Осокин Илья Александрович
OsokinIlyaAlexandrovich
ассистент кафедры «Мосты и транспортные тоннели»
Уральского государственного университета путей сообщения
assistant of "Bridges and transport tunnels" Ural State University of Railway Transport
Ассистент/assistant
E-Mail: ilyanashivfinale@mail.ru

05.23.11, Проектирование и строительство дорог,
метрополитенов, аэродромов, мостов и транспортных тоннелей

Применение теории оболочек вращения к расчету гофрированных водопропускных труб

Application of the theory of shells of revolution to the calculation of corrugated culverts

Аннотация: В статье приведен обзор методов, применяемых в настоящее время для расчета гофрированных водопропускных труб. Предложен метод расчета водопропускных труб, выполненных из гофрированных листов, основанный на теории гладких цилиндрических оболочек с адаптацией для расчета гофрированных цилиндрических оболочек.

The Abstract: The article provides an overview of the methods currently used to calculate the corrugated culverts. The method of calculation of culverts made of corrugated sheets, based on the theory of smooth cylindrical shells with adaptation for the calculation of corrugated cylindrical shells.

Ключевые слова: Водопропускная труба, расчет, гофрированный лист, оболочка вращения, гофрированная оболочка.

Keywords: Culvert, calculation, corrugated sheet, the shell of revolution, corrugated shell.

***

Введение

Водопропускные трубы являются весьма широко применяемыми конструкциями для обеспечения водоотвода на автомобильных и железных дорогах. Для их изготовления применяются различные материалы. Наиболее широко применяемым материалом для водопропускных труб является железобетон. Однако, ввиду того, что железобетонные водопропускные трубы в процессе эксплуатации подвергаются совместному воздействию и нагрузок (силовых воздействий), и агрессивных сред (средовых воздействий), а проблеме мониторинга и эффективной эксплуатации железобетонных конструкций на автомобильных дорогах России традиционно уделяется недостаточное внимание [1], то в конструкциях железобетонных труб появляются дефекты и повреждения и силового и коррозионного характера, приводящие к предаварийным и аварийным ситуациям. Как следствие нарушается целостность вышележащей земляной насыпи, разрушается дорожное полотно и в результате нарушается регулярное движение автотранспорта по автомобильной дороге.

Проблеме проектирования и расчета водопропускных труб с учетом реальных условий эксплуатации в последнее время начинает уделяться повышенное внимание. Отметим публикации, посвященные этой проблеме [2 - 5].

Из-за значительного сокращения долговечности железобетонных водопропускных труб в агрессивных условиях эксплуатации возникает вопрос о путях повышения долговечности таких конструкций.

Наиболее эффективными способами увеличения долговечности водопропускных труб является использование фибробетона для изготовления труб [6], а также применение гофрированного металла при изготовлении водопропускных труб.

В последние годы большую популярность среди строителей набрали водопропускные трубы и другие искусственные сооружения, выполненные из гофрированного металла. К неоспоримым преимуществам данных сооружений относятся: относительно небольшой вес элементов конструкции, относительная простота сборки, меньшие, по сравнению с железобетонными конструкциями, сроки возведения, привлекательный внешний вид. Помимо использования гофрированных водопропускных труб вместо традиционных железобетонных, сооружения из гофрированных листов открывают новые возможности перед проектировщиками и строителями. Используя сооружения из гофрированного металла, есть возможность перекрывать пролеты длиной до 30 м, возводить сооружения для пропуска автомобильных и железных дорог в разных уровнях (путепроводы), сооружения для защиты дорог от камнепадов и другие конструкции [7]. При этом цена строительства сооружений из гофрированного металла значительно ниже цены малых и средних мостовых сооружений, имеющих аналогичную область применения [8].

Несмотря на все преимущества сооружений из гофрированного металла, на пути их применения в России стоит существенная проблема – несовершенство нормативной базы РФ, регламентирующей проектирование и строительство сооружений данного типа. Подтверждают данное утверждение также результаты натурных обследований, представленные в [9]. При этом, согласно расчетам, выполненным по ОДМ 218.2.001-2009 «Рекомендации по проектированию и строительству водопропускных сооружений из металлических гофрированных структур на автомобильных дорогах общего пользования с учетом региональных условий (дорожно-климатических зон)» [10], повреждений трубы силового характера (прогибы, овализация тела трубы и т.д.) не должно было быть. Помимо расчетной методики, приведенной в ОДМ 218.2.001-2009, для проектирования металлических гофрированных сооружений данным нормативным документом допускается (а в некоторых случаях рекомендуется) применение моделирования конструкций с помощью метода конечных элементов.

Метод конечных элементов на настоящий момент успешно применяется в зарубежной практике проектирования металлических гофрированных конструкций и в нашей стране при проектировании технически сложных объектов с пролетами более 5,0 м, имеющих сложный гидравлический режим, высокую сейсмичность площадки строительства, а также иные сложные условия эксплуатации. Однако метод конечных элементов также не лишен недостатков, основными из которых применительно к моделированию конструкций данного типа являются: сложность моделирования в программе работы грунтового массива, сложность моделирования гофрированного листа формы, достаточно близкой к оригинальной, сложность моделирования взаимодействия гофрированной оболочки трубы с грунтовым массивом, сложность моделирования работы сооружения в условиях поражения конструкции агрессивными средами.

