

Языев Батыр Меретович

Ростовский государственный строительный университет
Заведующий кафедрой «Сопротивление материалов»
Доктор технических наук, профессор
Yazyuev Batyr
Rostov State University of Civil Engineering
Head of the Department "Strength of Materials"
Doctor of Technical Sciences, Professor
E-Mail: 277588@rambler.ru

Чепурненко Антон Сергеевич

Ростовский государственный строительный университет
Студент
Chepurnenko Anton Sergeevich
Rostov State University of Civil Engineering
Student
E-Mail: anton_chepurnenk@mail.ru

Муханов Алексей Витальевич

Ростовский государственный строительный университет
Старший преподаватель кафедры электротехники и автоматики
Mukhanov Aleksei Vitalievich
Rostov State University of Civil Engineering
Senior Lecturer, Department of Electrical Engineering and Automation

05.23.17 Строительная механика

**Оптимизация предварительно напряженного толстостенного
железобетонного цилиндра**

Optimization of reinforced concrete pre-stressed thick-walled cylinder

Аннотация: Получены разрешающие уравнения для определения напряженно-деформированного состояния толстостенного предварительно напряженного железобетонного цилиндра, нагруженного внутренним давлением в случае плоской деформации. Также решена обратная задача - нахождение оптимального закона распределения коэффициента армирования, при котором предельное состояние в цилиндре наступает одновременно во всех точках. Решение прямой и обратной задачи при расположении арматуры в толще конструкции выполнено численно в программном комплексе MatLab. В первом случае применен метод конечных разностей, а во втором – метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Abstract: The resolving equation for determining the stress-strain state of thick-walled prestressed concrete cylinder loaded with internal pressure in the case of plane strain was obtained. Also the inverse problem was solved - finding the optimal ratio of the distribution of reinforcement in which the dangerous state in the cylinder occurs simultaneously at all points. Solution of was made numerically in the software package MatLab. The use of non-uniform reinforcement helps to reduce the consumption of steel. We succeeded in reducing the consumption of rebar by 33 percent in comparison with the uniform reinforcement at the same thickness and external loads.

Ключевые слова: Толстостенный цилиндр; оптимизация; обратная задача; предварительно напряженный железобетон.

Keywords: Thick-walled cylinder; optimization; reinforced concrete; plane strain; inverse elastic problem.

Задачи оптимизации толстостенных цилиндров рассматриваются в работах [1-2, 4-10]. Среди них необходимо отметить работы [1,6], в которых приводится решение для железобетонного цилиндра, имеющего кольцевую и вертикальную арматуру, на основе общей модели механики железобетона Н.И. Карпенко [3]. Однако, авторы в работах [1,6] ограничиваются такими видами нагружений цилиндра, при которых в нем возникают только сжимающие напряжения, т.е. когда внутренне давление p_a меньше внешнего давления p_b . Кроме того, в данных работах, а также в работах [2,4,5,7-10] решение задачи оптимизации сводится только к подбору распределения характеристик бетона. С практической точки зрения больший интерес представляет подбор оптимального армирования конструкции при неизменном по толщине модуле упругости.

В случае, когда $p_a > p_b$, в бетоне могут возникать растягивающие напряжения $\sigma_{b\theta}$, значительно превышающие его предел прочности на растяжение, что приводит к образованию трещин, и, поэтому требуется создавать предварительное напряжение. Одним из способов создания отрицательных напряжений $\sigma_{b\theta}$ в конструкции является намотка с натягом тросов по внешней поверхности. Кроме того, существуют способы создания предварительных напряжений в кольцевой арматуре, расположенной в толще цилиндра.

Рассмотрим расчет оболочки в случае, когда напрягаемая арматура расположена на внешней поверхности. Действие напрягаемой арматуры на бетонный цилиндр можно заменить контактным давлением p_b . Будем полагать, что оболочка находится в условиях плоской деформации. Величину p_b можно определить из условия равновесия ее половины (рис.1).

