

**Сайфутдинова Наталья Анатольевна**

Sayfutdinova Natalia Anatolievna

Ростовский государственный строительный университет,

кафедра высшей математики

Rostov State University of Civil Engineering,

cathedra of high mathematics

Доцент

Professor

05.13.18 – Математическое моделирование,

численные методы и комплексы программ

E-Mail: saifut25@mail.ru

### **Численные алгоритмы решения некоторой задачи оптимального управления и их реализация в виде программного комплекса**

Numerical algorithms for the solution of a problem of optimal control and their implementation in the form of software system

**Аннотация:** При моделировании экономического развития с учётом влияния эффективности инвестиций возникла задача оптимизации. Эту задачу можно отнести к классу задач оптимального управления с терминальной целевой функцией. Для её решения разработаны численные алгоритмы, основанные на методах безусловной оптимизации. Эти алгоритмы реализованы в виде программного комплекса, который позволяет оптимизировать распределение инвестиций в научно-исследовательский комплекс.

**The Abstract:** In modeling of economic development with the influence of investment performance optimization problem arose. This problem can be attributed to the class of optimal control problems with terminal objective function. For its solution developed numerical algorithms based on the methods for unconstrained optimization. These algorithms are implemented in a software package that allows you to optimize the allocation of investment in research and development complex.

**Ключевые слова:** Оптимальное распределение ресурсов; управление основными фондами и трудовыми ресурсами; задача оптимизации с ограничениями в виде равенств и неравенств.

**Keywords:** Optimal distribution of resources; management of fixed capital and manpower; problem of optimization with restrictions in the form of equalities and inequalities.

\*\*\*

#### **1. Постановка задачи**

В работе [3] рассматривается модель инвестиционного процесса, затрагивающего научно-исследовательский сектор. Этот процесс касается предприятия (отрасли промышленности, экономики в целом), деятельность которого связана с производством некоторого продукта, и основывается на некоторой технологии, уровень которой напрямую связан с функционированием научно-исследовательского сектора. Для описания деятельности предприятия будем использовать производственную функцию Кобба-Дугласа и рассматривать её на промежутке  $[t_0, t_n]$ ,  $n \in N$ . В качестве управляющего параметра выступает доля выпуска  $s_i$ , инвестируемая в НИС на промежутке  $[t_i, t_{i+1}]$ , причём выделяемая из средств, ранее инвестируемых в

основной капитал,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Тогда на последующем промежутке времени технология, связанная с рассматриваемым производством, изменится и приведёт к изменению качества основных фондов, что отразится на увеличении коэффициента эластичности по фактору капитал, поэтому можно считать, что  $\alpha = \alpha_K(s_i F_i)$  - возрастающая функция. Таким образом, возникает задача оптимального управления, максимизируемым параметром в которой выступает величина  $K_n = K(t_n)$  - результат решения  $n$  задач Коши:

$$\left\{ \begin{array}{l} K(t_0) = K_0 - \text{начальное условие} \\ \text{для решения задачи Коши на отрезке } [t_0, t_1] \\ \alpha_i = \alpha_K(s_i F_i), L_i = L(t_i), F_i = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i} \quad i = 0, \dots, n-1, \\ K(t_i) = K_i, i = 1, \dots, n - \text{из решения} \\ \text{соответствующей задачи Коши :} \\ \frac{dK}{dt} = (\tilde{s} - s_{i-1}) A_{i-1} K^{\alpha_{i-1}}(t) L_{i-1}^{1-\alpha_{i-1}} - \mu K(t), t \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, n \\ s^* < s^{**}, s^*, s^{**} \in (0; 1) \\ \max_{(s_i)_{i=0}^{n-1}, s^* < s_i < s^{**}} K_n - ? \end{array} \right. \quad (1)$$

Можно считать, что для решения этой задачи необходимыми исходными данными являются только значение капитала и выпуска в начальный момент времени, поэтому эта задача относится к классу задач оптимального управления с закреплённым левым концом. Данная задача может быть решена методами покоординатного и градиентного спуска, методом случайного поиска (в отличие от алгоритмов, описанных, например, в [2]).

## 2. Алгоритм решения задачи оптимального управления (1) методом покоординатного спуска

Основные положения:

2.1. На входе: количество лет  $n$  (или промежутков времени), рассматриваемых в задаче; данные об объёме основных фондов  $K_i, i = 0, \dots, n-1$ , объёме трудовых ресурсов  $L_i, i = 0, \dots, n-1$ , объёме выпуска  $F_i, i = 0, \dots, n-1$ , объёме инвестиций в НИС  $V_i, i = 0, \dots, n-1$ , известные из статистических данных предельные величины  $s^*, s^{**}$ , необходимые для выбора элементов искомой последовательности, а так же величина  $\tilde{s}$  - общий объём инвестиций в основные фонды и НИС.

