

Интернет-журнал «Науковедение» ISSN 2223-5167 <http://naukovedenie.ru/>

Том 8, №3 (2016) <http://naukovedenie.ru/index.php?p=vol8-3>

URL статьи: <http://naukovedenie.ru/PDF/54TVN316.pdf>

Статья опубликована 14.06.2016.

Ссылка для цитирования этой статьи:

Миронов С.Н. Математическое моделирование волнового фронта внеосевого параболического зеркала // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 8, №3 (2016) <http://naukovedenie.ru/PDF/54TVN316.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 514.83

Миронов Сергей Николаевич

НОУ ВО «Московский технологический институт», Россия, Москва¹

Аспирант

Специалист

E-mail: miroнов.sergei.n@gmail.com

Математическое моделирование волнового фронта внеосевого параболического зеркала

Аннотация. Математические модели различных оптических элементов позволяют анализировать их свойства преобразования различного излучения, что находит применение в различных областях науки и техники. Разработанная и усовершенствованная математическая модель внеосевого 90° параболического зеркала позволяет формировать распределение комплексного волнового поля. Модель основана на векторно-лучевом принципе описания построения хода луча через оптическую систему, использует только операции над векторами и закон отражения, что позволяет полностью автоматизировать алгоритм расчета в любом математическом программном обеспечении. Сам векторно-лучевой принцип легко представляется человеком без помощи специального программного обеспечения, что позволяет применять его к практически любым оптическим элементам. Алгоритм отличается простотой и гибкостью, что позволяет не только получать точные фазы распределения, но и быстро оценивать их без построения нового распределения с высокой степенью точности. Приведены подробные этапы алгоритма расчета модели оптимизированные для не символьных математических пакетов. Проанализированы некоторые свойства модели. Продемонстрированы примеры построения распределения набега фаз для различных смещений источника из фокуса зеркала с различным количеством точек, рассчитанные на среднестатистическом компьютере. Приведена формула для построения комплексного волнового поля.

Ключевые слова: внеосевое параболическое зеркало; математическая модель; оптическая система; векторно-лучевой принцип; комплексное волновое поле

Введение

Математическое моделирование оптических элементов позволяет проводить исследования и получать результаты непосредственно за персональным компьютером, что уменьшает расходы на оборудование и позволяет прогнозировать результаты лабораторных

¹ 140081, Россия, МО, г. Лыткарино, ул. Коммунистическая, д. 56, к. 24

экспериментов с высокой точностью. Существует множество программ для компьютерного моделирования как различных оптических элементов, так и оптических эффектов. Так же существуют различные приближения рассмотрения моделей, характеризующиеся различной точностью описания моделей. Векторно-лучевая модель является самой простой, но и она позволяет успешно моделировать комплексные волновые поля, что в свою очередь позволяет прогнозировать и анализировать аберрации оптического элемента.

В данной статье рассматривается математическая векторно-лучевая модель 90° внеосевого параболического зеркала. Приведены результаты исследования изменения распределения фазового набега, а так же некоторые свойства модели. Результаты исследований, касающиеся подобных оптических элементов, обычно обладают некой сложностью при генерации или оценке распределения фазы, а, значит, и аберраций [1-3]. В связи с этим автор ставил перед собой цель разработки именно простой и понятной модели, которая позволит не только исследовать аберрации, но и устранять их путем внесения предискажений в пространстве частот при моделировании комплексного волнового поля объекта, что позволило бы приблизиться к теоретическому порогу дифракционного ограничения оптического разрешения оптических систем [4, 5].

Цель настоящей работы – усовершенствование разработанной модели, которая демонстрирует изменение комплексного волнового поля, подробное описание этапов математического моделирования, демонстрация скорости вычисления комплексных волновых полей, анализ свойств модели.

Актуальность данной работы подтверждается различными исследованиями в областях перспективных для применения математического представления внеосевых параболических зеркал: голографии, спектроскопии, микроскопии, автоматизации проектирования [4-11]. Следует так же упомянуть известные программы для проектирования оптических элементов, такие как Zemax и OSLO. Возможность использования их математических моделей зеркал существует достаточно давно, но оно в основном связано с автоматизированным проектированием оптических систем, что неудобно для исследований и научного анализа по причине недоступности кода программного обеспечения и математических вычислений, которые не описываются в инструкциях к программам.

