Ляпин Александр Александрович;
Lyapin Alexander Alexandrovich;
Заведующий кафедрой информационных систем в строительстве;
Head of the department of information systems in construction;

Мещеряков Иван Алексеевич
Meshcheryakov Ivan Alexejevich
Аспирант/ postgraduate student
Ростовский Государственный Строительный Университет
Rostov State Univercity of Civil Engineering
05.23.17 Строительная механика
E-Mail: iam7@mail.ru

Об алгоритмах корректировки математической модели слоистой конструкции на основе экспериментальных данных

Of correction algorythms for the mathematical model of a multilayer structure based on experimental data

Аннотация: Анализ моделей многослойных сред с плоскопараллельной слоистостью используются при оценке долговечности и прочности дорожных конструкций, аэродромных покрытий. В статье приводится расчетная модель многослойного полупространства, построенная на основе аналитико-численного подхода. Численный анализ выявил, что характеристикой, чувствительной к варьированию модулей упругости верхних слоев конструкции, является так называемая «чаша максимальных динамических прогибов». Эта же характеристика может быть получена и в результате эксперимента, что обуславливает необходимость корректировки математической модели. Для решения этой задачи использован метод наименьших квадратов с регуляризацией по А.Н. Тихонову. Исследование выявило недостатки этого метода, и была обоснована необходимость использования взвешенный метод наименьших квадратов.

The Abstract: The analysis of multilayer structures with flat-parallel foliation is used to estimate durability of pavement structures and airfield surfacings. The article contains calculation model for a multilayer structure based upon a analythical and numerical analysis. The so-called “maximum dynamic deflection cup” is the most susceptible characteristic for modifying density moduli of the structure’s upper layers. This characteristic can be found by experimentation, thereby the algorythm for correcting of the mathematical model is needed. For this the version of least-squares method with Tikhonov regularization is used. The studies had revealed certain defects of the mentioned method and substantiated the preferability of using the weighted least-squares method.

Ключевые слова: Слоистые конструкции, корректировка математической модели, регуляризация, взвешенный метод наименьших квадратов

Keywords: Multilayer structures, correction of a mathematical model, regularization, weighted least-squares method

***

Многослойные среды с плоскопараллельной слоистостью используются при моделировании динамических процессов на поверхности Земли от источников техногенного или сейсмического характера. Дорожные конструкции, аэродромные покрытия имеют выраженное слоистое строение. Анализ долговечности, прочности таких конструкций связан с разработкой и анализом моделей полуограниченных слоистых сред. Исследование динамических процессов в многослойных конструкциях может быть эффективно осуществлено с использованием решений начально-краевых задач теории упругости и вязкоупругости слоисто-неоднородных сред.

Рассматриваемая в работе область D представляет собой N-слойное упругое полупространство:

$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_N$, описываемое в цилиндрической системе координат (R,θ,z) как (рисунок 1) :

$D_1 = \{R \in (0,+\infty), \theta \in (0,2\pi), z < 0\}$ - полупространство;

$D_j = \{R \in (0,+\infty), \theta \in (0,2\pi), z \in (z_{j-1}, z_j)\}, \quad z_j = \sum_{i=1}^{j} h_i; \quad (h_1 = 0)$ - j-й слой (j=2,...,N).

Упругие свойства сред в $D_j, \quad j = 0,1,\ldots,N$ определяются плотностью ρ_j, модулем упругости E_j и коэффициентом Пуассона ν_j.

