Язывев Батыр Меретович
Ростовский государственный строительный университет
Заведующий кафедрой «Сопротивление материалов»
Доктор технических наук, профессор
Yazyyev Batyr
Rostov State University of Civil Engineering
Head of the Department "Strength of Materials"
Doctor of Technical Sciences, Professor
E-Mail: 277588@rambler.ru

Смирнов Иван Иванович
Ростовский государственный строительный университет
Кафедра «Сопротивление материалов»
Кандидат технических наук, доцент
Smirnov Ivan
Rostov State University of Civil Engineering
Assistant professor of "Strength of Materials"
Candidate of Technical Sciences, Docent
E-Mail: iis1@rambler.ru

Захарова Кристина Вадимовна
Ростовский государственный строительный университет
Студент
Zaharova Kristina
Rostov State University of Civil Engineering
Student
E-Mail: ZkristinaZ@yandex.ru

Строительная механика

К расчету защитных экранов в виде трехслойных оболочек с заполнителем в виде слоя упругопластических энергопоглощающих элементов

To the calculation of protective screens in the form of sandwich shells with a filler in the form of a layer elastic-plastic absorbing elements

Аннотация: В настоящее время активно развивается направление сейсмозащиты, связанное с использованием энергопоглощающих экранов, выполненных в виде трехслойных конструкций. Главная трудность при исследовании поставленной задачи состоит в решении системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, совместно с граничными и начальными условиями. Получить решение этой системы в аналитическом виде не представляется возможным, так как весьма трудно заранее предугадать характер деформирования несущих слоев трехслойной оболочки за пределами упругости.

Abstract: Currently actively developing direction of seismic protection associated with the use of absorbing screens made in the form of sandwich structures. The main difficulty in the study of the task consists in solving a system of nonlinear partial differential equations, together with the boundary and initial conditions. Get the solution of this system in the analytical form is not possible, since it is difficult to predict the nature of the deformation of the bearing layer of three-layer shell outside of elasticity.

Ключевые слова: Динамическая нагрузка; упругопластическая деформация; диаграмма деформирования; энергопоглощение.

Keywords: Dynamic loading; uprugoplastichesky deformation; deformation chart; power absorption.

***

Главная трудность при исследовании поставленной задачи состоит в решении системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, совместно с граничными и начальными условиями. Получить решение этой системы в аналитическом виде не представляется возможным, так как весьма трудно заранее предугадать характер деформирования несущих слоев трехслойной оболочки за пределами упругости.

Поэтому в данной работе предлагается методика решения системы уравнений, которые имеют вид:

$$\begin{cases} \Omega_1 \Delta U + \Omega_2 \Delta \mathrm{U} + \Omega_3 \mathrm{W} + \Phi_1 + R^2 B_2^{-1} P_{\alpha 2}^{\Sigma} = R^2 B_2^{-1} \rho_2 \delta_2 \Delta \mathrm{U}_{,tt} \\ \Omega_4 \Delta U + \Omega_5 \Delta \mathrm{U} + \Omega_6 \mathrm{W} + \Phi_2 + R^2 B_2^{-1} P_{\beta 2}^{\Sigma} = R^2 B_2^{-1} \rho_2 \delta_2 \Delta \mathrm{V}_{,tt} \\ \Omega_7 \Delta U + \Omega_8 \Delta \mathrm{U} + \Omega_9 \mathrm{W} + \Phi_3 + R^2 B_2^{-1} P_{z2}^{\Sigma} = R^2 B_2^{-1} \rho_2 \delta_2 \Delta \mathrm{W}_{,tt} \end{cases} \quad (1)$$

с помощью метода сеток [1,2,3], идея которого состоит в аппроксимации непрерывной (континуальной) области некоторого вида сеточной (дискретной) областью.

Здесь $\Omega_{1\text{-}3}$ - дифференциальные операторы, относящиеся к линейным членам уравнения;

$\Omega_{1\text{-}3}$ - дифференциальные операторы, относящиеся к членам, учитывающим геометрическую и физическую нелинейности;

Индексы "Δ" в этих уравнениях обозначают то обстоятельство, что в уравнениях взяты относительные перемещения несущих слоев, т.е. $\Delta U=U_2-U_1$; $\Delta V=V_2-V_1$; $\Delta W=W_2-W_1$.