Для решения задач по расчету круглых металлических гофрированных конструкций (МГК), предлагается использовать уравнения оболочек вращения общего вида. Однако, в связи с математическими сложностями, связанными с применением теории расчета оболочек вращения общего вида для расчета гофрированных оболочек (появление двух и более точек на поверхности гофрированной оболочки, соответствующих одним полярным координатам), предлагается применить теорию расчета круглой цилиндрической оболочки с некоторыми дополнениями.

В качестве базовых уравнений предлагается использовать уравнения равновесия и геометрические соотношения для расчета круглых цилиндрических оболочек. Данные уравнения представлены, например, в [11].

1. Основные уравнения

1.1. Система координат

В цилиндрической оболочке

$$\frac{1}{R_1}=0,\frac{1}{R_2}=\frac{1}{r}. \tag{1}$$

где R_1и R_2– главные радиусы кривизны оболочки;

r – радиус цилиндрической оболочке по срединной поверхности.

Для удобства расчета цилиндрической оболочки от декартовой системы координат с осями x, y, z, где z – координата, нормальная к срединной поверхности оболочки, а x и y – линии главных кривизн, перейдем к безразмернымξ и φ:

$$\xi=\frac{x}{r},\varphi=\frac{y}{r}, \tag{2}$$

при этом:

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2=(rd\xi)^2+(rd\varphi)^2;A_1=r;A_2=r. \tag{3}$$

где A_1 и A_2 – метрические коэффициенты Ламе;

Для получения уравнений равновесия цилиндрической оболочки воспользуемся системой дифференциальных уравнений равновесия оболочки общего вида:

1.2 Уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(N_1A_2)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(S_2A_1)}{\partial\alpha_2}+S_1\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}-N_2\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right]+\frac{Q_1}{R_1}+q_1=0; \tag{4}$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(Q_1A_2)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(Q_2A_1)}{\partial\alpha_2}\right]-\frac{N_1}{R_1}-\frac{N_2}{R_2}+q_n=0; \tag{5}$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(M_2A_1)}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial(H_1A_2)}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}-M_1\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right]-Q_2=0 \tag{6}$$

Где N_1, N_2, Q_1, Q_2, S_1, S_2 – продольные, поперечные и сдвигающие силы;

M_1, M_2, H_1, H_2 – изгибающие и крутящие моменты;

q_1 и q_n – внешняя раномерно-распределенная нагрузка.

Исходя из уравнений (4) – (6) и имея в виду выражения для A_1 и A_2 согласно (3) получим:

$$\frac{\partial N_1}{\partial\xi}+\frac{\partial S_2}{\partial\varphi}+rq_1=0;\frac{\partial S_1}{\partial\xi}+\frac{\partial N_2}{\partial\varphi}+Q_2+rq_2=0;$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial\xi}+\frac{\partial Q_2}{\partial\varphi}-N_2+rq_n=0;\ \frac{\partial H_1}{\partial\xi}+\frac{\partial M_2}{\partial\varphi}-Q_2r=0;$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial\xi}+\frac{\partial H_2}{\partial\varphi}-Q_1r=0;S_1-S_2-\frac{H_2}{r}=0. \tag{7}$$

Для получения интересующих нас геометрических соотношений цилиндрической оболочки, обратимся к формулам параметров деформации срединной поверхности оболочки общего вида (8), приведенным в книге [11].

1.3 Геометрические соотношения

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_2 + \frac{w}{R_1};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_1 + \frac{w}{R_2};$$

$$\omega = \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right) + \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right);$$

$$x_1 = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{R_1}\right) - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{u_2}{R_2}\right);$$

$$x_2 = -\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{u_2}{R_2}\right) - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{R_1}\right);$$

$$\tau = -\frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2}\right) + \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_1\right) + \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_2\right) \quad (8)$$

Гдеε_1, ε_2– осевые деформации точки срединной поверхности оболочки;

ω– сдвиг в точке срединной поверхности оболочки, возникающий в результате деформации;

x_1, x_2– величины, характеризующие изменения кривизн срединной поверхности оболочки;

τ – величина, характеризующая кручение срединной поверхности оболочки;

u_1, u_2 и w – компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки.

Геометрические соотношения (8) при учете (1) и (3) приобретают вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \xi}; \varepsilon_2 = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + w\right); \omega = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \varphi}\right);$$

$$x_1 = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}; \quad x_2 = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi}\right); \tau = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \varphi} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi}\right) \quad (9)$$

1.4 Замечания о физических уравнениях

Соотношения упругости (физические уравнения) сохраняют свой общий вид (10), (11), при котором шестое уравнение равновесия (7) удовлетворяется автоматически, в связи с чем в дальнейшем рассматривать его не будем.

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2); M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}(x_1 + \mu x_2); \quad (10)$$

$$S = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\omega; H = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\tau \quad (11)$$

Где E и μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона для данного материала.

