УДК 534.222:629.127.4

Алифанов Роман Николаевич
ФГБОУ ВПО «Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет»
Россия, Владивосток[1]
Доцент, кандидат технических наук
E-Mail: gidra_518@mail.ru

Карпачев Александр Афанасьевич
Военный учебно-научный центр Военно-Морского флота
«Военно-морская академия имени Адмирала Флота Советского Союза Н.Г. Кузнецова»
Филиал Владивосток
Профессор, доктор технических наук
E-Mail: K327065@yandex.ru

Стародубцев Павел Анатольевич
Военный учебно-научный центр Военно-Морского флота
«Военно-морская академия имени Адмирала Флота Советского Союза Н.Г. Кузнецова»
Филиал Владивосток
Профессор, доктор технических наук
E-Mail: spa1958@mail.ru

Использование дробного интегро-дифференцирования в уравнениях электродинамики материальных сред

Аннотация: В статье кратко представлен анализ основных исторических вех формирования теории динамических процессов. Он показал, что в настоящее время явно ощущается недостаточность традиционных физических моделей, потому что полное описание процессов современной обработки сигналов и полей невозможно с помощью формул классической математики, полученных на основе представления сигналов в пространствах целочисленных мер и гладких функций. Для устранения данных недостатков и в связи с созданием Б. Мандельбротом общей концепции фракталов у многих ученых возникла мысль о применении их в области радиофизики и радиолокации. А использование идей масштабной инвариантности – «скейлинга» и разделов современного функционального анализа, которые связаны с теорией множеств, теорией дробной размерности, общей топологией, геометрической теорией меры и теорией динамических систем, дополнительно открыло большие потенциальные возможности и новые перспективы в обработке многомерных сигналов и в родственных научных и технических областях, таких как нелинейная гидроакустика. Для применения формул классической математики, полученных на основе представления сигналов в пространствах целочисленных мер и гладких функций, авторами статьи предложен математический аппарат использования дробного интегро-дифференцирования в уравнениях электродинамики материальных сред. В его основу при дробном исчислении положены интегро-дифференциальные операторы Римана-Лиувилля и Капуто. При решении задачи анализа свойств электромагнитного поля в диэлектрике необходимо учитывать влияние фрактальных свойств движения зарядов в диссипативной среде на создаваемое электромагнитное поле и порядок дробного полинома, который определяет не только фрактальные свойства движения зарядов, но и, в некотором смысле, характеризует фрактальность исследуемой диссипативной среды.

Ключевые слова: Фракталы; скейлинг; дробное интегро-дифференцирование.

Идентификационный номер статьи в журнале 55TVN114

[1] 690087, г. Владивосток Ул. Луговая 52В - 501

Roman Alifanov
The Far Eastern State Technical Fishery University”
Russia, Vladivostok
E-Mail: gidra_518@mail.ru

Alexander Karpachev
Military educational centre of science of Navy fleet
«the Naval academy of a name of Admiral of Fleet of Soviet Union of N.G.Kuznetsova »
Branch Vladivostok
Russia, Vladivostok
E-Mail: K327065 @yandex.ru

Paul Starodubtsev
Military educational centre of science of Navy fleet
«the Naval academy of a name of Admiral of Fleet of Soviet Union of N.G.Kuznetsova »
Branch Vladivostok
Russia, Vladivostok
E-Mail: spa1958@mail.ru

Use of fractional ntegrated-differentiation in the equations of electrodynamics of material environments

Abstract: The paper briefly presents an analysis of the major historical milestones formation of the theory of dynamic processe. He showed that at the moment is clearly a failure of traditional models of physical, because a complete description of the processes of modern signal processing fields, and it is impossible with the aid of classical mathematics, obtained on the basis of representation of signals in spaces integral measures and smooth functions. To address these deficiencies and in connection with the creation of the general concept by B. Mandelbrot fractals many scientists had the idea of applying them in the field of radio and radar. And the use of the ideas of scale invariance - " scaling" and sections of modern functional analysis, are associated with set theory, the theory of fractional dimensionality, general topology, geometric measure theory and the theory of dynamical systems, further opened up great potential and new perspectives in the treatment of multidimensional signals and related scientific and technical areas, such as nonlinear hydroacoustics. For the application of formulas of classical mathematics of the obtained on the basis of representation of signals in spaces of integral -represented measures and smooth functions, the authors proposed the mathematical apparatus of the use of fractional integro- differential equations of electrodynamics in material media. It is based on the fractional calculus put integrodifferential operators Riemann-Liouville and Caputo. In solving the problem analysis of the properties of the electromagnetic field in the dielectric is necessary to consider the effect of fractal properties of the motion of charges in a dissipative medium to create an electromagnetic field, and my order fractional polynomial, which determines not only the fractal properties of the motion of the charges, but also, in some sense, fractal study characterizes the dissipative environment.