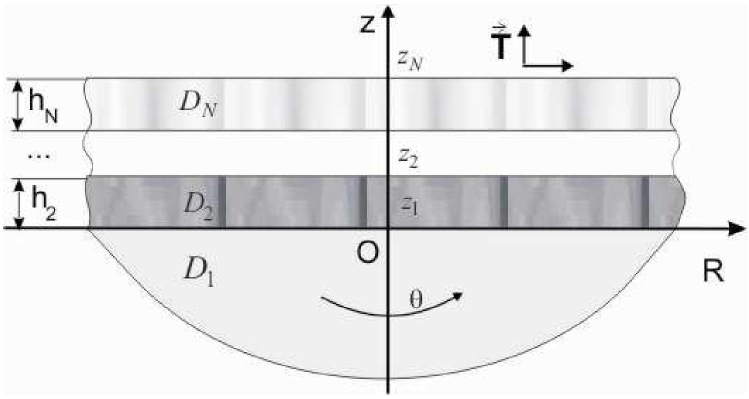

Рис. 1. *Область в цилиндрической системе координат*

Движение среды в общем случае при отсутствии объемных сил определяется решением системы уравнений в частных производных [4] :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(\mathbf{r},t) = \rho_j \ddot{\mathbf{u}}^{(j)}(\mathbf{r},t) \qquad (1)$$

$\mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{r},t)$ – перемещения в точке наблюдения $\mathbf{r} = \{R,\theta,z\}$ в момент времени t.

При рассмотрении поставленной задачи будем опираться на решения соответствующей краевой задачи для режима установившихся гармонических колебаний с частотой ω. В предположении этого все соотношения далее выписаны в амплитудных функциях, в которых временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен.

Деформацию среды примем осесимметричной: $\mathbf{u}^{(j)} = \{u_R^{(j)}(R,z), u_z^{(j)}(R,z)\}$.

На границе области считаем заданными вектор-функции напряжений:

$$\mathbf{t}^{(N)} = \{\sigma_z^{(N)}, \tau_{Rz}^{(N)}\}^T = \mathbf{T}(R), z = z_N, R \in \Omega \qquad (2)$$

Система (1) с использованием закона Гука для линейно-упругого материала, связывающего компоненты тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}^{(j)}$ с компонентами тензора малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}$:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(j)} = 2\mu_j \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} + \lambda_j \mathbf{E}\, tr\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}, \tag{3}$$

может быть сведена к эквивалентной системе уравнений Ламе относительно функций перемещений точек среды:

$$\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{r}) - \frac{\theta_{j1}^2}{\theta_{j2}^2}\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{r}) + \theta_{j1}^2\mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{r}) = 0, \tag{4}$$

$\theta_{j1}^2 = \omega^2 a^2 / V_{Pj}^2$, $\theta_{j2}^2 = \omega^2 a^2 / V_{Sj}^2$, – приведенные частоты колебаний, $V_{Pj} = \sqrt{(\lambda_j + 2\mu_j)/\rho_j}$, $V_{Sj} = \sqrt{\mu_j/\rho_j}$ – скорости распространения продольных и поперечных волн в j- й среде. При наличии диссипации в среде, определяющейся вязкостью материала, коэффициенты Ламе становятся комплексными, что в свою очередь приводит к комплекснозначности приведенных частот. В этом случае для модуля упругости вязкоупругих слоев можно принять следующее соотношение [5]:

$$E(\omega) = \frac{E_\infty}{1 + \dfrac{d}{(i\omega\tau)^{k_1}} + \dfrac{1}{(i\omega\tau)^{k2}}}.$$

E_∞ - длительный модуль упругости материала;

τ - температурно-зависимое время релаксации.

Так, например, для асфальтобетона можно принять: $E_\infty = 2.0e10$ Па, $d = 1.7$, k_1=0.2, k_2=0.5, τ=0.1 с при 15 ^{0}С.

Условия стыковки слоев между собой, а также полупространства с вышележащим слоем примем жесткими с требованием непрерывности векторов перемещений и напряжений при переходе через соответствующие границы раздела. Данные условия могут быть заменены на однородные условия скользящего контакта по одной или нескольким границам раздела.

На бесконечности потребуем выполнения условий излучения в форме принципа предельного поглощения [2].

Расчетная модель, для случая удара по поверхности конструкции вблизи осевой линии, ввиду малого времени измерения (колебания не успевают достигнуть боковых кромок конструкции) может быть построена на основе аналитико-численного подхода.

