисы, соединяющей точки  $C_i$  и  $B_i$ ,  $C_{i,j}$  – координаты точек  $C_i$ , описываемые соотношениями (4).

Для определения ориентации в пространстве подвижной платформы учтем следующее:

1. нормаль к искомой плоскости совпадает по направлению с ортом оси  $Oz$  подвижной системы координат;
2. искомая плоскость и плоскость подвижной платформы параллельны между собой и отстоят друг от друга на величину  $h_{mp}$ ;
3. орт оси  $Ox$  подвижной системы координат совпадает по направлению с вектором, проходящим через центр описанной вокруг треугольника  $UVW$  окружности и точку  $U$ ;
4. орт оси  $Oy$  достраивается так, чтобы орты образовывали правую тройку.

Вектор  $\sigma = \left( \frac{x_U + x_V + x_W}{3} \quad \frac{y_U + y_V + y_W}{3} \quad \frac{z_U + z_V + z_W}{3} \right)$  характеризует

координаты центра треугольника  $UVW$ . Нормаль  $\mathbf{n}$  определяют направляющие косинусы

$$\cos \alpha_{oz} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta_{oz} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma_{oz} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где  $A, B, C$  – коэффициенты канонического уравнения искомой плоскости, которые могут быть вычислены согласно (8)-(10).

Направляющие косинусы оси  $Ox$  равны



$$\begin{aligned}\cos \alpha_{ox} &= (x_U - \sigma_1) / \sqrt{(x_U - \sigma_1)^2 + (y_U - \sigma_2)^2 + (z_U - \sigma_3)^2}, \\ \cos \beta_{ox} &= (y_U - \sigma_2) / \sqrt{(x_U - \sigma_1)^2 + (y_U - \sigma_2)^2 + (z_U - \sigma_3)^2}, \\ \cos \gamma_{ox} &= (z_U - \sigma_3) / \sqrt{(x_U - \sigma_1)^2 + (y_U - \sigma_2)^2 + (z_U - \sigma_3)^2}.\end{aligned}$$

Значения направляющих косинусов оси  $Oy$  должны быть выбраны так, чтобы тройка векторов была правой

$$\begin{aligned}\cos \alpha_{oy} &= \cos \beta_{oz} \cos \gamma_{ox} - \cos \gamma_{oz} \cos \beta_{ox}, \\ \cos \beta_{oy} &= \cos \gamma_{oz} \cos \alpha_{ox} - \cos \alpha_{oz} \cos \gamma_{ox}, \\ \cos \gamma_{oy} &= \cos \alpha_{oz} \cos \beta_{ox} - \cos \beta_{oz} \cos \alpha_{ox}.\end{aligned}$$

С учетом параллельности искомой плоскости и подвижной платформы координаты ее (платформы) центра могут быть выражены как

$$o(x_o \quad y_o \quad z_o) = \left[ \frac{x_U + x_V + x_W}{3} \quad \frac{y_U + y_V + y_W}{3} \quad \frac{z_U + z_V + z_W}{3} \right]^T + h_{mp} \mathbf{n}.$$

Подставляя найденные компоненты искомая матрица однородного преобразования примет следующий вид

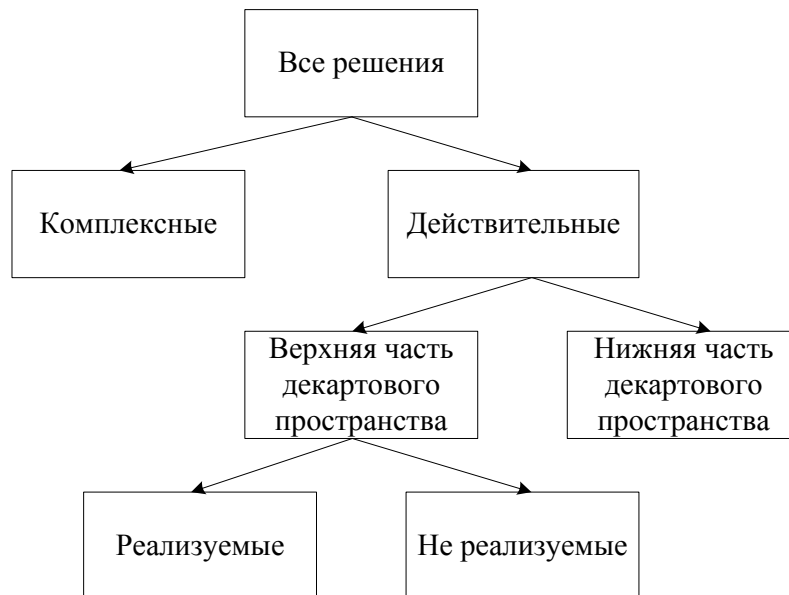
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ox} & \cos \alpha_{oy} & \cos \alpha_{oz} & x_o \\ \cos \beta_{ox} & \cos \beta_{oy} & \cos \beta_{oz} & y_o \\ \cos \gamma_{ox} & \cos \gamma_{oy} & \cos \gamma_{oz} & z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### Анализ решения прямой задачи о положении