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

1.5 Граничные условия

Статические граничные условия на торцах $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_L$замкнутой цилиндрической оболочки имеют вид:

$$N_1|_{\xi=\xi_0} = N_1^{\{0\}}, \left[Q_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial H_1}{\partial\varphi}\right]_{\xi=\xi_0} = \left[Q_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial H_1}{\partial\varphi}\right]^{\{0\}},$$

$$\left[S_1 + \frac{H_1}{r}\right]_{\xi=\xi_0} = \left[S_1 + \frac{H_1}{r}\right]^{\{0\}}, M_1|_{\xi=\xi_0} = M_1^{\{0\}};$$

$$N_1|_{\xi=\xi_L} = N_1^{\{L\}}, \left[Q_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial H_1}{\partial\varphi}\right]_{\xi=\xi_L} = \left[Q_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial H_1}{\partial\varphi}\right]^{\{L\}},$$

$$\left[S_1 + \frac{H_1}{r}\right]_{\xi=\xi_L} = \left[S_1 + \frac{H_1}{r}\right]^{\{L\}}, M_1|_{\xi=\xi_L} = M_1^{\{L\}}. \qquad (12)$$

Вместо граничных условий (12) или части из них могут быть заданы кинематические условия – условия для функций u_1, u_2, wи ϑ_1, при этом нельзя задавать одновременно энергетически связанные усилия (момент) и перемещения (поворот).

1.6 Разрешающие уравнения в перемещениях

Будем следовать классической схеме получения разрешающих уравнений в перемещениях, а именно, выразим условия равновесия через параметры деформации, пользуясь физическими уравнениями, в результате чего получим уравнения равновесия в деформациях, справедливые для оболочки, материал которой подчиняется закону Гука.

Далее, используя геометрические соотношения (9), представим эти уравнения через перемещения. Сам факт использования уравнений (9) гарантирует совместимость деформаций, вследствие чего полученные уравнения в перемещениях выражают равновесие оболочки, материал которой подчиняется закону Гука и в которой соблюдается совместимость деформаций.

Предварительно упростим исходные уравнения равновесия – исключим из них Q_1и Q_2. Для этого найдем Q_2 из четвертого, Q_1 – из пятого уравнений системы (7) и подставим соответствующие выражения во второе и третье уравнения той же системы. Произведя эти операции и учитывая сказанное выше о шестом уравнении равновесия, получим систему уравнений равновесия в следующем виде[11]:

$$\frac{\partial N_1}{\partial\xi} + \frac{\partial S_2}{\partial\varphi} + rq_1 = 0; \frac{\partial S_1}{\partial\xi} + \frac{\partial N_2}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial H_1}{\partial\xi} + \frac{\partial M_2}{\partial\varphi}\right) + rq_2 = 0;$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial M_1}{\partial\xi} + \frac{\partial H_2}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial H_1}{\partial\xi} + \frac{\partial M_2}{\partial\varphi}\right) - N_2 + rq_n = 0. \qquad (13)$$

Для адаптации данного вида уравнений, к решению задач расчета цилиндрических гофрированных оболочек, введем следующие предположения:

1) в продольном направлении оболочку примем условно-гладкой. При этом кривизна образующей не учитывается, следовательно, радиус в продольном направлении равен бесконечности (R1=∞, 1/ R1=0)

2) в поперечном направлении вместо величины r (радиус от центра окружности цилиндрической оболочки до ее срединной поверхности) вводится функцияr (x). Причем вид функции может быть различным и будет зависеть от формы образующей рассматриваемой оболочки.

2. Преобразуем приведенные выше уравнения (1-13) с учетом представленных предположений

2.1 Безразмерные координаты ξ и φ примут вид:

$$\xi = \frac{x}{\mathrm{r}\,(\mathrm{x})}, \varphi = \frac{y}{\mathrm{r}\,(\mathrm{x})}, \tag{14}$$

2.2 Уравнения равновесия примут вид:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} + \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} + \mathrm{r}\,(\mathrm{x}) \cdot q_1 = 0; \frac{\partial S_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + Q_2 + \mathrm{r}\,(\mathrm{x}) \cdot q_2 = 0;$$
$$\frac{\partial Q_1}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} - N_2 + \mathrm{r}\,(\mathrm{x}) \cdot q_n = 0; \frac{\partial H_1}{\partial \xi} + \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} - Q_2 \cdot \mathrm{r}\,(\mathrm{x}) = 0;$$
$$\frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial H_2}{\partial \varphi} - Q_1 \cdot \mathrm{r}\,(\mathrm{x}) = 0; S_1 - S_2 - \frac{H_2}{\mathrm{r}\,(\mathrm{x})} = 0. \tag{15}$$

2.3 Геометрические соотношений примут вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\mathrm{r}\,(\mathrm{x})}\frac{\partial u_1}{\partial \xi}; \varepsilon_2 = \frac{1}{\mathrm{r}\,(\mathrm{x})}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + w\right); \omega = \frac{1}{\mathrm{r}\,(\mathrm{x})}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \varphi}\right);$$
$$x_1 = -\frac{1}{\mathrm{r}(\mathrm{x})^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}; \; x_2 = -\frac{1}{\mathrm{r}\,(\mathrm{x})^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi}\right);$$
$$\tau = -\frac{1}{\mathrm{r}\,(\mathrm{x})^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \varphi} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi}\right) \tag{16}$$

2.4 Уравнения равновесия после исключения из них членов Q_1и Q_2 примут вид:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} + \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} + q_1 \cdot \mathrm{r}(\mathrm{x}) = 0;$$
$$\frac{\partial S_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{\mathrm{r}\,(\mathrm{x})}\left(\frac{\partial H_1}{\partial \xi} + \frac{\partial M_2}{\partial \varphi}\right) + q_2 \cdot \mathrm{r}(\mathrm{x}) = 0;$$
$$\frac{1}{\mathrm{r}\,(\mathrm{x})}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial H_2}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{\mathrm{r}\,(\mathrm{x})}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial H_1}{\partial \xi} + \frac{\partial M_2}{\partial \varphi}\right) - N_2 + q_n \cdot \mathrm{r}\,(\mathrm{x}) = 0 \tag{17}$$

Рассмотрим дальнейший вывод разрешающих уравнений, представленный в [11] для гладких цилиндрических оболочек с учетом предлагаемых дополнений для гофрированных цилиндрических оболочек.