2.2. Обращение к вспомогательному блоку программного комплекса для получения аппроксимирующих функций:

а)  $\alpha = \alpha(V_i) = \alpha(s_i F_i), A = A(t), t = t_i, i = 0, \dots, n;$

б) по желанию пользователя можно получить  $L = L(t)$ , что позволяет использовать полученный алгоритм для корректировки инвестиционного процесса для момента времени  $t > t_n$ .

2.3. Применение процедуры покоординатного спуска:

а) сначала вычисляется начальное значение  $K_n^* = K_n((s_i)_{i=0}^{n-1})$ ,  $(s_i)_{i=0}^{n-1} : s_i = s^*$ , для этого используется отдельная подпрограмма-функция для вычисления итогового значения объёма основных фондов в зависимости от заданной последовательности  $(s_i)_{i=0}^{n-1}$ ;

б) дальнейшие шаги алгоритма состоят в последовательном изменении элементов последовательности  $(s_i)_{i=0}^{n-1}$ , так, чтобы выполнялось условие  $s^* < s_i < s^{**}$  и так, чтобы новое значение  $K_n((s_i)_{i=0}^{n-1}) > K_n^*$  и больше значения  $K_n$ , посчитанного на предыдущем шаге.

2.4. После проведения этой процедуры получаем на выходе некоторую последовательность  $(s_i)_{i=0}^{n-1}$ , соответствующую оптимальному значению  $K_n$ .

### 3. Алгоритм решения задачи оптимального управления (1) методом градиентного спуска

Пункты 3.1. и 3.2. аналогичны пунктам из предыдущего алгоритма.

3.3. а) В качестве начального значения  $K_0^*$  рассмотрим значение, соответствующее ситуации, когда все  $s_i, i=0, \dots, n-1$  фиксированы, т.е.  $s_i = s_i^*, i=0, \dots, n-1$ .

б) Т.к.  $K_n = K(t_n)$  - результат решения  $n$  задач Коши при указанных выше условиях, то вычисление градиента указанной функции в явном виде не представляется возможным. Опишем процедуру нахождения его численного значения. Величина частной производной  $K$  по  $i$ -той компоненте последовательности  $(s_i)_{i=0}^{n-1}$  в точке  $(\hat{s}_i)_{i=0}^{n-1}$  может быть приближённо вычислена по следующей конечно-разностной формуле:

$$\frac{\partial K_n}{\partial s_i} = \frac{K_n(\hat{s}_0, \dots, \hat{s}_{i-1}, \hat{s}_i + h, \hat{s}_{i+1}, \dots, \hat{s}_{n-1}) - K_n(\hat{s}_0, \dots, \hat{s}_{i-1}, \hat{s}_i, \hat{s}_{i+1}, \dots, \hat{s}_{n-1})}{h}$$

где  $h$  – некоторое малое число. Дальнейшие шаги алгоритма состоят в последовательном изменении элементов последовательности  $(s_i)_{i=0}^{n-1}$  в направлении градиента, так чтобы выполнялось условие  $s^* < s_i < s^{**}$ .

3.4. После проведения этой процедуры получаем на выходе некоторую последовательность  $(s_i)_{i=0}^{n-1}$ , соответствующую оптимальному значению  $K_n$ .

### 4. Программный комплекс «Моделирование распределения инвестиций в экономической системе»

Для реализации полученных эффективных алгоритмов создан исследовательский программный комплекс «Моделирование распределения инвестиций в экономической системе».

Данный программный комплекс предназначен для определения инвестиционной политики в некоторой экономической системе. Он состоит из двух блоков: вспомогательного и основного. На рисунке 1 представлена схема программного комплекса. Рассмотрим подробнее его отдельные элементы.

Основной блок связан с реализацией численных алгоритмов решения задачи оптимального управления, изложенных в разделах 2 и 3. Цель: используя исходные данные, харак-

теризующие деятельность рассматриваемой системы, получить набор параметров, оптимизирующих процесс инвестирования научно-исследовательского сектора.

В качестве исходных данных необходимо задать:

1)  $amu$  - коэффициент амортизации, или доля капитала, выбывающего с течением времени  
2)  $Ngod$  - количество лет в рассматриваемом периоде;

3) массив  $F$  – объём валового продукта за  $Ngod$  лет (в денежных единицах), иначе говоря, это выпуск данной экономической системы;

4) массив  $K$  - объём основных фондов за  $Ngod$  лет (в денежных единицах);

5) массив  $L$  - объём трудовых ресурсов за  $Ngod$  лет (в денежных единицах);

6) массив  $V$  (или  $aInv$ ) - объём средств, израсходованных на науку за  $Ngod$  лет (в денежных единицах).