Решив уравнения движения среды для установившегося состояния с временным множителем $\exp(-i\omega t)$, функцию $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ получим в виде интеграла Фурье:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{U}(\mathbf{r},\omega)P(\omega)\exp(-i\omega t)d\omega \tag{5}$$

Здесь $p(t)$ определяет импульс внешнего воздействия, $P(\omega)$ - его преобразование Фурье.

Разложим функцию внешней нагрузки $p(t)$ по базису с наперед заданной степенью точности:

$$p^{(N)}(t) = \sum_{k=1}^{N} p_k \chi_k(t), \quad \left\| p(t) - p^{(N)}(t) \right\|_{L_2(G)} < \varepsilon \tag{6}$$

В качестве ортогональной системы базисных функций разложения выберем $\chi_k(t))$:

$$\chi_k(t) = \sin(\omega_k t + \eta_k), \quad \omega_k = k\pi/(T + t^*), \quad \eta_k = 0.5 \cdot k\pi \cdot T/(T + t^*).$$

T - предельное время наблюдения за конструкцией, t^* - время задержки [1].

Тогда для конечного набора стационарных решений $\mathbf{U}(\mathbf{r}, \omega_k)$ с использованием свойств преобразования Фурье легко показать выполнение:

$$\left\| \mathbf{u}^{(N)}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right\|_{L_2(G)} < Const \cdot \varepsilon \tag{7}$$

$$\mathbf{u}^{(N)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{N} p_k \left[-\cos\eta_k \operatorname{Im}\left(\mathbf{U}(\mathbf{r}, \omega_k) \exp(-i\omega_k t) \right) + \sin\eta_k \operatorname{Re}\left(\mathbf{U}(\mathbf{r}, \omega_k) \exp(-i\omega_k t) \right) \right]$$

для всех $\mathbf{r}$ из рассматриваемой области.

На основе численного анализа полученных соотношений выявлено, что характеристикой, чувствительной к варьированию модулей упругости верхних слоев конструкции, является изменение максимальной по времени амплитуды вертикального смещения $\max_{t\in[0;\infty)}|u(r;t)|$ при удалении по поверхности конструкции от точки удара – «чаша максимальных динамических прогибов» [3]. Эта характеристика может быть получена и на основе проведения натурных измерений в результате установки на поверхности покрытия группы датчиков на разном удалении от точки удара. Изложенное определяет необходимость разработки численного алгоритма решения обратной задачи с целью корректировки расчетной модели. Принято решение использовать метод наименьших квадратов, как метод, обладающий большей численной устойчивостью.

Решение обратной задачи с применением метода наименьших квадратов с регуляризацией по А.Н. Тихонову приводится к следующей системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{K} (U_T(E_j, R_k) - U_{эксп}(R_k))^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N} (E_i - E_{0i})^2 \to \min$$

Здесь U_T - расчетная чаша максимальных динамических прогибов (получаемая численно для заданных значений параметров), $U_{ЭКСП}$ - заданная форма чаши (в общем случае – полученная в результате обработки экспериментальных данных).

Недостатком такого подхода является возможность в различные моменты времени достижения временного максимума теоретической и экспериментальной характеристик. При этом данные моменты существенно зависят от рассчитываемых модулей упругости, определяющих распространение волн в среде. В результате проведенного анализа зависимостей предлагается использование взвешенного метода наименьших квадратов:

,

где коэффициенты α>0 монотонно уменьшаются с ростом величины в i точке наблюдения, причем:

$$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$$

На рисунке 2 приведены результаты расчетов на модели слоистого полупространства чаши максимальных динамических прогибов поверхности конструкции, При расчетах величина динамического воздействия на поверхность конструкции определялась треугольным импульсом длительности 0.003 с и максимальным значением 2 МПа.