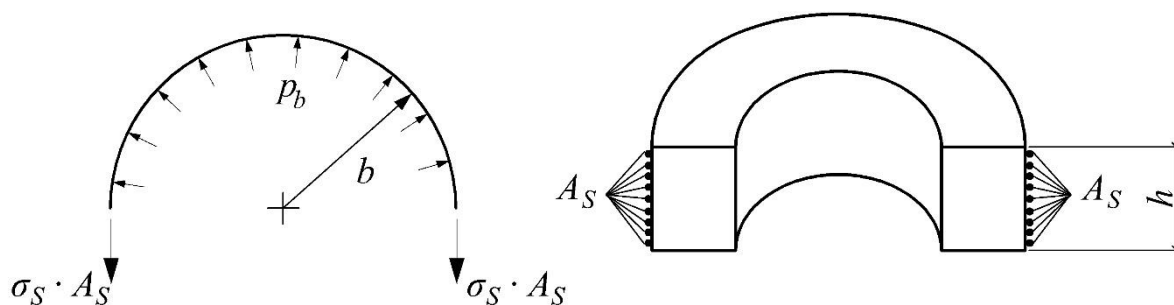


Рис. 1. К определению контактного давления p_b .

$$2\sigma_S A_S = h \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_b \cdot b \cdot \cos \varphi d\varphi = 2p_b \cdot b \cdot h \Rightarrow \sigma_S = \frac{p_b \cdot b \cdot h}{A_S} \quad (1)$$

Напряжения в кольцевой арматуре определяются выражением:

$$\sigma_S = E_S \cdot \varepsilon_{\theta}|_{r=b} + \sigma_{sp}, \quad (2)$$

где σ_{sp} - начальные напряжения в кольцевой арматуре (до момента передачи усилий на бетон).

Из решения задачи Ляме для случая ПДС известна формула для перемещений $u(r)$:

$$u = \frac{(p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2)(1 - \nu_1)}{(b^2 - a^2)E_1} r - \frac{(p_b - p_a)a^2 b^2 (1 + \nu_1)}{(b^2 - a^2)E_1} \frac{1}{r}, \quad (3)$$

$$\text{где } E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}.$$

Тогда выражение для окружной деформации можно записать в виде:

$$\varepsilon_{\theta}|_{r=b} = \frac{u|_{r=b}}{b} = \frac{(p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2)(1 - \nu_1)}{(b^2 - a^2)E_1} - \frac{(p_b - p_a)a^2 (1 + \nu_1)}{(b^2 - a^2)E_1}, \quad (4)$$

Подставив выражения (1) и (4) в (2), после некоторых преобразований получим формулу для контактного давления:

$$p_b = \frac{\frac{2p_a \cdot a^2}{(b^2 - a^2)E_1} + \frac{\sigma_{sp}}{E_s}}{\frac{bh}{A_s E_s} + \frac{1}{E_1(b^2 - a^2)}(b^2(1 - \nu_1) + a^2(1 + \nu_1))}. \quad (5)$$

Далее, чтобы определить напряжения $\sigma_{b\theta}$ и σ_r в бетоне, нужно подставить значение p_b в известные формулы для задачи Ляме.

На рис.2 показан график распределения напряжений $\sigma_{b\theta}$ при $p_a=10$ МПа $a=1$ м, $b=2$ м, $h=3$ м, $\nu=0.2$, $E_b=2.16 \cdot 10^4$ МПа, $E_s=2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{sp}=500$ МПа.

Чтобы не возникало растягивающих напряжений, для рассматриваемого примера потребовалось 6856 кг арматуры. Как видно из графика, предельное состояние в этом случае наступает только у внутренней поверхности.

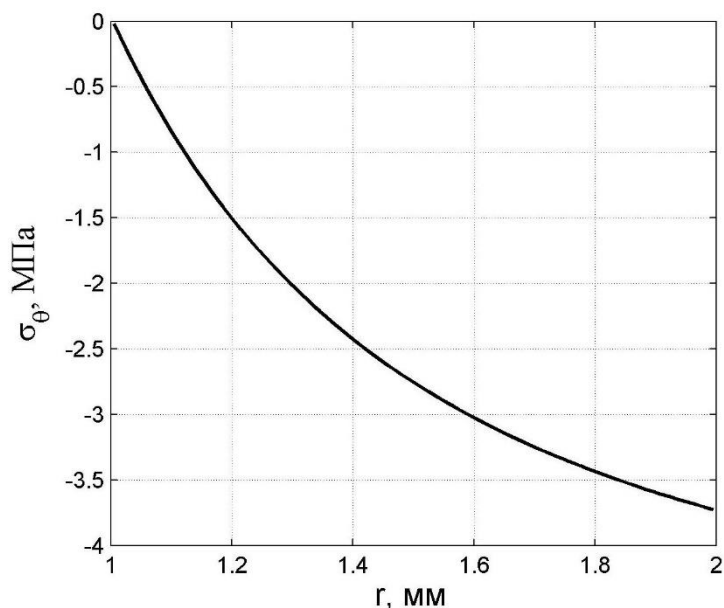


Рис. 2. График распределения напряжений $\sigma_{b\theta}$

Рассмотрим теперь задачу, когда напрягаемая арматура расположена в толще цилиндра. При выводе разрешающих уравнений за основу возьмем работу[6]. Также будем рассматривать плоское деформированное состояние. Закон Гука в этом случае запишется в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1-\mu_s}{E_{b1}} (\sigma_{br} - \nu_1 \sigma_{b\theta}) \\ \varepsilon_\theta = \frac{1-\mu_s}{E_{b1} (1-\mu_{s\theta})} (-\nu_1 \sigma_{br} + \sigma_{b\theta}) \end{cases}, \quad (6)$$