Далее действия программы могут различаться:

А) по желанию пользователя можно далее при вычислениях пользоваться только статистическими данными, а аппроксимировать только  $alfa = alfa(aInv)$ ;

В) можно найти функции, аппроксимирующие значения  $A$  – коэффициента функции Кобба-Дугласа и  $L=L(t)$ . Аппроксимации строятся в дополнительном блоке с помощью стохастического метода минимизации функционала – метода глобального случайного поиска. При этом результаты работы этого блока можно выводить в отдельный файл или просто использовать при дальнейших вычислениях.

Предлагается три способа решения поставленной задачи: метод покоординатного спуска (алгоритм изложен в разделе 2), метод градиентного спуска (особенности реализации которого описаны в разделе 3), метод глобального случайного поиска - МГСП (является стандартным методом нахождения глобального максимума функционала). Для исключения ситуации закливания может быть использована, например, методология, описанная в [1] .

### Программный комплекс «Моделирование распределения инвестиций в экономической системе»



Рис. 1. Схема программного комплекса

Далее пользователь выбирает метод решения и получает следующие величины:

- 1) массив  $sn$  из  $Ngod$  элементов – доли выпуска, инвестируемые в научно-исследовательский сектор, приводящие к максимальному выпуску данной экономической системы;
- 2) результирующее значение выпуска  $K$  – оптимальное значение, соответствующее оптимизирующей последовательности  $sn$ .