Выразим силыN_1, N_2, S_1, S_2и моменты H_1, H_2, M_1, M_2через перемещения, пользуясь физическими уравнениями (10) и (11) и геометрическими соотношениями (9):

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) = \frac{Eh}{(1-\mu^2)\mathrm{r}\,(\mathrm{x})}\left[\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \mu(\frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + w)\right];$$
$$N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1) = \frac{Eh}{(1-\mu^2)\mathrm{r}\,(\mathrm{x})}\left[\frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + w + \mu\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right];$$
$$S_1 = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\omega + \frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\frac{\tau}{\mathrm{f}\,(\mathrm{x})} = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\frac{1}{\mathrm{r}\,(\mathrm{x})}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \varphi}\right) - \frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\frac{1}{(\mathrm{r}\,(\mathrm{x}))^3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - u_2\right)\right];$$
$$S_2 = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\omega = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\frac{1}{\mathrm{r}\,(\mathrm{x})}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \varphi}\right);$$

$$H_1 = H_2 = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\tau = -\frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\frac{1}{(\mathrm{r\,(x)})^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi} - u_2\right);$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}(x_1 + \mu x_2) = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\frac{1}{(\mathrm{r(x)})^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} - -\mu\frac{\partial u_2}{\partial\varphi}\right);$$

$$M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}(x_2 + \mu x_1) = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\frac{1}{(\mathrm{r(x)})^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial u_2}{\partial\varphi} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right). \tag{18}$$

Подставляя (14) в (13), получим:

$$\frac{Eh}{1-\mu^2}\frac{1}{\mathrm{r\,(x)}}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial\xi\partial\varphi} + \mu\frac{\partial w}{\partial\xi}\right) + \frac{Eh}{2(1+\mu)}\frac{1}{\mathrm{r\,(x)}}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial\xi\partial\varphi} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2}\right) + \mathrm{r(x)} \cdot q_1 = 0;$$

$$\frac{Eh}{2(1+\mu)}\frac{1}{\mathrm{r\,(x)}}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial\xi^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi\partial\varphi}\right) - \frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\frac{1}{(\mathrm{r(x)})^3}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial\xi^3\partial\varphi} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial\xi^2}\right) + \frac{Eh}{1-\mu^2}\frac{1}{\mathrm{r\,(x)}}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial\varphi} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\mathrm{r\,(x)}}\left[-\frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\frac{1}{(\mathrm{r(x)})^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial\xi^2\partial\varphi} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial\xi^2}\right) - \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\frac{1}{(\mathrm{r(x)})^3}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial\varphi^3} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial\varphi^2} + \mu\frac{\partial^3 w}{\partial\xi^2\partial\varphi}\right)\right] + \mathrm{r\,(x)} \cdot q_2 = 0;$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\frac{1}{(\mathrm{r\,(x)})^3}\left[\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4} - (2-\mu)\frac{\partial^3 u_2}{\partial\xi^2\partial\varphi} - \frac{\partial^3 u_2}{\partial\varphi^3}\right] + \frac{Eh}{1-\mu^2}\frac{1}{\mathrm{r\,(x)}}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\varphi} + w + \mu\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\right) - \mathrm{r\,(x)} \cdot q_n = 0. \tag{19}$$

или, объединяя в каждом из уравнений члены по признаку операций отдельно над каждой из составляющих перемещений u_1, u_2и w, получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)u_1 + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\varphi}u_2 + \mu\frac{\partial}{\partial\xi}w + \frac{(\mathrm{r\,(x)})^2(1-\mu^2)}{Eh}q_1 = 0;$$

$$\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\varphi}u_1 + \left(\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1-\mu}{12}\frac{h^2}{(\mathrm{r\,(x)})^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{h^2(1-\mu)}{12(\mathrm{r(x)})^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{h^2}{12(\mathrm{r(x)})^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)u_2 + \left(-\frac{1-\mu}{12}\frac{h^2}{(\mathrm{r\,(x)})^2}\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1-\mu}{12}\frac{h^2}{(\mathrm{r\,(x)})^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2\partial\varphi} - \frac{h^3}{12(\mathrm{r\,(x)})^2}\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3} - \frac{h^2}{12(\mathrm{r\,(x)})^2}\mu\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\varphi}\right)w + \frac{(\mathrm{r\,(x)})^2(1-\mu^2)}{Eh}q_2 = 0;$$

$$\left(\frac{h^2}{12(\mathrm{r\,(x)})^2}\mu\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\varphi} + \frac{h^2(1-\mu)}{12(\mathrm{r\,(x)})^2}\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\varphi} + \frac{h^2(1-\mu)}{12(\mathrm{r\,(x)})^2}\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\varphi} + \frac{h^2}{12(\mathrm{r\,(x)})^2}\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)u_2 + \left(-\frac{h^2}{12(\mathrm{r\,(x)})^2}\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} - \frac{h^2}{12(\mathrm{r\,(x)})^2}\mu\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\varphi^2} - \frac{h^2(1-\mu)}{12(\mathrm{r\,(x)})^2}\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\varphi^2} - \frac{h^2}{12(\mathrm{r\,(x)})^2}\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} - \frac{h^2}{12(\mathrm{r\,(x)})^2}\mu\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\varphi^2} - 1\right)w + \frac{(\mathrm{r\,(x)})^2(1-\mu^2)}{Eh}q_n - \mu\frac{\partial}{\partial\xi}u_1 = 0 \tag{20}$$