Для аппроксимации уравнений, использовалась схема, согласно которой в области изменения переменных $0 \le \alpha \le \mu$, $0 \le \beta \le \pi$, $\tau \ge 0$ вводилась равномерная сетка, образованная точками пересечения плоскостей.

$$\alpha_i = (i-1)\Delta\alpha,\ (i = 1,2,\ldots,n)$$

$$\beta_j = (j-1)\Delta\beta,\ (i = 1,2,\ldots,l)$$

$$\tau_m = m\Delta\tau,\ (m = 0,1,\ldots).$$

Здесь $\Delta\alpha = \mu(n-1)^{-1}$, $\Delta\beta = \pi(l-1)^{-1}$, $\Delta\tau$ - шаги разностной схемы; временной слой m = 0 (плоской τ=0) является вспомогательным и служит для аппроксимации начальных условий. Для функции $f = (\alpha,\beta,\tau)$, вычисленной в узлах сетки, использовались обозначения $f_{i,j}^m = f(\alpha_i,\beta_j,\tau_m)$.

Перегруппировкой слагаемых в уравнениях системы (1), запишем систему в ином виде, более удобном для дальнейшего решения:

$$\begin{cases} a_1 U_{\alpha\alpha} + a_2 U_{\beta\beta} + F_1 = U_{\alpha\alpha} \\ b_1 V_{\alpha\alpha} + b_2 V_{\beta\beta} + F_2 = V_{\alpha\alpha} \\ C_1 W_{\alpha\alpha\alpha\alpha} + 2C_0 W + C_2 W_{\beta\beta\beta\beta} + F_3 = W_{\alpha\alpha} \end{cases} \quad (2)$$

здесь $a_1 = 1,\ a_2 = 0{,}5(1-\nu);$

$$b_2 = 0{,}5(1-\nu), \qquad b_2 = 1;$$

$$c_1 = h^2, \qquad c_0 = 1, \qquad c_2 = \eta^2.$$

В этих уравнениях в целях сокращения записи перед U, V, W опущен знак "Δ". Выражение для $F_{1,2,3}$ определяется из сравнения систем (1) и (2).

При замене дифференциальных уравнений (2) конечно-разностными используются следующие разностные операторы:

$$\begin{cases} \Omega_\alpha f_{i,j}^m = \Delta\alpha^{-2}\left(f_{i+1,j}^m - 2f_{i,j}^m + f_{i-1,j}^m\right) \\ \Omega_\beta f_{i,j}^m = \Delta\beta^{-2}\left(f_{i,j+1}^m - 2f_{i,j}^m + f_{i,j-1}^m\right) \\ \Omega_\tau f_{i,j}^m = \Delta\tau^{-2}\left(f_{i,j}^{m-1} - 2f_{i,j}^m + f_{i,j}^{m+1}\right) \end{cases} \quad (3)$$

Учитывая, что

$$\begin{cases} \Omega_\alpha f_{i,j}^m = f_{\alpha\alpha}\left(\alpha_i, \beta_j, \tau_m\right) + 0(\Delta\alpha^2) \\ \Omega_\beta f_{i,j}^m = f_{\beta\beta}\left(\alpha_i, \beta_j, \tau_m\right) + 0(\Delta\beta^2) \\ \Omega_\tau f_{i,j}^m = f_{\tau\tau}\left(\alpha_i, \beta_j, \tau_m\right) + 0(\Delta\tau^2) \end{cases} \quad (4)$$

где $f_{\alpha\alpha}\left(\alpha_i, \beta_j, \tau_m\right) = \Omega_\alpha(P f_{i,j}^{m+1} + q f_{i,j}^{m-1}),$

$$f_{\beta\beta}\left(\alpha_i, \beta_j, \tau_m\right) = \Omega_\beta\left(P f_{i,j}^{m+1} + q f_{i,j}^{m-1}\right).$$

Это означает, что для вычисления производных по α или β в точке m , τ_m разностной схемы используются значения остаточных функций на (m+1)-ом и (m-1)-ом слоях по времени. Параметры p и q называются весовыми коэффициентами схемы, причем p+q=1.