Keywords: Fractals; self similarity; fractional ntegrated-differentiation.

Identification number of article 55TVN114

Введение

Стационарные режимы и периодические движения долгое время считались единственно возможными состояниями.

Однако открытия второй половины XX-го века кардинально изменили наше представление о характере динамических процессов. В настоящее время явно ощущается недостаточность традиционных физических моделей, потому что полное описание процессов современной обработки сигналов и полей невозможно с помощью формул классической математики, полученных на основе представления сигналов в пространствах целочисленных мер и гладких функций [1-3].

В конце двадцатого века в связи с созданием Б. Мандельбротом общей концепции фракталов [1] возникла мысль о применении их в области радиофизики и радиолокации. Использование идей масштабной инвариантности – «скейлинга» и разделов современного функционального анализа, которые связаны с теорией множеств, теорией дробной размерности, общей топологией, геометрической теорией меры и теорией динамических систем, открывает большие потенциальные возможности и новые перспективы в обработке многомерных сигналов и в родственных научных и технических областях, таких как нелинейная гидроакустика.

Основная часть

В [4] представлен один из первых способов введения дробного интегро-дифференцирования в основные уравнения электродинамики материальных сред. В этой работе при дробном исчислении используются интегро-дифференциальные операторы Римана-Лиувилля и Капуто [4]. Оператор дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in R$ с началом в точке s функции $y(t)$ представляется в следующем виде:

$$D_{st}^{\alpha} y(t) = sign^n(t-s)\frac{d^n}{dt^n} D_{st}^{\alpha-n} y(t), \quad n-1 < \alpha \le n, \quad n \in N, \quad \alpha > 0\,,$$

$$D_{st}^{\alpha} y(t) = \frac{sign(t-s)}{\Gamma(-\alpha)} \int_s^t \frac{y(\theta)}{|t-\theta|^{\alpha+1}} d\theta, \quad \Gamma(x) - гамма - функция Эйлера, \quad \alpha < 0\,,$$

$$D_{st}^{\alpha} y(t) = 0, \quad \alpha = 0\,.$$

Оператор Капуто (регуляризованная дробная производная) определяется

с помощью равенства

$$\partial_{0t}^{\alpha} y(t) = sign^n(t-s) D_{st}^{\alpha-n} \frac{d^n}{dt^n} y(t), \quad n-1 < \alpha \le n, \quad n \in N, \quad \alpha > 0\,.$$

Связь между операторами Римана-Лиувилля и Капуто дается соотношением

$$\partial_{0t}^{\alpha} y(t) = D_{st}^{\alpha} y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(s)}{\Gamma(k+1-\alpha)}, \quad n-1 < \alpha \le n, \quad n \in N, \quad \alpha > 0\,. \tag{1}$$

Если выполняется равенство $y^{(k)}(s) = 0$, то операторы Римана-Лиувилля и Капуто тождественны. При целочисленном значении параметра α эти операторы также совпадают между собой и совпадают с обычными производными целого порядка.

В то же время в [5] вводится понятие $d-$ оператора порядка $s \geq 0$, действующим над множеством степенных функций x^q, для которых выполняются условия: $s, q, x \in R,\ |s|, |q| = const < \infty$:

$$d^{-s}x : x^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1-s)} x^{q-s}, q \notin N^-, q-s \notin N^-. \tag{2}$$

Очевидно, что данный оператор также является оператором дробного интегро - дифференцирования.