Для решения полученной системы уравнений применялись численные методы, реализуемые в математических пакетах. Вычисления показали, что система (11) может иметь вплоть до 40 различных решений, что не противоречит результатам, описанным в работах [10, 11]. В результате исследования было установлено, что получаемые решения системы (11) качественно могут быть как действительными, так и комплексными. Количественное соотношение действительных и комплексных решений зависит от параметров системы и начальных условий. При моделировании наблюдалось наибольшее число действительных решений, равное 8. Решения, содержащие комплексные корни, не представляют интереса ввиду того, что не могут быть физически реализованы, и, в связи с этим, в данной работе не рассматривались. Анализ показал, что система (11) всегда имеет четное число действительных решений, причем они симметричны относительно плоскости  $XOY$ . Данное явление может быть объяснено тем, что набор обобщенных координат не обеспечивает однозначности определения положения выходного звена без учета условий связи, в качестве которых могут выступать взаимная ориентация осей координат, знаки линейных и угловых координат и т. п.

[12]. В нашем случае, решения, расположенные под плоскостью  $XOY$ , могут не рассматриваться на основании того, что физически не реализуемы. Однако стоит отметить, что не все из действительных решений, расположенных над плоскостью  $XOY$ , будут приемлемы ввиду того, что рассматриваемая модель не отражает ограничения, накладываемые конструктивными элементами платформы. К одному из таких ограничений можно отнести ограничение на допустимые углы поворота в кинематических парах.

Таким образом, множество получаемых решений прямой задачи о положении можно классифицировать следующим образом (рис. 5).



**Рисунок 5.** Структура получаемого решения (составлен авторами)

Для демонстрации полученных результатов выберем частное положение конструкции, при котором обобщенные координаты механизма равны одному и тому же значению. Очевидно, что в этом случае плоскость, в которой лежит выходное звено, должна располагаться параллельно плоскости основания. Зададим требуемые для системы (11) константы равными

$$R = 120, r = 120, l_1 = 70, l_2 = 170, h_b = 60, h_{mp} = 25, \varphi_b = \frac{\pi}{18}, \varphi_{mp} = \frac{\pi}{18},$$

$$\theta_i = \frac{\pi}{6}, i = \overline{1..6}.$$

В результате решения прямой задачи о положении для данных значений параметров было получено 16 решений, 8 из которых являются комплексными. Действительные корни системы (11) приведены в таблице 1.