Приведя подобные члены внутри каждой из скобок и введя обозначения для соответствующих операторов, получим:

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}; L_{12} = \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\varphi}; L_{13} = \mu\frac{\partial}{\partial\xi};$$

$$L_{21} = L_{12}; L_{22} = \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + a^2\left[2(1-\mu)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right];$$

$$L_{23} = \frac{\partial}{\partial\varphi} - a^2\left[(2-\mu)\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\varphi} + \frac{\partial^3}{\partial\varphi^3}\right];$$

$$L_{31} = L_{13}; L_{32} = L_{23}; L_{33} = 1 + a^2\nabla^2\nabla^2, \tag{21}$$

где$a = \frac{h^2}{12(\mathrm{r\,(x)})^2}$, (22) Введем также следующие обозначения:

$$f_1 = -\left(\mathrm{r(x)}\right)^2 \frac{1-\mu^2}{Eh} q_1, f_2 = -\left(\mathrm{r(x)}\right)^2 \frac{1-\mu^2}{Eh} q_2,$$

$$f_3 = -(\mathrm{r\ (x)})^2 \tfrac{1-\mu^2}{Eh} q_n, \qquad (23)$$

Получим решающую систему уравнений для гофрированной цилиндрической оболочки в перемещениях:

$$L_{11}u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}w = f_{1,}$$

$$L_{21}u_1 + L_{22}u_2 + L_{23}w = f_{2,}$$

$$L_{31}u_1 + L_{32}u_2 + L_{33}w = f_{3.} \qquad (24)$$

Операторная матрица системы уравнений (24) симметрична. Принимая операторы в линейных дифференциальных уравнениях (24) в качестве коэффициентов, эти уравнения можно решить на определенном этапе расчета формально как линейные алгебраические уравнения. В матричной форме (24) записывается так:

$$\begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Vmatrix}, \boldsymbol{Lu} = \boldsymbol{f}. \qquad (25)$$

Вид матрицы $\boldsymbol{L}$ и столбцов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{f}$ очевиден из сопоставления двух вариантов записи матричного уравнения в (25). Общее решение системы уравнений (24) или, что то же самое, уравнения (25) складывается из какого-либо частного решения этой системы и из общего решения соответствующей однородной системы уравнений:

$$u_1 = u_1^{(1)} + u_1^{(0)}; u_2 = u_2^{(1)} + u_2^{(0)}; w = w^{(1)} + w^{(0)}. \qquad (26)$$

Верхний индекс (1) относится к частному решению неоднородной системы, а индекс (0) – к общему решению однородной системы. Частное решение найдем в форме

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{L^{-1}f}; \boldsymbol{u} = \frac{\begin{Vmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ L_{12} & L_{22} & L_{32} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{Vmatrix}}{\det(\boldsymbol{L})} \boldsymbol{f}; \qquad (27)$$

здесь L_{ij}–миноры определителя $\det(\boldsymbol{L})$, а матрица этих миноров – *союзная матрица*.

Обратим внимание на различие операторов L_{ij}и L_{ji}. Вследствие симметрии матрицы $\boldsymbol{L}$симметрична и союзная матрица, следовательно $L_{ij} = L_{ji}$. В развернутом виде частное решение неоднородной системы выглядит так:

$$u_1^{(1)} = L_{11}\Phi_1 + L_{21}\Phi_2 + L_{31}\Phi_3;$$

$$u_1^{(1)} = L_{12}\Phi_1 + L_{22}\Phi_2 + L_{32}\Phi_3;$$

$$w^{(1)} = L_{13}\Phi_1 + L_{23}\Phi_2 + L_{33}\Phi_3; \qquad (28)$$

где: $\frac{f_i}{\det(\boldsymbol{L})} = \Phi_i \quad (i = 1, 2, 3)$ (29)

Миноры L_{ij} определяются по следующим формулам:

$$L_{11} = L_{22}L_{33} - L_{32}L_{23};\, L_{21} = -(L_{12}L_{33} - L_{13}L_{32});$$
$$L_{12} = -(L_{21}L_{33} - L_{23}L_{31});\, L_{22} = L_{11}L_{33} - L_{31}L_{13};$$
$$L_{13} = L_{21}L_{32} - L_{22}L_{31};\, L_{23} = -(L_{11}L_{32} - L_{12}L_{31});$$
$$L_{31} = L_{12}L_{23} - L_{13}L_{22};$$
$$L_{32} = -(L_{11}L_{23} - L_{13}L_{21});$$
$$L_{33} = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}, \tag{30}$$