В [5] получена система уравнений Максвелла в дробных производных с использованием оператора Капуто. Заменим в данных уравнениях оператор Капуто на $d-$ оператор порядка $s \geq 0$:

$$rot\ \mathbf{E} = -\frac{1}{\tau} d^{-s}t : \mathbf{B}; \quad div\ \mathbf{B} = 0 \ ; \tag{3}$$

$$rot\ \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{1}{\tau} d^{-s}t : \mathbf{D}; \quad div\ \mathbf{D} = \rho \ ; \tag{4}$$

и материальные уравнения среды [6]:

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}\ ;\ \mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ - напряженность электрического поля, $В/м$;

$\mathbf{B}$ - магнитная индукция, $Вб/м^2\ (кг \cdot c^{-2} \cdot A)$;

$\mathbf{H}$ - напряженность магнитного поля, $А/м$;

$\mathbf{D}$ - электрическая индукция, $Кл/м^2$;

$\mathbf{j}$ - плотность тока, $Кл/м^2$;

ρ - плотность тока проводимости, $Кл/м^2$;

τ - калибровочный коэффициент для дробной производной;

ε_0 - электрическая постоянная, $Ф/м$;

ε - относительная диэлектрическая проницаемость среды;

μ_0 - магнитная постоянная, $Гн/м$;

μ - относительная магнитная проницаемость среды.

Векторный потенциал $\mathbf{A}$ вводится стандартно:

$$\mathbf{B} = rot\ \mathbf{A}.$$

Подстановка данного выражения в уравнение (3), приводит к формулам:

$$rot\ \mathbf{E} = -\frac{1}{\tau} d^{-s}t : (rot\ \mathbf{A}) = -\frac{1}{\tau} rot\ d^{-s}t : \mathbf{A} = rot\left(-\frac{1}{\tau} d^{-s}t : \mathbf{A}\right); \quad div\left(rot\ \mathbf{A}\right) = 0 .$$

Отсюда следует, что

$$rot\left(\mathbf{E}+\frac{1}{\tau}d^{-s}t:\mathbf{A}\right)=0\,.$$

Так как ротор от градиента любой скалярной функции φ равен нулю, то выражение в скобках равно градиенту этой функции, т.е.

$$\left(\mathbf{E}+\frac{1}{\tau}d^{-s}t:\mathbf{A}\right)=\nabla\varphi,\ \text{или}\ \mathbf{E}=-\frac{1}{\tau}d^{-s}t:\mathbf{A}+\nabla\varphi,$$

где φ - скалярный потенциал. Далее в уравнениях (4) векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}$ заменяются на их выражения через векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$. В свою очередь, векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ заменяются на векторный и скалярный потенциалы:

$$rot\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu\mu_0}\right)=\mathbf{j}+\frac{1}{\tau}d^{-s}t:\left(\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}\right);\quad div\left(\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}\right)=\rho\ ,$$

или

$$rot\left(\frac{rot\ \mathbf{A}}{\mu\mu_0}\right)=\mathbf{j}+\frac{1}{\tau}d^{-s}t:\left(\varepsilon\varepsilon_0\left(-\frac{1}{\tau}d^{-s}t:\mathbf{A}+\nabla\varphi\right)\right);\quad div\left(\varepsilon\varepsilon_0\left(-\frac{1}{\tau}d^{-s}t:\mathbf{A}+\nabla\varphi\right)\right)=\rho\ .$$

Выполняются следующие преобразования данных уравнений:

$$rot\ rot\ \mathbf{A}=\mu\mu_0\mathbf{j}-\frac{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}{\tau^2}d^{-2s}t:\mathbf{A}+\frac{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}{\tau}d^{-s}t:\nabla\varphi=$$

$$=\mu\mu_0\mathbf{j}-\frac{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}{\tau^2}d^{-2s}t:\mathbf{A}+\nabla\left(\frac{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}{\tau}d^{-s}t:\varphi\right),\tag{5}$$

$$div\left(-\frac{1}{\tau}d^{-s}t:\mathbf{A}+\nabla\varphi\right)=-\frac{1}{\tau}d^{-s}t:\left(div\right)\mathbf{A}+div\nabla\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}\ .\tag{6}$$

Далее, не ограничивая общности, принимается условие калибровочной инвариантности:

$$div\mathbf{A}=\left(\frac{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}{\tau}d^{-s}t:\varphi\right).$$