где $\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$, $E_{b1} = \frac{E_b}{1-\nu^2}$, $\mu_s = \mu_{s\theta} + \mu_{sz}$, $\mu_{s\theta}$, μ_{sz} - коэффициенты армирования

для кольцевой и вертикальной арматуры соответственно. Средние напряжения σ_r , σ_θ , σ_z в железобетоне в [3,6] выражаются через напряжения в арматуре и бетоне следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_{br} \\ \sigma_\theta = \sigma_{b\theta} (1 - \mu_{s\theta}) + E_s \varepsilon_\theta \mu_{s\theta} \\ \sigma_z = \sigma_{bz} (1 - \mu_{sz}) \end{cases} \quad (7)$$

Величина $\sigma_{s\theta} = E_s \varepsilon_\theta$ представляет собой напряжения в кольцевой арматуре. Для предварительно напряженного цилиндра $\sigma_{s\theta} = E_s \varepsilon_\theta + \sigma_{sp}$, где σ_{sp} - начальные напряжения в кольцевой арматуре. С учетом этого систему (7) перепишем в виде:

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_{br} \\ \sigma_\theta = \sigma_{b\theta} (1 - \mu_{s\theta}) + (E_s \varepsilon_\theta + \sigma_{sp}) \mu_{s\theta} \\ \sigma_z = \sigma_{bz} (1 - \mu_{sz}) \end{cases} \quad (8)$$

Уравнения равновесия и совместности деформаций остаются неизменными:

$$\sigma_{\theta} = r\sigma_r' + \sigma_r. \quad (9)$$

$$\varepsilon_{\theta}' + \frac{\varepsilon_{\theta} - \varepsilon_r}{r} = 0 \quad (10)$$

В работе [6] уравнения (6), (7), (9),(10) сводятся к системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \sigma_r' = \frac{1}{r} \cdot \frac{\varepsilon_{\theta}(E_{b1}(1-\mu_{s\theta})^2 + E_s\mu_{s\theta}(1-\mu_s)) - \sigma_r(1-\nu_1(1-\mu_{s\theta}))(1-\mu_s)}{1-\mu_s} \\ \varepsilon_{\theta}' = \frac{1}{r} \cdot \frac{(1-\nu_1^2)(1-\mu_s)\sigma_r - (1+\nu_1(1-\mu_{s\theta}))E_{b1}\varepsilon_{\theta}}{E_{b1}} \end{cases} \quad (11)$$

Пусть $A = \frac{E_{b1}(1-\mu_{s\theta})^2}{1-\mu_s} + E_s\mu_{s\theta}$, $B = 1 - \nu_1(1-\mu_{s\theta})$, $C = \frac{(1-\nu_1^2)(1-\mu_s)}{E_{b1}}$,

$D = 1 + \nu_1(1-\mu_{s\theta})$. Тогда для предварительно напряженного цилиндра (9) и (10) с учетом (8) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \sigma_r' = \frac{A \cdot \varepsilon_{\theta} - B \cdot \sigma_r}{r} + \frac{\mu_{s\theta} \cdot \sigma_{sp}}{r} \\ \varepsilon_{\theta}' = \frac{C \cdot \sigma_r - D \cdot \varepsilon_{\theta}}{r} \end{cases} \quad (12)$$

Такого вида систему предлагается решать методом Рунге-Кутты четвертого порядка, однако выразив из первого уравнения ε_{θ} через σ_r , можно перейти к следующему дифференциальному уравнению второго порядка относительно σ_r :

$$r\sigma_r'' + \sigma_r'(1+B+D - \frac{rA'}{A}) + \sigma_r(B' + \frac{BD}{r} - \frac{BA'}{A} - \frac{AC}{r}) = \sigma_{sp}(\frac{D\mu_{s\theta}}{r} + \mu_{s\theta}' - \mu_{s\theta}\frac{A'}{A}). \quad (13)$$

Граничные условия для уравнения (13) имеют вид: $\sigma_r(a) = -p_a$, $\sigma_r(b) = -p_b$. Данное дифференциальное уравнение удобно решать методом конечных разностей.