С учетом сказанного, разностные уравнения, соответствующие (2), имеют вид:

$$\begin{cases} \left(a_1\Omega_\alpha + a_2\Omega_\beta\right)V_{ij}^m + F_1^k = \Omega_\tau U_{ij}^m \\ \left(b_1\Omega_\alpha + b_2\Omega_\beta\right)V_{ij}^m + F_2^k = \Omega_\tau U_{ij}^m \\ (i = 2, \dots, n-1;\, j = 2, \dots, l-1;\, m = 2, \dots) \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \left(c_1\Omega_\alpha^2 + 2c_0 J + c_2\Omega_\beta^2\right)W_{ij}^m + F_3^k = \Omega_\tau W_{ij}^m \\ (i = 3, \dots, n-2;\, j = 2, \dots, l-2;\, m = 2, \dots) \end{cases} \quad (6)$$

Здесь J-единичный оператор, для которого $J f_{ij}^m = f_{ij}^m$

$$\begin{cases} V_{ij}^m = P U_{ij}^{m+1} + q U_{ij}^{m-1} \\ V_{ij}^m = P \mathrm{V}_{ij}^{m+1} + q \mathrm{V}_{ij}^{m-1} \\ V_{ij}^m = P W_{ij}^{m+1} + q W_{ij}^{m-1} \end{cases} \quad (7)$$

$$\mathrm{p} > 0, q > 0, p \geq q.$$

Слагаемые F_{1-3}^k представляют собой F_{1-3}, в которых все производные по α и β от U,V,W заменены на разностные выражения соответствующих порядков от U_{ij}^m, V_{ij}^m, W_{ij}^m.

Необходимые для записи (5), (6) при m=1 значения сеточных функций $U_{ij}^{m}, V_{ij}^{m}, W_{ij}^{m}$ находятся из начальных условий. Для определения неизвестных сеточных функций $U_{ij}^{m}, V_{ij}^{m}, W_{ij}^{m}$ во всех узлах сетки, используются граничные условия, записанные в левых и правых разностях.

Уравнения (5),(6) совместно с начальными и граничными условиями образуют замкнутую систему алгебраических уравнений для определения на каждом шаге по времени всех неизвестных сеточных функций. Эти уравнения нелинейны, поэтому для их решения непосредственно неприменимы методы, развитые для линейных систем. Однако решение может быть построено по методу итераций, согласно которому на каждом шаге последовательных приближений величины F_{1-3}^{k} вычисляются по значениям сеточных функций, найденных в результате предыдущей итераций. В результате этого на каждом шаге итерационного процесса уравнения линейны.

Соответствующие линейные уравнения можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \left(J - p\Delta\tau^2 a_1 \Omega_\alpha - p\Delta\tau^2 a_2 \Omega_\beta\right) U_{ij}^{m+1} = \bar{\eta}_{ij} \\ \left(J - p\Delta\tau^2 b_1 \Omega_\alpha - p\Delta\tau^2 b_2 \Omega_\beta\right) V_{ij}^{m+1} = \bar{\bar{\eta}}_{ij} \end{cases} \quad (8)$$

$$\left(J - p\Delta\tau^2 x_1 \Omega_\alpha^2 - p\Delta\tau^2 x_2 \Omega_\beta^2\right) W_{ij}^{m+1} = \bar{\eta}_{ij} \quad (9)$$

Здесь $x_1 = c_1(1 - p\Delta\tau^2 c_0)^{-1}$, $x_2 = c_2(1 - p\Delta\tau^2 c_0)^{-1}$. Структура правых частей вытекает из сопоставления (8),(9) с (6),(7).

Величины $U_{ij}^{m+1}, V_{ij}^{m+1}, W_{ij}^{m+1}$, входящие в правые части представляют собой значения, найденные на предыдущем этапе процесса последовательных приближений. В совокупности с граничными условиями последние соотношения образуют двумерные разностные краевые задачи. Для их решения можно воспользоваться методом приближенной факторизации разностного оператора [6], согласно которому операторы левых частей уравнений (8), (9) представляются в виде произведения:

$$\begin{cases} \left(J - p\Delta\tau^2 \alpha_1 \Omega_\alpha - p\Delta\tau^2 x_2 \Omega_\beta\right) U_{ij}^{m+1} = \bar{\eta}_{ij} \\ \left(J - p\Delta\tau^2 b_1 \Omega_\alpha - p\Delta\tau^2 b_2 \Omega_\beta\right) V_{ij}^{m+1} = \bar{\bar{\eta}}_{ij} \\ \left(J - p\Delta\tau^2 x_1 \Omega_\alpha^2 - p\Delta\tau^2 x_2 \Omega_\beta^2\right) W_{ij}^{m+1} = \bar{\eta}_{ij} \end{cases} \quad (10)$$