или, учитывая (25), в развернутом виде получим:

$$L_{11} = (1-\mu)a^2\left(\frac{1}{2}+2a^2\right)\frac{\partial^6}{\partial\xi^6} + a^2[(2-\mu)+a^2(1-\mu^2)]\frac{\partial^6}{\partial\xi^4\partial\varphi^2} + a^2\left[\frac{1+\mu}{2} - a^2(2-\mu)\right]\frac{\partial^6}{\partial\xi^2\partial\varphi^4} + a^4\frac{\partial^6}{\partial\varphi^6} + 2a^2(2-\mu)\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\varphi^2} + 2a^2\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} + (1-\mu)\left(\frac{1}{2}+2a^2\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + a^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2};$$

$$L_{12} = \frac{1+\mu}{2}a^2\frac{\partial^6}{\partial\xi^5\partial\varphi} - (1+\mu)a^2\frac{\partial^6}{\partial\xi^3\partial\varphi^3} - \frac{1+\mu}{2}a^2\frac{\partial^6}{\partial\xi\partial\varphi^5} - a^2\mu(2-\mu)\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\partial\varphi} - a^2\mu\frac{\partial^4}{\partial\xi\partial\varphi^3} - \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\varphi};$$

$$L_{13} = -\frac{1+\mu}{2}a^2(2-\mu)\frac{\partial^5}{\partial\xi^3\partial\varphi^2} - \frac{1+\mu}{2}a^2\frac{\partial^5}{\partial\xi\partial\varphi^4} - (1-\mu)\mu\left(\frac{1}{2}+2a^2\right)\frac{\partial^3}{\partial\xi^3} + \left(\frac{1-\mu}{2} - \mu a^2\right)\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\varphi^2};$$

$$L_{22} = a^2\frac{\partial^6}{\partial\xi^6} + \frac{a^2}{2}(5-\mu)\frac{\partial^6}{\partial\xi^4\partial\varphi^2} + a^2(2-\mu)\frac{\partial^6}{\partial\xi^2\partial\varphi^4} + a^2\frac{(1-\mu)}{2}\frac{\partial^6}{\partial\varphi^6} + (1-\mu^2)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2};$$

$$L_{23} = a^2(2-\mu)\frac{\partial^5}{\partial\xi^4\partial\varphi} + \frac{a^2}{2}(4-3\mu+\mu^2)\frac{\partial^5}{\partial\xi^2\partial\varphi^3} + \frac{1-\mu}{2}a^2\frac{\partial^5}{\partial\varphi^5} - \frac{1}{2}(2-\mu-\mu^2)\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\varphi} - \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3};$$

$$L_{33} = (1-\mu)\left(\frac{1}{2}+2a^2\right)\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + [(1-\mu)+a^2(2-2\mu+\mu^2)]\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\varphi^2} + \frac{1-\mu}{2}(1+a^2)\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}. \tag{31}$$

Обозначим оператор $\det(\boldsymbol{L})$ символомD. Для отыскания функции Φ_i имеем уравнения (24), которые запишем так:

$$D\Phi_i = f_i, \tag{32}$$

В иной форме эти уравнения выглядят так:

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}\Phi_i = f_i, \tag{33}$$

или

$$(L_{11}L_{22}L_{33} + 2L_{12}L_{23}L_{31} - L_{22}L_{13}^2 - L_{33}L_{12}^2 - L_{11}L_{32}^2)\Phi_i = f_i.$$

Учитывая (21), получим:

$$\frac{a^2(1-\mu)}{2}\left\{(1+4a^2)\frac{\partial^8\Phi_i}{\partial\xi^8} + 4(1+a^2)\frac{\partial^8\Phi_i}{\partial\xi^6\partial\varphi^2} + [6+a^2(1-\mu^2)]\frac{\partial^8\Phi_i}{\partial\xi^4\partial\varphi^4} + 4\frac{\partial^8\Phi_i}{\partial\xi^2\partial\varphi^6} + \frac{\partial^8\Phi_i}{\partial\varphi^8} + (8-2\mu^2)\frac{\partial^6\Phi_i}{\partial\xi^4\partial\varphi^2} + 8\frac{\partial^6\Phi_i}{\partial\xi^2\partial\varphi^4} + 2\frac{\partial^6\Phi_i}{\partial\varphi^6} + (1-\mu^2)\left(\frac{1}{a^2}+4\right)\frac{\partial^4\Phi_i}{\partial\xi^4} + 4\frac{\partial^4\Phi_i}{\partial\xi^2\partial\varphi^2} + \frac{\partial^4\Phi_i}{\partial\varphi^4}\right\} = f_i. \tag{34}$$

Общее решение $u_1^{(0)}$, $u_2^{(0)}$, $w^{(0)}$ однородной системы уравнений, соответствующей (24), получаем из (29) заменой Φ_1, Φ_2, Φ_3 на $\Phi_{i,0}$, где $\Phi_{i,0}$ является решением однородного уравнения, соответствующего уравнению (32), т.е. решениям уравнения:

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \Phi_{i,0} = 0, \tag{35}$$

тогда

$$u_1^{(0)} = L_{11}\Phi_{1,0} + L_{21}\Phi_{2,0} + L_{31}\Phi_{3,0};$$
$$u_2^{(0)} = L_{12}\Phi_{1,0} + L_{22}\Phi_{2,0} + L_{32}\Phi_{3,0};$$
$$w^{(0)} = L_{13}\Phi_{1,0} + L_{23}\Phi_{2,0} + L_{33}\Phi_{3,0}. \tag{36}$$

При этом можно положить:

$$\Phi_{1,0} = 0; \Phi_{2,0} = 0; \Phi_{3,0} = \frac{2\Phi}{1-\mu}, \tag{37}$$

Отсюда:

$$u_1^{(0)} = L_{31}\frac{2\Phi}{1-\mu}; u_2^{(0)} = L_{32}\frac{2\Phi}{1-\mu}; w^{(0)} = L_{33}\frac{2\Phi}{1-\mu} \tag{38}$$

Заметим, что при использовании формул (38), в которых из трех функции $\Phi_{1,0}$, $\Phi_{2,0}$, $\Phi_{3,0}$сохранена лишь $\Phi_{3,0} = \frac{2\Phi}{1-\mu}$, теряются некоторые решения, например решение, соответствующее простому растяжению: $u_1 = \frac{A\xi}{\sigma}, u_2 = 0, w = A$.