На рис. 3 представлен график изменения напряжений $\sigma_{b\theta}$ при $p_a=10$ МПа, $p_b=0.332$ МПа, $\mu_{sz}=0.01$, полученный для случая равномерного кольцевого армирования ($\mu_{s\theta}=const=0.0204$).

Расход арматуры при этом составил 4528 кг. Из графика видно, что при таком армировании напряжение $\sigma_{b\theta} = 0$ только на внутренней поверхности. Для снижения расхода арматуры необходимо добиться, чтобы предельное состояние наступало одновременно во

всех точках. Так как прочность бетона на растяжение невелика, то будем считать, что предельное состояние наступает при $\sigma_{b\theta} = 0$.

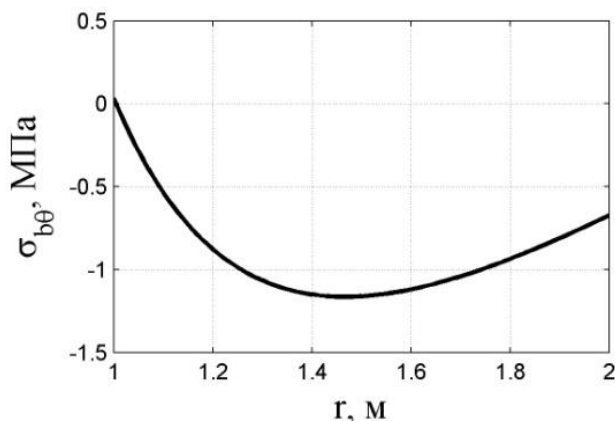


Рис. 3. Изменение напряжений $\sigma_{b\theta}$ в бетоне при равномерном кольцевом армировании

Найдем такое распределение коэффициента армирования, при котором $\sigma_{b\theta} = 0$ по всей толще. Для этого приравняем $\sigma_{b\theta}$ к 0 в уравнениях (6) и (8). Также для упрощения будем считать, что $\mu_{sz} \approx 0$, тогда $\mu_s = \mu_{s\theta} = \mu$, и системы (6), (8) примут вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1-\mu}{E_{b1}} \sigma_{br} \\ \varepsilon_\theta = \frac{-\nu_1 \sigma_{br}}{E_{b1}} \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_{br} \\ \sigma_\theta = (E_s \varepsilon_\theta + \sigma_{sp}) \mu \\ \sigma_z = \sigma_{bz} \end{cases} \quad (15)$$

С учетом того, что $\sigma_r = \sigma_{br}$, подставив (14) в (10), после некоторых преобразований получим уравнение:

$$\sigma_r' = -\frac{\sigma_r}{r} \left(1 + \frac{1-\mu}{\nu_1}\right). \quad (16)$$

Подставим вместо ε_θ во второе уравнение системы (15) выражение $-\nu_1 \sigma_r / E_{b1}$ и приравняем к (9):

$$\begin{aligned} r\sigma_r' + \sigma_r &= \mu \left(-\frac{\nu_1 E_s}{E_{b1}} \sigma_r + \sigma_{sp} \right) \\ \text{или } \sigma_r' &= \frac{1}{r} \left(\mu \cdot \sigma_{sp} - \sigma_r \left(1 + \frac{\mu \cdot \nu_1 \cdot E_s}{E_{b1}} \right) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Приравняем правые части (16) и (17) и выразим μ через σ_r :

$$\mu = \frac{\sigma_r}{\sigma_r \left(\frac{v_1^2 E_s}{E_{b1}} + 1 \right) - \sigma_{sp} \cdot v_1}. \quad (18)$$

Далее подставив (18) в (16), получим окончательное разрешающее уравнение:

$$\sigma_r' = -\frac{\sigma_r}{r} \left(1 + \frac{1}{v_1} \frac{\sigma_r \cdot \frac{v_1^2 E_s}{E_{b1}} - \sigma_{sp} \cdot v_1}{\sigma_r \cdot \left(\frac{v_1^2 E_s}{E_{b1}} + 1 \right) - \sigma_{sp} \cdot v_1} \right). \quad (19)$$

Уравнение (19) решалось численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

На рис. 2 и 3 представлены соответственно графики распределения коэффициента μ и напряжений σ_r , полученные при $v = 0.2, E_b = 2.16 \cdot 10^4 \text{ МПа}, E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \sigma_{sp} = 500 \text{ МПа}, a = 1 \text{ м}, p_a = 10 \text{ МПа}$.
Задавшись $b=2\text{ м}$, получили $\sigma_r(b) = -0.332 \text{ МПа}$.