**Таблица 1**

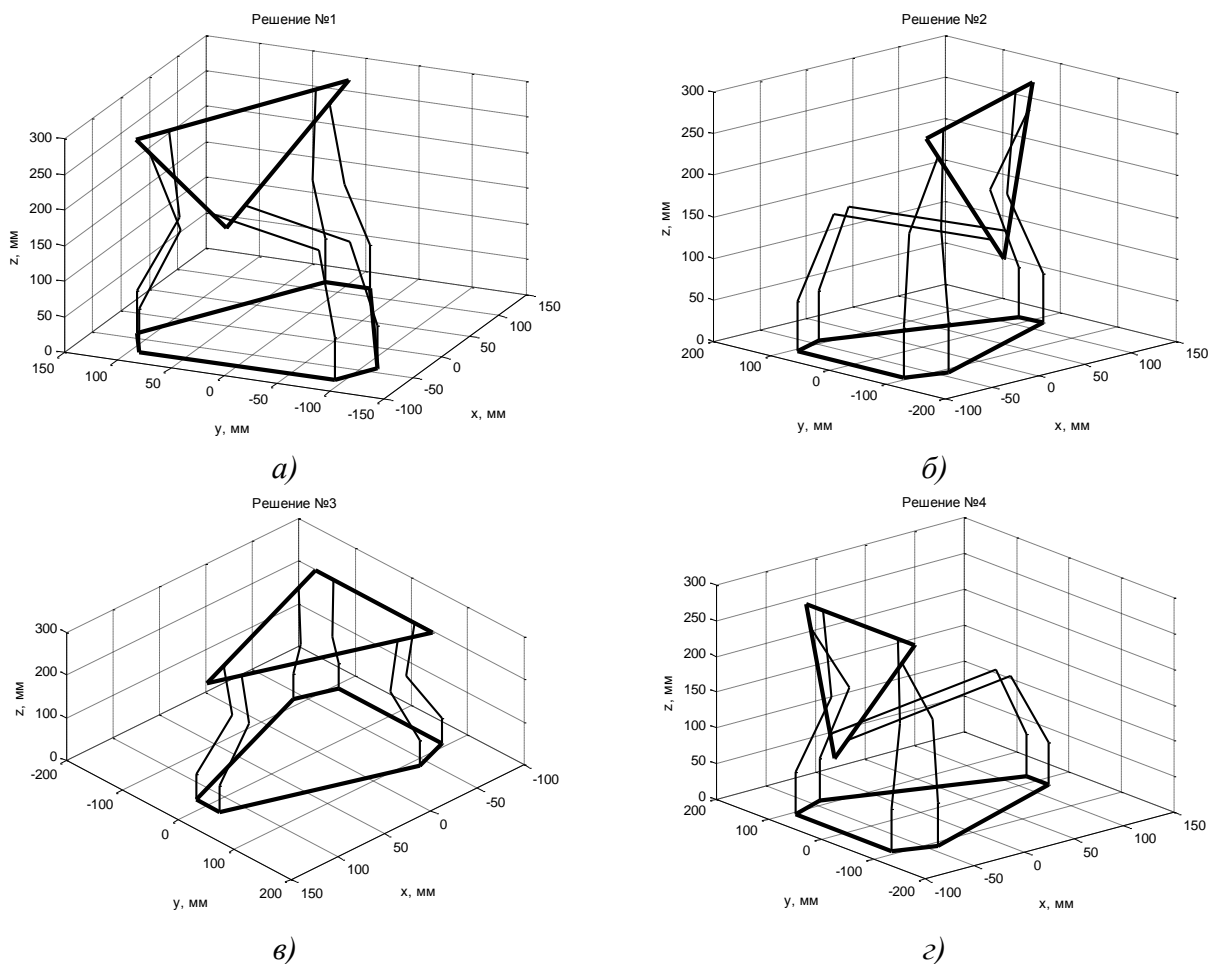
**Действительные решения прямой задачи о положении**

Корни системы	Координаты точки $U$	Координаты точки $V$	Координаты точки $W$
1	[120 0 286]	[-60 103,9 286]	[42,6 73,8 107,8]
2	[120 0 286]	[42,6 -73,8 107,8]	[-60 -103,9 286]
3	[120 0 286]	[-60 103,9 286]	[-60 -103,9 286]
4	[-85,2 0 107,8]	[-60 103,9 286]	[-60 -103,9 286]

Корни системы	Координаты точки $U$	Координаты точки $V$	Координаты точки $W$
5	[120 0 -286]	[-60 103,9 -286]	[42,6 73,8 -107,8]
6	[120 0 -286]	[42,6 -73,8 -107,8]	[-60 -103,9 -286]
7	[120 0 -286]	[-60 103,9 -286]	[-60 -103,9 -286]
8	[-85,2 0 -107,8]	[-60 103,9 -286]	[-60 -103,9 -286]

Составлена авторами

Положения манипулятора, соответствующие полученным решениям приведены на рис. 6. Априорно известно, что состояние манипулятора, изображенное на рис. 6в, является требуемым. Положения, приведенные на рис. 6а, 6б, 6г, удовлетворяют системе (11), но не проходят по конструктивным ограничениям.