Автор на первом этапе исследований построил модель внеосевого параболического зеркала в программе Zemax, рисунок 1а., но не нашел способа экспортировать оттуда необходимую информацию о распределении фазовой компоненты комплексного поля, которая представляет наибольший интерес, так же как и соответствующие ей координаты математической плоскости регистрации. В связи с этим была разработана собственная векторно-лучевая модель в программе MATLAB, рисунок 1б, скорость работы которой была мала по причине решения систем уравнений, использующихся в модели в символьном виде. Математическое представление отличалось простотой, интуитивной понятностью, и использовало законы аналитической геометрии и оптики. В данной статье автор усовершенствовал порядок, расширил апертуру оптического элемента для анализа распределения фазы, проанализировал изменение фазы при сдвиге источника излучения из фокуса внеосевого параболического зеркала.

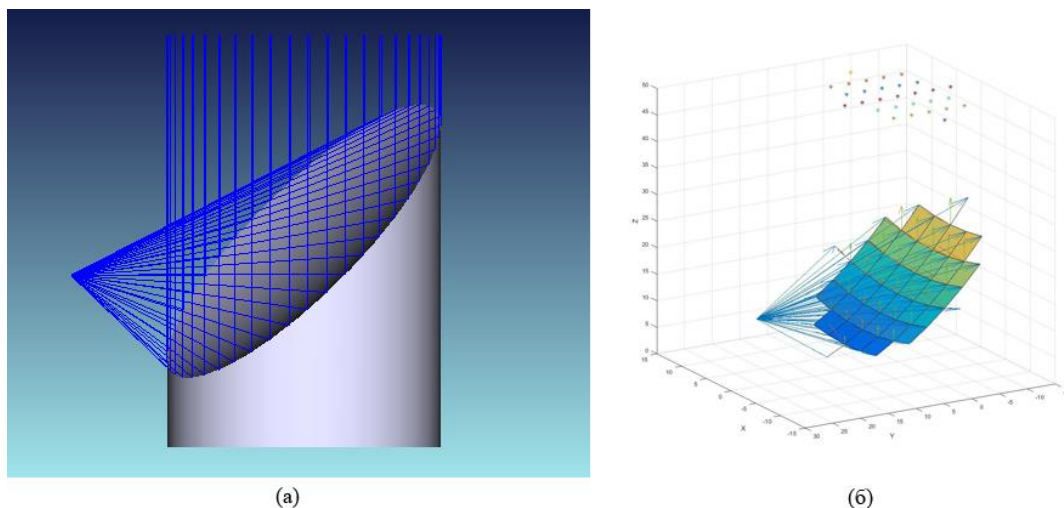


Рисунок 1. Иллюстрация построения модели внеосевого 90° параболического зеркала, (а) - в программе Zemax, (б) - в программе MATLAB, где x, y, z – система координат модели (рисунок автора)

Математическое описание модели

Для создания модели была выбрана трехмерная система координат, которая наиболее часто используется в программах автоматизированного проектирования [12], рисунок 2б. В качестве прототипа математической модели было взято реальное внеосевое 90° параболическое зеркало (далее параболоид) с фокусным расстоянием $f=12.7$ мм и диаметром $d=25.4$ мм производства Edmund Optics. Пусть параболоид задается уравнением:

$$Z = \frac{C \cdot X^2 + C \cdot (Y - 25.4)^2}{2}, \quad (1)$$

где: C – коэффициент параболоида равный 0.039, взятый из чертежа реального внеосевого 90° параболического зеркала, на основе которого проводился эксперимент в [6];

X, Y, Z – координаты модели в мкм.

Тогда зададим точку, из которой на параболоид будет падать пучок лучей с координатами по трем осям $E(E_x, E_y, E_z)$. На параболоиде задается равномерная двумерная сетка, в каждую точку которой M_{ij} , где i, j – порядковые номера, будут падать лучи из точки источника E . По сути, в модели именно эта сетка и визуализирует параболоид. Далее для простоты будем рассматривать одну точку $M(M_x, M_y, M_z)$.