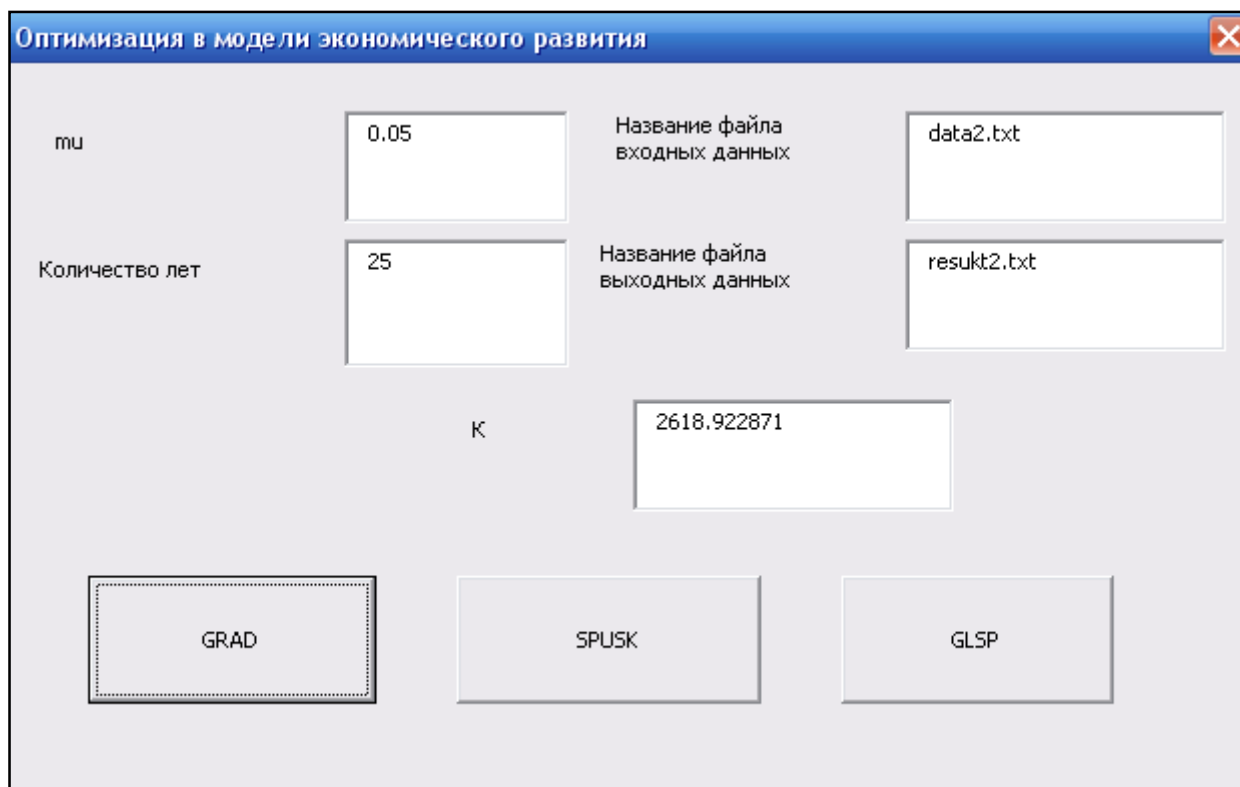


Рис. 2. Работа основного блока программного комплекса

## 5. Апробация программного комплекса

В таблице 1 приводятся результаты тестирования предложенных алгоритмов и созданного программного комплекса на данных по экономике нашей страны за 1961-1985 гг. Были обработаны следующие данные:  $K_i, i=0, \dots, n-1$  – основные фонды за каждый год (в млрд. руб.),  $L_i, i=0, \dots, n-1$  – объем трудовых ресурсов (пересчитанный через среднюю зарплату в млрд. руб.),  $F_i, i=0, \dots, n-1$  – валовой продукт (в млрд. руб.),  $V_i, i=0, \dots, n-1$  – расходы на науку из госбюджета и других источников (в млрд. руб.),  $n=25$ . Из статистических данных дополнительно были получены следующие параметры:  $\mu = 0.05$ ;  $s^* = 0.015$ ;  $s^{**} = \tilde{s} = 0.165$ . Во вспомогательном блоке программного комплекса были получены следующие аппроксимирующие функции:

$$\alpha_i = \frac{0.6 \cdot V_i + 0.615}{V_i + 6.95};$$

$$L(t) = 61 + 5t + 0.18t^2 - 0.0015t^3;$$

$$A(t) = 2.99 - 0.0363t.$$

Таблица 1

Изменение основного капитала в зависимости от инвестиционной политики

Годы	$s_i$ , $i=0, n-1$ , по стат. данным	Основные фонды, (в млрд. руб.), по стат. данным	$s_i$ , $i=0, \dots, n-1$ , по- лученные методом градиентного спуска	Основные фонды, (в млрд. руб.), полученные методом градиентного спуска
1961	0,015	442	0,0373	475
1962	0,015	477	0,0348	513
1963	0,015	515	0,0337	555
1964	0,015	557	0,0329	602
1965	0,015	601	0,0323	652
1966	0,015	649	0,0315	706
1967	0,015	700	0,0309	764
1968	0,015	757	0,0303	827
1969	0,015	814	0,0297	894
1970	0,015	860	0,0290	966
1971	0,015	914	0,0254	1043
1972	0,015	972	0,0280	1124
1973	0,015	1082	0,0275	1210
1974	0,015	1150	0,0270	1301
1975	0,015	1256	0,0266	1396
1976	0,015	1345	0,0262	1496
1977	0,015	1437	0,0257	1600
1978	0,015	1537	0,0254	1709
1979	0,015	1638	0,0250	1822
1980	0,015	1742	0,0246	1939
1981	0,015	1851	0,0243	2060
1982	0,015	1968	0,0240	2184
1983	0,015	2092	0,0237	2312
1984	0,015	2234	0,0232	2443
1985	0,015	2333	0,0213	2619

Таким образом, управляя инвестиционным процессом, и, выделяя на научные исследования и разработки указанные доли валового продукта, можно получить значение итогового накопления капитала равное 2619 млрд. руб. что на 12,25% превышает реальное значение капитала в 1985 году, которое составило 2333 млрд. руб.

Кроме того, созданный программный комплекс был апробирован на соответствующих статистических данных по регионам России. Например, получена аппроксимации необходимых функций по экономике Ростовской области за период с 1995 по 2007 г. На конкретном статистическом материале получилась следующая зависимость:

$$\alpha = \frac{bV_i + c}{V_i + d}, b = 0.4459, c = 0.0811, d = 2.493.$$

При этом, величина коэффициента детерминации  $R^2 = 0.9927$ . Поэтому данная формула приближения для коэффициента эластичности по фактору капитал обладает очень высокой точностью.

## 6. Выводы

Результаты работы комплекса, созданного в среде программирования *Visual Studio 2008* с использованием языка программирования *C++*, сравнивались, во-первых, со стандартными методами в среде *Maple*, при этом точность построенного решения оказалась сопоставимой (относительная погрешность не выше  $10^{-3}$ ), однако время вычисления в среде *C++* в 5-10 раз быстрее, в зависимости от количества значащих цифр (от 4 до 6); во-вторых, с прямым методом полного перебора (при сопоставимой точности время счёта в предложенных алгоритмах так же сокращается на порядок).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бурякова Н.А., Чернов А.В. Методология обнаружения заикливания фрагментов программ на основе верификации моделей // Обозрение прикладной и промышленной математики. – М., т.17, вып. 3, 2010. С.387-388.
2. Назарько О.В., Павлов И.В. Рекуррентный метод построения слабых деформаций по процессу плотностей в рамках модели стохастического базиса, снабжённого специальной хааровской фильтрацией. // Вестник РГУПС, 2012, N 1.
3. Сайфутдинова Н.А. Оптимальное управление в модели эндогенного роста замкнутых экономических систем // Вестник ДГТУ, 2008, Т. 8, N 4(39) - С. 366-375.