Вводя промежуточные сеточные функции, определяемые соотношениями

$$\begin{cases} (J - p\Delta\tau^2 \alpha_1 \Omega_\alpha) U_{ij}^{m+0,5} = \bar{\eta}_{ij} \\ (J - p\Delta\tau^2 b_1 \Omega_\alpha) V_{ij}^{m+0,5} = \bar{\bar{\eta}}_{ij} \\ (J - p\Delta\tau^2 x_1 \Omega_\alpha^2) W_{ij}^{m+0,5} = \bar{\eta}_{ij} \end{cases} \quad (11)$$

перепишем уравнение (11) в несколько иной форме:

$$\begin{cases} (J - p\Delta\tau^2 \alpha_2 \Omega_\alpha) U_{ij}^{m+1} = U_{ij}^{m+0,5} \\ (J - p\Delta\tau^2 b_2 \Omega_\alpha) V_{ij}^{m+1} = V_{ij}^{m+0,5} \\ (J - p\Delta\tau^2 x_2 \Omega_\alpha^2) W_{ij}^{m+1} = W_{ij}^{m+0,5} \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом, решение двумерной разностной задачи распадается на два этапа, называемых дробными шагами [4]. На первом дробном шаге решается группа одномерных задач по одной из переменных, а на втором - группа также одномерных задач, но уже по другой переменной.

В нашем случае первый дробный шаг состоит в решении краевых задач для $U_{ij}^{m+0,5}$, $V_{ij}^{m+0,5}$, $W_{ij}^{m+0,5}$ по переменной α, или по дискретному аргументу i, а второй для U_{ij}^{m+1}, V_{ij}^{m+1}, W_{ij}^{m+1} - по переменной β или j.

Для нахождения вспомогательных функций $U_{ij}^{m+0,5}$, $V_{ij}^{m+0,5}$, $W_{ij}^{m+0,5}$ можно использовать граничные условия, формулированные для U_{ij}^{m+1}, V_{ij}^{m+1}, W_{ij}^{m+1}.

Система полученных разностных уравнений имеет пятидиагональную матрицу и решается по методу прогонки, изложенному в [6].

Определив взаимное перемещение несущих слоев для каждого узла сетки, можно построить зависимость реактивной нагрузки, действующей на несущие слои оболочки в этих точках, от внешней силы для каждого момента времени.

При известной этой зависимости производится расчет напряженно-деформированного состояния несущих слоев оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы.- М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2004.
2. Andreev V.I. Optimization of thick-walled shells based on solutions of inverse problems of the elastic theory for inhomogeneous bodies. Computer Aided Optimum Design in Engineering XII (OPTI XII). WIT Press. 2012, p.189-201
3. Андреев В.И., Потехин И.А. Моделирование равнопрочного цилиндра на основе итерационного подхода// International Jornal for Computational Civil and Structural Engineering, v. 4, is. 1, 2008, p. 79-84
4. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. Изд. 2, перераб. и доп. – Наука, 1977.
5. Andreev V.I. Minaeva A.S. Creation on the basis of the first theory of strength model equal stressed cylinder exposed to power and temperature loads. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Volume 7, Issue 1, 2011. p. 71-75
6. Самарский А.А, Николаев Е.С.. Методы решения сеточных уравнений. М., Наука, 1978.
7. Смирнов И.И., Захарова К.В. К расчету упругопластических торсионов энергопоглощающих устройств: «Инженерный вестник Дона» Номер 4 (часть 2), 2012 г. http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1312
8. Смирнов И.И., Захарова К.В. Обоснование конструктивных особенностей энергопоглотителей для сейсмозащиты сооружений: «Инженерный вестник Дона» Номер 4 (часть 2), 2012 г. http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1313
9. Смирнов И.И., Захарова К.В., Авилкин В.И., Стрельников Г.П. К использованию торсионных энергопоглотителей для сейсмозащиты сооружений: «Инженерный вестник Дона» Номер 4 (часть 2), 2012 г. http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1314

Рецензент: Дерюшев Виктор Владимирович, заведующий кафедрой ТЭСАО, доктор технических наук, профессор, Ростовский государственный строительный университет.