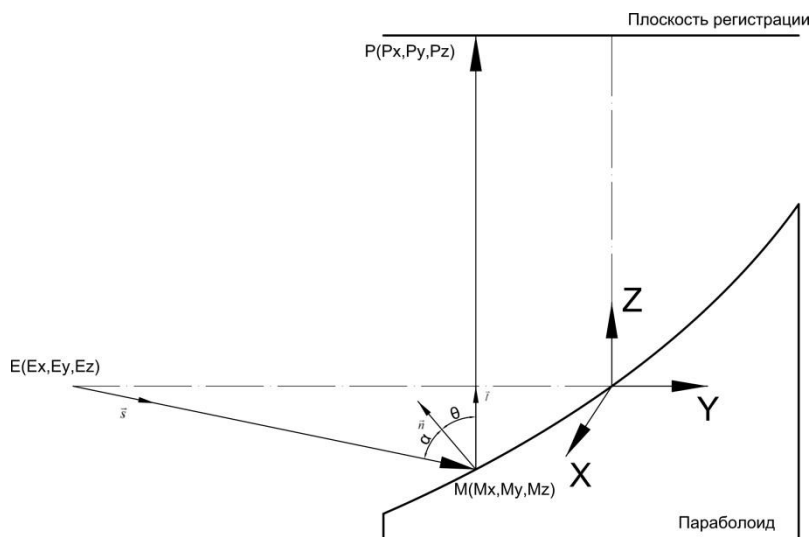


Рисунок 2. Схема хода произвольного луча в математической модели внеосевого 90° параболического зеркала с указанием векторов определяющих лучи падения, отражения и нормаль, направления координатных осей (рисунок автора)

Для определения фазы луча нам необходимо определить его полную длину, которая рассчитывается путем определения расстояния от источника до парабооида и от парабооида до плоскости регистрации. На рисунке 2 изображена схема полного пути произвольного луча - EMP. Таким образом необходимо найти точку пересечения отраженного луча от парабооида с плоскостью регистрации P. Для этого по закону Снеллиуса необходимо найти отраженный луч, который, как известно, будет лежать в той же плоскости, что падающий и нормаль [13]. Блок схема алгоритма математических действий для каждой точки представлена на рисунке. Алгоритм разработан и будет описан для удобства реализации в программе MATLAB или другом не символьном математическом программном обеспечении.

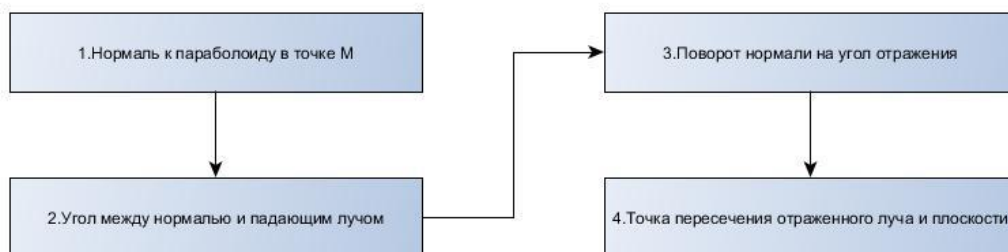


Рисунок 3. Алгоритм математических действий для поиска точки $P_{ij}(Px, Py, Pz)$ пересечения отраженного луча и плоскости регистрации (рисунок автора)

1. Для поиска нормали \vec{n} обозначим уравнение 1 через $f(x,y,z)=0$. В точке M компоненты нормали $\vec{n}(nx, ny, nz)$ определяются из частных производных:

$$nx = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \Big|_M \tag{2}$$

$$ny = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \Big|_M \tag{3}$$

$$nz = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \Big|_M \tag{4}$$

2. Находим угол α между вектором \vec{s} , определяющим направление падения луча из точки E в точку M на параболоиде, и нормалью \vec{n} по известной формуле скалярного произведения векторов [12]:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{s} \cdot \vec{n}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|}, \quad (5)$$