Эти перемещения удовлетворяют однородным уравнениям, соответствующим (24). В каждом из выражений (38) содержатся свои постоянные интегрирования. Учитывая (25), разрешающему уравнению в однородной задаче придадим вид:

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \frac{2}{1-\mu}\Phi = 0. \tag{39}$$

Запишем это уравнение в развернутой форме

$$(1+4a^2)\frac{\partial^8\Phi}{\partial\xi^8} + 4(1-a^2)\frac{\partial^8\Phi}{\partial\xi^6\partial\varphi^2} + [6+a^2(1-\mu^2)]\frac{\partial^8\Phi}{\partial\xi^4\partial\varphi^4} + 4\frac{\partial^8\Phi}{\partial\xi^2\partial\varphi^8} + \frac{\partial^8\Phi}{\partial\varphi^8} + (8-2\mu^2)\frac{\partial^6\Phi}{\partial\xi^4\partial\varphi^2} + 8\frac{\partial^6\Phi}{\partial\xi^2\partial\varphi^4} + 2\frac{\partial^6\Phi}{\partial\varphi^6} + (1-\mu^2)\left(\frac{1}{a^2}+4\right)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^4} + 4\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^2\partial\varphi^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial\varphi^4} = 0. \tag{40}$$

1. Упрощенные формы разрешающего уравнения

В формулах (21) члены, содержащие a^2, малы по сравнению с остальными (исключение составляют члены, входящие в выражение L_{33}). В связи с этим Л. Доннелл пренебрег ими и получил упрощенное по отношению к (34) уравнение:

$$\frac{a^2(1-\mu)}{2}\left[\frac{\partial^8\Phi_i}{\partial\xi^8} + 4\frac{\partial^8\Phi_i}{\partial\xi^6\partial\varphi^2} + 6\frac{\partial^8\Phi_i}{\partial\xi^4\partial\varphi^4} + 4\frac{\partial^8\Phi_i}{\partial\xi^2\partial\varphi^6} + \frac{\partial^8\Phi_i}{\partial\varphi^8} + (1-\mu^2)\frac{1}{a^2}\frac{\partial^4\Phi_i}{\partial\xi^4}\right] = f_i \tag{41}$$

или

$$\frac{a^2(1-\mu)}{2}\left[\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\Phi_i + \frac{1-\mu^2}{a^2}\frac{\partial^4\Phi_i}{\partial\xi^4}\right] = f_i. \tag{42}$$

Аналогично уравнение (38) приобретает вид:

$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\Phi + \frac{1-\mu^2}{a^2}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^4} = 0. \tag{43}$$

Соответственно упрощаются и формулы для миноров L_{ij}, через которые выражаются перемещения и в частном решении неоднородной системы уравнений, и в общем решении соответствующей однородной.

$$D\nabla^2\nabla^2 w - \nabla_k^2\varphi = q_n; \frac{1}{Eh}\nabla^2\nabla^2\varphi + \nabla_k^2 w = 0.$$

$$-D\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\nabla^2 w + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\nabla^2 w\right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}k_1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}k_2 + q_n = 0, \tag{44}$$

Или:

$$D\nabla^2\nabla^2 w - \nabla_k^2\varphi - q_n = 0; \nabla_k^2 = \frac{k_1\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{k_2\partial^2}{\partial x_1^2}. \tag{45}$$

Уравнение (43) может быть получено и из системы уравнений теории пологих оболочек. Действительно, рассмотрим систему (44), предполагая ее однородной ($q_n = 0$). С учетом формул (45), (1) и (3) система приобретает вид:

$$D\nabla^2\nabla^2 w - \frac{1}{\mathrm{r(x)}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0, \frac{1}{Eh}\nabla^2\nabla^2\Phi + \frac{1}{\mathrm{r\,(x)}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{46}$$

Совершим операцию $\nabla^2\nabla^2$ над вторым уравнением системы (46):

$$\frac{1}{Eh}\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\Phi + \frac{1}{\mathrm{r\,(x)}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\nabla^2\nabla^2 w = 0. \tag{47}$$

Подставляя сюда:$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{1}{\mathrm{r(x)}\cdot D}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$, получим упрощенное уравнение (48):

$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\Phi + \frac{12(1-\mu^2)}{(\mathrm{r\,(x)})^2 h^2}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} = 0 \tag{48}$$

Это уравнение аналогично (49), если положить $q_n = 0$, как и должно быть на основании статико-геометрической аналогии. Переходя к безразмерным координатам и используя формулу для a^2, получим (43).

$$D\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 w + Eh\left[\frac{1}{\mathrm{r\,(x)}}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{1}{\mathrm{r\,(x)}}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)\right] = \nabla^2\nabla^2 q_n. \tag{49}$$

Уравнение (43) дает приемлемые результаты в тех случаях, когда напряженное состояние хорошо описывается гармониками с большими номерами,и менее удачные результаты – в случае медленно меняющихся по пространственной координате напряжений. В этом смысле лучшей является аппроксимация точного уравнения, предложенная Л.С.Д. Морли:

$$\nabla^2\nabla^2(\nabla^2 + 1)^2\Phi + \frac{12(1-\mu^2)(\mathrm{r\,(x)})^2}{h^2}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^4} = 0. \tag{50}$$

Использование этого уравнения позволяет получить достаточно хорошие результаты как при быстро, так и медленно изменяющихся напряжениях по пространственной координате.