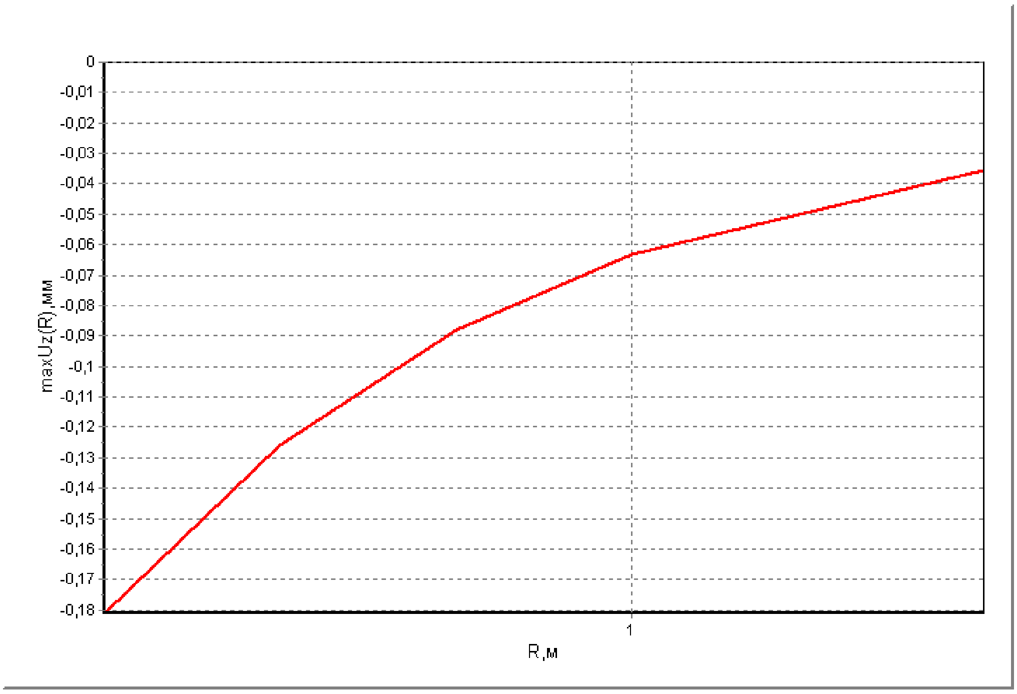

Рис. 2. *Расчетная чаша максимальных динамических прогибов при изменении*

$$0.25 \le R \le 1.5$$

Проектные параметры конструкции (при полном совпадении физических характеристик смежных слоев данные слои объединялись в один) приведены в таблице:

Таблица.

Параметры дорожной одежды

№ слоя	Название	h (м)	Модуль упругости (мПа)	Коэффициент Пуассона	Плотность (кг/м^3)
0	Суглинок легкий		46	0,35	2000
1	Песок средней крупности	0,1	120	0,3	1500
2	Щебень фракционированный	0,2	450	0,3	1600
3	Асфальтобетон крупнозернистый	0,14	2000	0,35	2300
4	Асфальтобетон мелкозернистый	0,09	3200	0,35	2400

В результате корректировки параметров модели по получаемым экспериментальным данным $U_{ЭКСП}$ наиболее чувствительными оказывались параметры верхних слоев асфальтобетона и грунтового основания конструкции, диапазон изменения модулей упругости которых составлял 30-50 % от проектных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боев С.И., Селезнев М.Г. Об одном подходе в нестационарных задачах теории упругости // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. Науки. -1989. -№ 2. –С.76–81.

2. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1989. –320 с.

3. Илиополов С.К., Селезнев М.Г., Углова Е.В. Динамика дорожных конструкций. – Ростов-на-Дону: Рост. Гос. Строит. Ун-т, 2002. – 258 с.

4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. –872 с.

5. H. Beckedahl, H. Hürtgen, E. Straube Begleitende Forschung zur Einführung des Falling Weigt Deflectometer (FWD) in der Bundesrepublik Deutschland // Forschung Straβenbau und Straβenverkehrstechnik, 1996. № 733.