Вектор $\vec{s}(sx, sy, sz)$ находим по формуле:

$$sx = Mx - Ex, sy = My - Ey, sz = Mz - Ez \quad (6)$$

3. Для поворота нормали \vec{n} на угол падения α вычисляем вектор \vec{p} , который был бы перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора \vec{s} и \vec{n} . Такой вектор определяем по известной формуле векторного произведения [12]:

$$\vec{p} = \vec{s} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ sx & sy & sz \\ nx & ny & nz \end{pmatrix} \quad (7)$$

Затем находим вектор $\vec{l}(lx, ly, lz)$, который определяет направление луча отражения в точке M . Для этого обозначаем угол отражения $\theta = \alpha$ и вычисляем матрицу поворота:

$$Mp = \begin{pmatrix} \cos \theta + (1 - \cos \theta) \cdot vx^2 & (1 - \cos \theta) \cdot vx \cdot vy - \sin \theta \cdot vz & (1 - \cos \theta) \cdot vx \cdot vz + \sin \theta \cdot vy \\ (1 - \cos \theta) \cdot vy \cdot vx + \sin \theta \cdot vz & \cos \theta + (1 - \cos \theta) \cdot vy^2 & (1 - \cos \theta) \cdot vy \cdot vz - \sin \theta \cdot vx \\ (1 - \cos \theta) \cdot vz \cdot vx + \sin \theta \cdot vy & (1 - \cos \theta) \cdot vz \cdot vy - \sin \theta \cdot vx & \cos \theta + (1 - \cos \theta) \cdot vz^2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где vx, vy, vz – компоненты единичного вектора \hat{v} , определяемого $\hat{v} = \frac{p}{|p|}$, p – нормированный вектор.

Тогда вектор \vec{l} мы находим по формуле:

$$\vec{l} = \vec{n} \cdot Mp \quad (9)$$

4. На последнем этапе остаётся найти точку пересечения отраженного луча, определяемого вектором $\vec{l}(lx, ly, lz)$ и точкой M , и математической плоскости регистрации. Для этого составляем систему уравнений, в которую входят уравнения прямой заданной через параметр t и уравнение плоскости:

$$\begin{cases} lx = Mx + sx \cdot t \\ ly = My + sy \cdot t \\ lz = Mz + sz \cdot t \\ z = h = lz \end{cases} \quad (10)$$

Общий вид решения системы линейных уравнений (10):

$$t = \frac{h - Mz}{sz}, lx = \frac{h \cdot sx - sx \cdot Mz + sz \cdot Mx}{sz}, ly = \frac{h \cdot sy - sy \cdot Mz + sz \cdot My}{sz}, lz = h \quad (11)$$

Дополнительно стоит прокомментировать уравнение плоскости регистрации $z=h$, где h – расстояние от нуля координат по OZ в мм, которая выбирается аналитически из удобства расчета, например, $h=50$ мм.

Приведенный алгоритм необходимо повторить для всех узловых точек M_{ij} сетки на параболоиде, именно путем задания числа этих точек и определяется время расчета комплексного поля. Для всех лучей от источника необходимо найти полную длину пути для каждого луча из рисунка 2 по формуле:

$$L_{ij} = \sqrt{(Mx - Ex)^2 + (My - Ey)^2 + (Mz - Ez)^2} + \sqrt{(Px - Mx)^2 + (Py - My)^2 + (Pz - Mz)^2} \quad (12)$$

Для получения распределения фазы φ_{ij} по плоскости регистрации все длины умножить на волновое число $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$, где λ – длина волны лазерного излучения, в нашем случае $\lambda = 555 \cdot 10^{-6}$ мм:

$$\varphi_{ij} = L_{ij} \cdot k \quad (12)$$

Примеры построения распределения фазы по плоскости регистрации в зависимости от смещения источника приведены на рисунке 4.