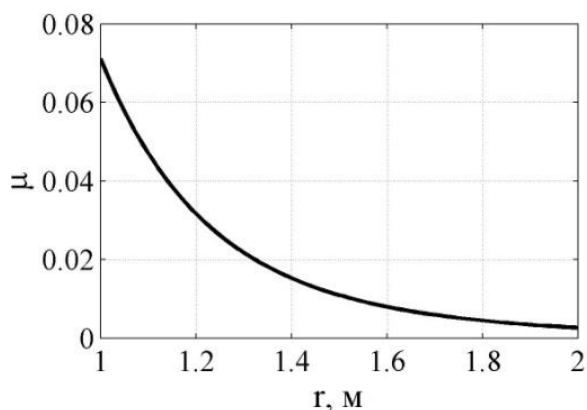


Рис. 4. График распределения коэффициента кольцевого армирования

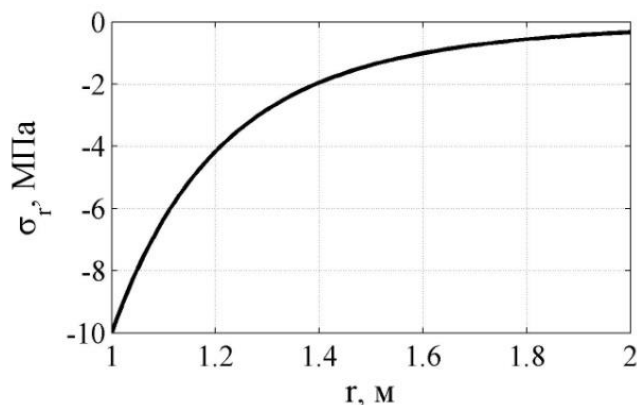


Рис. 5. График распределения напряжений σ_r при неравномерном армировании

Правильность результата можно проверить путем решения прямой задачи, приняв напряжения σ_r на наружной грани такими, которые получились при решении обратной задачи. В табл. 1 представлено сравнение напряжений σ_r , полученных в результате решения прямой и обратной задачи. Число интервалов по радиусу было принято равным 20. Максимальное расхождение составляет 1.1%.

Таблица 1

**Сравнение результатов решения прямой и обратной задачи
(все напряжения со знаком «-»)**

r, м		1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
σ_r , МПа	прямая задача	6.331	4.143	2.794	1.936	1.374	0.997	0.738	0.556	0.426
	обратная задача	6.349	4.165	2.815	1.954	1.389	1.008	0.746	0.561	0.429

Цилиндр с равномерным армированием при $\mu_{s\theta} = 0.0204$ обладает такой же несущей способностью, как и цилиндр с распределением коэффициента армирования, показанным на рис. 4. Во втором случае расход арматуры 3398 кг. Применение неравномерного армирования позволило снизить расход арматуры на 33% по сравнению с равномерным армированием. А по сравнению с внешним армированием расход арматуры снизился в 2 раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев В.И., Потехин И.А. Оптимизация по прочности толстостенных оболочек. М.: МГСУ, 2011. – 86 с.
2. Андреев В.И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел: монография. – М.: Издательство АСВ, 2002. – 288 с.
3. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.:Стройиздат, 1996 – 416 с.
4. Андреев В.И., Потехин И.А. О способе создания оптимальных строительных конструкций на основе решения обратных задач теории упругости неоднородных тел// Вестник строит, наук. Вып. 11. Курск, 2007. С. 48-52.
5. Андреев В.И., Булушев С.В. Оптимизация неоднородной толстостенной сферической оболочки, находящейся в температурном поле. Вестник МГСУ, 2012, №12, стр. 40-46.
6. Потехин И.А. Способ оптимизации конструкций на основе решения обратных задач теории упругости неоднородных тел. Дисс. канд. техн. наук. М., 2009. - 144 с.
7. Andreev V.I. Optimization of thick-walled shells based on solutions of inverse problems of the elastic theory for inhomogeneous bodies. Computer Aided Optimum Design in Engineering XII (OPTI XII). WIT Press. 2012, p.189-201
8. Потехин И.А. О моделировании равнопрочных конструкций на основе различных теорий прочности// Сб. тр./ Кострома: КГСХА, 2008. Т. 4. С. 3233.
9. Андреев В.И., Потехин И.А. Моделирование равнопрочного цилиндра на основе итерационного подхода// International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, v. 4, is. 1, 2008, p. 79-84
10. Андреев В.И. Минаева А.С. Моделирование равнонапряженного цилиндра, подверженного силовым и температурным нагрузкам. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Volume 7, Issue 1, 2011. p. 71-75

Рецензент: Панасюк Леонид Николаевич, заведующий кафедры «Техническая механика» Ростовского государственного строительного университета, доктор технических наук, профессор.