3. Моментная теория осесимметричной деформации гофрированной цилиндрической оболочки

Рассмотрим общие уравнения осесимметричной деформации гофрированной цилиндрической оболочки. Вследствие осевой симметрии деформации $Q_2 = 0$ и производные всех функций по φ обращаются в нуль ввиду их независимости от φ. Тогда общие уравнения равновесия (7) гофрированной цилиндрической оболочки разделяются на две системы и приобретают следующий вид:

$$\frac{dN_1}{d\xi} + \mathrm{r(x)} \cdot q_1 = 0; \frac{dQ_1}{d\xi} - N_2 + \mathrm{r(x)} \cdot q_n = 0; \frac{dM_1}{d\xi} - Q_1 \cdot \mathrm{r(x)} = 0; \quad (51)$$

$$\frac{dS_1}{d\xi} + \mathrm{r(x)} \cdot q_2 = 0; \frac{\partial H_1}{d\xi} = 0; S_1 - S_2 - \frac{H_2}{\mathrm{r(x)}} = 0. \quad (52)$$

При этом система (52) соответствует кручению оболочки. Геометрические уравнения также распадаются на две системы:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\mathrm{r(x)}} \frac{du_1}{d\xi}; \varepsilon_2 = \frac{w}{\mathrm{r(x)}}; x_1 = -\frac{1}{(\mathrm{r(x)})^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2}; \quad (53)$$

$$\omega = \frac{1}{\mathrm{r(x)}} \frac{du_2}{d\xi}; \tau = -\frac{1}{(\mathrm{r(x)})^2} \frac{d^2 u_2}{d\xi^2}. \quad (54)$$

Система (50) соответствует кручению оболочки.

Выводы.

1. Приведенные в настоящей работе уравнения могут быть использованы для моделирования поведения водопропускных труб круглого очертания из гофрированного металла.

2. Для решения полученных уравнений могут быть использованы либо вариационные, либо численные методы (метод конечных разностей, метод ортогонализации С.К. Годунова).

3. Применение полученных полных и упрощенных уравнений гофрированных цилиндрических оболочек позволит проанализировать их поведение с учетом реальных схем нагружения и граничных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овчинников И.Г., Овчинников И.И. Анализ причин аварий и повреждений транспортных сооружений// Транспортное строительство. М. 2010, №7. с.2-5.

2. Иванов А.В., Овчинников И.Г. Моделирование напряженно-деформированного состояния осесимметрично загруженной железобетонной цилиндрической оболочки в условиях хлоридной коррозии// Региональная архитектура и строительство. 2007 №1(2), с. 43 -52.

3. Овчинников И.И., Калиновский М.И Модель деформирования железобетонной водопропускной трубы при действии на нее произвольной нагрузки и агрессивной хлоридсодержащей среды// Дороги и мосты. Сборник статей ФГУП РосдорНИИ. М. 2009. - вып. 22/2. - С. 186-200.

4.Калиновский М.И., Овчинников И.И. Напряженно деформированное состояние и долговечность прямоугольной железобетонной трубы при действии карбонизации и хлоридсодержащей среды // Строительные материалы. 2010. №10. С.15-17.

5.Овчинников И.И., Мигунов В.Н., Овчинников И.Г. Цилиндрический изгиб железобетонной пластины на упругом основании в условиях хлоридной агрессии// Жилищное строительство. 2012. №10. с. 6-8

6. Калиновский М.И., Овчинников И.И. Построение модели деформирования сталефибробетона в плоском напряженном состоянии применительно к расчету водопропускных дорожных труб // Транспортное строительство. 2009. №6. С.28-30.

7. Петрова Е.Н.. Проектирование и строительство транспортных сооружений из металлических гофрированных элементов. : учеб.пособие / Е.Н. Петрова. – М. : МАДИ, 2012. – 56 с.

8. Лебедева Т.Б., Селина Т.Л., Беляев В.С. и др. Практика применения металлических гофрированных конструкций в хабаровском филиале ОАО «ГИПРОДОРНИИ»: сб. науч. тр. / Вопросы проектирования и строительства автомобильных дорог: опыт и инновации. Екатеринбург, 2010. №1. С. 162-175.

9. Осокин И.А., Пермикин А.С. О проблемах эксплуатации гофрированных водопропускных труб под насыпями автомобильных и железных дорог уральского региона. :Материалы международной конференции «Сучасніметодипроектування, будівництва та експлуатації систем водовідводунаавтомобільних дорогах» (1 − 2 березня 2012 року). – Киев: НТУ, 2012

10. ОДМ 218.2.001-2009. «Рекомендации по проектированию и строительству водопропускных сооружений из металлических гофрированных структур на автомобильных дорогах общего пользования с учетом региональных условий (дорожно-климатических зон)». - Введ. 2009-06-21. - М. : Изд-во стандартов, 2009. - 201 с.

11. Филин А.П. Элементы теории оболочек. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л.: Стройиздат. Ленингр. отд-ние, 1987. –384 с.

Рецензент:Кочетков Андрей Викторович, председатель Поволжского отделения Российской академии транспорта, академик РАТ, д.т.н., профессор