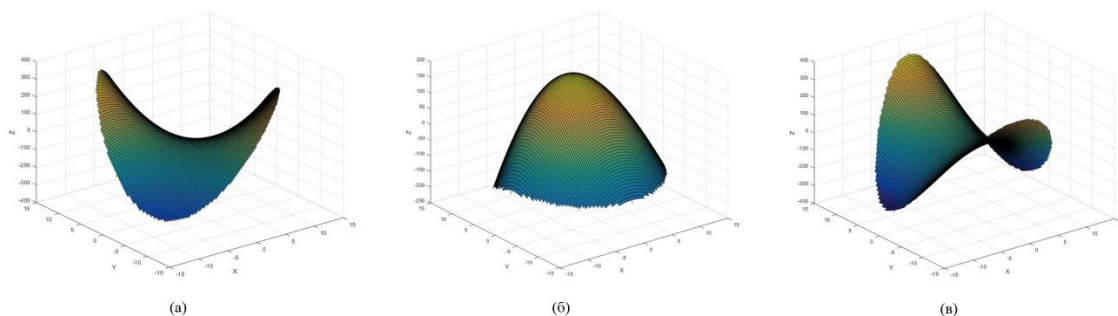


Рисунок 4. Примеры распределения фазы в зависимости от смещения источника из фокуса, (а) – смещение источника по OX на 0.25 мм, (б) – смещение источника по OY на 0.25 мм, (в) – смещение источника по OZ на 0.25 мм. На рисунке OX , OY – оси плоскости регистрации, OZ – величина набега фазы в рад (рисунок автора)

Для расчета комплексного волнового поля необходимо задать распределение амплитуды A_{ij} , что может сделать константа или некий амплитудный транспарант, при условии, что излучение от транспаранта сфокусировано в фокус параболоида. В этом случае формула комплексного волнового поля \tilde{F} будет выглядеть следующим образом:

$$\tilde{F}_{ij} = A_{ij} \cdot e^{I \cdot \varphi_{ij}}, \quad (13)$$

где I – мнимая единица.

На компьютере (Intel Core i3 540, 8 Гб ОЗУ 1333 МГц) время расчета различного количества точек представлено в таблице 1.

Таблица 1

Время расчета распределения фазы модели

Количество точек на параболоиде, шт	Время расчета распределения фазы, с
100 x 100	11
500 x 500	14
1000 x 1000	44
1500 x 1500	99
3000 x 3000	375

Модель позволяет удобно и быстро оценить распределение фазы в плоскости регистрации. Некоторые свойства модели, найденные после анализа изменения распределения поля фазового набега, позволяют упростить вычисления и с определённой погрешностью оценить аберрации в зависимости от произвольного смещения.

Симметрия относительно ОХ позволяет рассчитывать распределение фазы ровно в два раза быстрее. На рисунке 5 представлены результаты расчёта симметричных смещений - их разность наглядно демонстрирует полное совпадение распределения фаз.

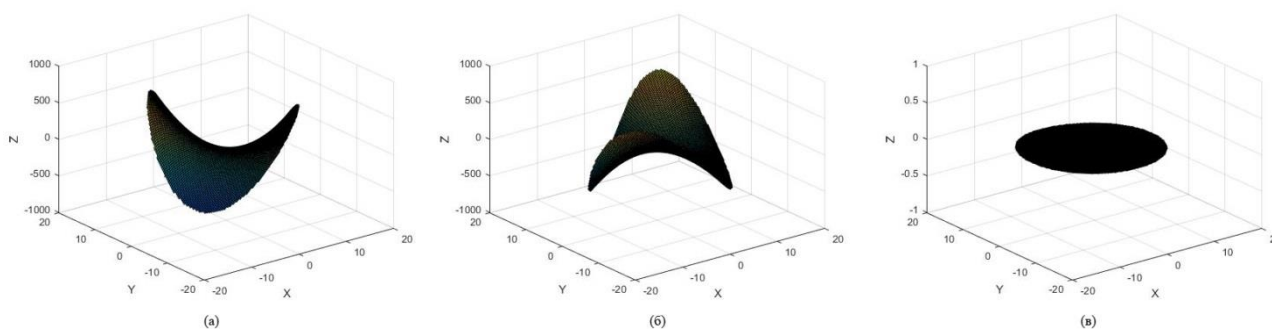


Рисунок 5. Смещение источника излучения по ОХ в системе координат модели с устранением наклона распределения фазы, (а) – на 0.5 мм, (б) – на -0.5 мм, (в) – разность двух распределений фазы с учетом их положения. На рисунке ОХ, ОУ – оси плоскости регистрации, ОZ – величина набега фазы в рад (рисунок автора)