**Рисунок 6.** Положения манипулятора, характеризующие полученные решения:

- а) решение №1 (составлен авторами);
- б) решение №2 (составлен авторами);
- в) решение №3 (составлен авторами);
- г) решение №4 (составлен авторами)

### Заключение

Анализ показал, что предлагаемый способ решения прямой задачи о положении может быть использован для рассматриваемого механизма параллельной структуры с вращательными приводами в кинематических цепях. Однако для гарантированного получения априорно

верного решения следует проводить дополнительные исследования, связанные с методикой выбора начального приближения. Устранение решений, не подходящих по конструктивным ограничениям, также возможно при расширении решаемой системы дополнительными уравнениями, накладывающими ограничения на движения в сочленениях, однако это приведет к росту вычислительной сложности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хейло С.В. Разработка научных основ создания манипуляционных механизмов параллельной структуры для робототехнических систем предприятий текстильной и легкой промышленности: Диссертация на соискание учёной степени доктора технических наук: 05.02.13 / Московский Государственный Университет Дизайна и Технологии., Москва, 2014, 292 с.
2. Хейло С.В., Глазунов В.А., Ширинкин М.А., Календарев А.В. Возможные применения механизмов параллельной структуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. №5. С. 19-24.
3. Глазунов В.А., Чунихин А.Д. Развитие исследований механизмов параллельной структуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. №3. С. 37-43.
4. Глазунов В.А., Левин С.В., Шалюхин К.А., Хаккыоглу М., Во Дин Тунг. Разработка механизмов параллельной структуры с четырьмя степенями свободы и частичной развязкой // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №5. С. 3-9.
5. Глазунов В.А., Ласточкин А.Б., Шалюхин К.А., Данилин П.О. К анализу и классификации устройств относительного манипулирования // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. №4. С. 81-85.
6. Хейло С.В., Глазунов В.А. Решение задачи об управлении поступательно-направляющим механизмом параллельной структуры // Справочник. Инженерный журнал. 2013. №10. С. 17-24.
7. Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. – М.: Наука, 1991. – 94 с.
8. Merlet J.P. Parallel Robots. Solid mechanics and its applications – Springer., 2006. 394 с.
9. Рыбак Л.А. Эффективные методы решения задач кинематики и динамики робота-станка параллельной структуры. [Электронный ресурс] / Л.А. Рыбак, В.В. Ержуков, А.В. Чичварин. М.: Физматлит, 2011. – 148 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/59592>.
10. P. Dietmaier The Stewart-Gough platform of general geometry can have 40 real postures // Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control. 1998. p. 1-10.
11. Raghavan M. The Stewart platform of general geometry has 40 configurations, ASME J. of Mech. Design, 1993, Vol. 115, pp. 277-282.
12. Кузнецов Ю.Н., Дмитриев Д.А., Диневич Г.Е. Компоновка станков с механизмами параллельной структуры / Под ред. Ю.Н. Кузнецова. – Херсон: ПП Вишемирський В.С., 2010. Гл. 5. с. 234 – 252.

**Lapikov Anton Leonidovich**

Bauman Moscow state technical university  
Kaluga branch, Russia, Kaluga  
E-mail: [anton.lapikov@inbox.ru](mailto:anton.lapikov@inbox.ru)

**Masyuk Vladimir Mihaylovich**

Bauman Moscow state technical university  
Kaluga branch, Russia, Kaluga  
E-mail: [masyuk77@mail.ru](mailto:masyuk77@mail.ru)

## **Analysis of solution for direct position problem of a parallel mechanism with rotary actuators in kinematic chains**

**Abstract.** The paper discusses spatial parallel mechanism with rotary kinematic pairs in each chain. This mechanism is applied as a separate section of a multisectional parallel mechanism. Structure analysis of the mechanism was carried out and showed that the mechanism possesses six degrees of freedom.

A method for solution of direct position problem is suggested which uses analytical equation of plane where the output element of the mechanism is located. The approach results in solution of nonlinear equation system, and the use of this method allowed to produce a system comprised of equations of the same type and reduce their quantity.

Solution of this nonlinear equation system is a reasonably complicated task because of high resource intensity for the use of numerical methods, besides that, the task becomes even more difficult because the solution obtained is not the only one. Classification of solutions was carried out, where it was mentioned that all obtained solutions can be divided into complex solutions and real solutions. For the mechanism under discussion the quantity of complex solutions comprises 8, and the quantity of real solutions – 8. The analysis showed that not all real solutions are physically realizable. It was discovered that physical nonrealizability has two main reasons: symmetry of obtained solution against XOY plane, the reason for this being the type of nonlinearity of initial equations, and the second reason is constructive impossibility to execute the solution which is valid from the mathematical viewpoint. Existence of mathematically correct, but physically unrealizable solutions was demonstrated. As a result, it was concluded that out of 8 real solutions only one is valid. Suggestions for elimination of invalid solutions were made.

**Keywords:** parallel mechanisms; direct position problem; kinematic chain; solution structure; valid solutions