Заключение

Данная модель, основанная на векторно-лучевом принципе описания хода лучей в оптической системе, является мощным средством для анализа и оценки аберраций путем моделирования распределения набега фазы. С помощью этого принципа можно моделировать практически любые оптические системы и исследовать их с высокой точностью. Принцип крайне прост, легко представляется человеком без помощи компьютерных средств моделирования, легко автоматизируется и оптимизируется, что позволяет быстро генерировать распределения для оценки аберраций. Самое главное - такой подход к представлению оптических систем позволяет вычислять искажения фазы путём сдвига источника для последующего её вычитания из реального распределения фазового набега, полученного из реальной оптической системы, тем самым достигая предельного качества изображений, что крайне актуально для различных областей науки и техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Gomez-Vieyra, D. Malacara-Hernandez. Geometric theory of wavefront aberrations in an off-axis spherical mirror. *APPLIED OPTICS*, Vol. 50, No. 1, 2011.
2. A. Gomez-Vieyra¹, D. Malacara-Hernandez, J. Cesar, C.A. Vargas. The wavefront aberrations in off-axis spherical mirror with object point or image point. *Optical Systems Design*, SPIE Vol. 8550, 2012.
3. P. Arguijo, M.S. Scholl. Exact ray-trace beam for an off-axis paraboloid surface. *APPLIED OPTICS*, Vol. 42, No. 16, 2003.
4. А.Е. Штанько, Г.С. Каленков, С.Н. Миронов, Ю.В. Шелдакова. Компенсация aberrаций внеосевых параболических зеркал средствами цифровой голографии. *Измерительная техника №8*, 2015, с. 16-19.
5. Г.С. Каленков, С.Н. Миронов, А.Е. Штанько. Моделирование волновых aberrаций высокоапертурной зеркальной оптики. IV Международная конференция по фотонике и информационной оптике. Сборник научных трудов. М.: НИЯУ МИФИ, 2015. ISBN 978-5-7262-2053-6, с. 362-363.
6. С.А. Родионов, А.А. Шехонин. Математические модели оптических поверхностей при автоматизированном проектировании. *Изв. вузов. Приборостроение*. - 1996 - Том 39. №2. с. 99-103.
7. H.U. Yang, E. Hebestreit, E.E. Josberger, M.B. Raschk. A cryogenic scattering-type scanning near-field optical microscope. *Rev. Sci. Instrum.* 84, 023701 (2013).
8. K. Braun, D. Zhang, X. Wang, J. Mihaljevic, A.J. Meixner. «Novel Parabolic Mirror Microscope Illuminated with Cylindrical Vector Beams for Confocal and Tip Enhanced Super Resolution Imaging» *Fringe 2013*. Springer Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-36358-0, с. 791-796.
9. A. Lylova, G. Kalenkov, J. Sheldakova, S. Kalenkov, A. Kudryashov, A. Shtanko. Measurements of parabolic mirrors aberrations in hyperspectral microscope. *Proc. of SPIE Vol.* 9641.
10. Г.С. Каленков, С.Г. Каленков, А.Е. Штанько. Гиперспектральная голографическая фурье-микроскопия. *Квантовая электроника*, 45, №4, 2015, с. 333-338.
11. G.S. Kalenkov, S. Kalenkov, A. Shtanko. "Hyperspectral Holographic Fourier-Microscopy", in *Imaging and Applied Optics 2014*, OSA Technical Digest, Optical Society of America, 2014, paper DTh3B.7.
12. А.Н. Канатников, А.П. Крищенко. Аналитическая геометрия. МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва 2000, ISBN 5-7038-1671-8, с. 56-66, 78-80, 164-169.
13. М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. Издание 2-е исправленное. НАУКА, Москва 1973, с. 189-196, 129.

Mironov Sergey Nikolaevich

Moscow technological institute, Russia, Moscow

E-mail: mironov.sergei.n@gmail.com

Off-axis parabolic wave front mathematical modeling

Abstract. Mathematical models of various optical elements allow you to analyze the properties of different conversion radiation, which finds application in different fields of science and technology. Developed and improved mathematical model 90° off-axis parabolic mirror, allows you to create complex distribution of the wave field. The model is based on the vector-ray description of principle construction the ray path through the optical system, uses only operations on vectors and the law of reflection, that allows you to completely automate the calculation algorithm in any mathematical software. Vector-beam principle imagines easy for man without the help of special software, that allows applying it to virtually any optical elements. The algorithm distinguishing of is simplicity and flexibility, that allows not only obtaining the exact phases of distribution, but also quickly assess them without constructing a new distribution with high degree of accuracy. Provided detailed phases of the algorithm for calculating model optimized for non-symbolic mathematical packages. Demonstrated an examples of construction of the distribution phase incursion for various parallax of source from mirror focus with a different number of points, calculated on an average computer. Cited the formula for the construction of complex wave field.

Keywords: off-axis parabolic mirror; mathematical model; optical system; vector-ray principle; complex wave field

REFERENCES

1. A. Gomez-Vieyra, D. Malacara-Hernandez. Geometric theory of wavefront aberrations in an off-axis spherical mirror. *APPLIED OPTICS*, Vol. 50, No. 1, 2011.
2. A. Gomez-Vieyra¹, D. Malacara-Hernandez, J. Cesar, C.A. Vargas. The wavefront aberrations in off-axis spherical mirror with object point or image point. *Optical Systems Design*, SPIE Vol. 8550, 2012.
3. P. Arguijo, M.S. Scholl. Exact ray-trace beam for an off-axis paraboloid surface. *APPLIED OPTICS*, Vol. 42, No. 16, 2003.
4. A.E. Shtan'ko, G.S. Kalenkov, S.N. Mironov, Yu.V. Sheldakova. Kompensatsiya aberratsiy vneosevykh parabolicheskikh zeral sredstvami tsifrovoy golografii. *Izmeritel'naya tekhnika* №8, 2015, c. 16-19.
5. G.S. Kalenkov, S.N. Mironov, A.E. Shtan'ko. Modelirovanie volnovykh aberratsiy vysokoaperturnoy zerkal'noy optiki. IV Mezhdunarodnaya konferentsiya po fotonike i informatsionnoy optike. *Sbornik nauchnykh trudov*. M.: NIYaU MIFI, 2015. ISBN 978-5-7262-2053-6, s. 362-363.
6. S.A. Rodionov, A.A. Shekhonin. Matematicheskie modeli opticheskikh poverkhnostey pri avtomatizirovannom proektirovanii. *Izv. vuzov. Priborostroenie*. - 1996 - Tom 39. №2. c. 99-103.
7. H.U. Yang, E. Hebestreit, E.E. Josberger, M.B. Raschk. A cryogenic scattering-type scanning near-field optical microscope. *Rev. Sci. Instrum.* 84, 023701 (2013).
8. K. Braun, D. Zhang, X. Wang, J. Mihaljevic, A.J. Meixner. «Novel Parabolic Mirror Microscope Illuminated with Cylindrical Vector Beams for Confocal and Tip Enhanced Super Resolution Imaging» *Fringe 2013*. Springer Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-36358-0, c. 791-796.
9. A. Lylova, G. Kalenkov, J. Sheldakova, S. Kalenkov, A. Kudryashov, A. Shtanko. Measurements of parabolic mirrors aberrations in hyperspectral microscope. *Proc. of SPIE* Vol. 9641.
10. G.S. Kalenkov, S.G. Kalenkov, A.E. Shtan'ko. Giperspektral'naya golograficheskaya fur'e-mikroskopiya. *Kvantovaya elektronika*, 45, №4, 2015, c. 333-338.
11. G.S. Kalenkov, S. Kalenkov, A. Shtanko. "Hyperspectral Holographic Fourier-Microscopy", in *Imaging and Applied Optics 2014*, OSA Technical Digest, Optical Society of America, 2014, paper DTh3B.7.
12. A.N. Kanatnikov, A.P. Krishchenko. *Analiticheskaya geometriya*. MGTU im. N.E. Baumana, Moskva 2000, ISBN 5-7038-1671-8, c. 56-66, 78-80, 164-169.
13. M. Born, E. Vol'f. *Osnovy optiki*. Izdanie 2-e ispravlennoe. NAUKA, Moskva 1973, s. 189-196, 129.