Использование данного условия для исключения скалярного потенциала φ в уравнении (5) и, наоборот, для исключения векторного потенциала $\mathbf{A}$ в уравнении (6) позволяет получить следующие уравнения:

$$rot\ rot\mathbf{A}=\mu\mu_0\mathbf{j}-\frac{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}{\tau^2}d^{-2s}t:\mathbf{A}+\nabla\left(div\mathbf{A}\right),$$

$$-\frac{1}{\tau}d^{-s}t:\left(\frac{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}{\tau}d^{-s}t:\varphi\right)+div\nabla\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}\ ,\ \text{или}\ -\frac{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}{\tau^2}d^{-2s}t:\varphi+div\nabla\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}\ .$$

Из теории поля известно, что верны следующие выражения:

$$rot\ rot\ \mathbf{A}=\nabla\left(div\right)\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A},\ \text{и}\ div\nabla\varphi=\Delta\varphi\ .$$

С учетом первого выражения определяется уравнение для векторного потенциала:

$$\nabla\left(div\mathbf{A}\right)-\Delta\mathbf{A}=\mu\mu_0\mathbf{j}-\frac{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}{\tau^2}d^{-2s}t:\mathbf{A}+\nabla\left(div\mathbf{A}\right),$$

или

$$\Delta\mathbf{A}-\frac{\mu\varepsilon}{(c\tau)^2}d^{-2s}t:\mathbf{A}=-\mu\mu_0\mathbf{j}. \tag{7}$$

А с учетом второго выражения получают уравнение для скалярного потенциала:

$$\Delta\varphi-\frac{\mu\varepsilon}{(c\tau)^2}d^{-2s}t:\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}\ . \tag{8}$$

где $c=1\big/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=292\,792\,458\ м/с$ (скорость света в вакууме).

Уравнения (7) и (8) представляют собой уравнения с изменяющимся типом: при $s=1$ – гиперболический тип; при $s=1/2$ – параболический тип. Такие уравнения в литературе называют диффузионно-волновыми уравнениями. Их решение можно получить методом функции Грина [7].

Анализируются свойства электромагнитного поля в диэлектрике с постоянными значениями ε и μ, исходя из диффузионно-волнового уравнения. Для этого записывается одномерное уравнение дробного порядка

$$d^{-2s}t:u\left(x,t\right)-\frac{(c\tau)^2}{\mu\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=-\frac{(c\tau)^2}{\mu\varepsilon}\cdot\frac{\rho(x,t)}{\varepsilon\varepsilon_0}, \tag{9}$$

где под функцией $u(x,t)$ понимается $\vec{A}$ или φ. Уравнение (9) – линейное, и его частное решение можно представить в виде

$$u(x,t)=u_0\cdot\exp(ikx)\cdot z(t),$$

где $z(t)$ – неизвестная функция, u_0 – комплексная амплитуда, k – компонент

волнового вектора в направлении x. Подставляя это частное решение в (9), получаем уравнение

$$d^{-2s}:z(t)+\omega^2 z(t)=-\frac{\omega^2}{k^2}\cdot\frac{\rho(x,t)}{\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{u_0\exp(ikx)}, \tag{10}$$

где $\omega=\dfrac{ck\tau}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ – безразмерная частота.

Решение уравнения (10) ищется обычным способом в виде степенного ряда [7]. Частным решением уравнения (10) является функция:

$$z(t)=E_{2s}(-\omega^2t^{2s}),$$

где $E_{2s}(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{y^n}{\Gamma(2s\cdot n+1)}$ - функция Миттага-Леффлера.

Дробное дифференцирование порядка $2s$ функции $z(t)$ приводит к выражению:

$$d^{-2s}:z(t)=d^{-2s}:E_{2s}(-\omega^2t^{2s})=d^{-2s}:\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\omega^2t^{2s})^n}{\Gamma(2sn+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\omega^2)^n}{\Gamma(2sn+1)}d^{-2s}:t^{2sn}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\omega^2)^n}{\Gamma(2sn+1)}\frac{\Gamma(2sn+1)\cdot t^{2sn-2s}}{\Gamma(2sn+1-2s)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\omega^2)^1(-\omega^2)^{n-1}t^{2s(n-1)}}{\Gamma(2s(n-1)+1)}=\frac{t^{-2s}}{\Gamma(-2s+1)}-\omega^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\omega^2t^{2s})^n}{\Gamma(2sn+1)}=$$

$$=\frac{t^{-2s}}{\Gamma(-2s+1)}-\omega^2E_{2s}(-\omega^2t^{2s})=\frac{t^{-2s}}{(-2s)\Gamma(-2s)}-\omega^2z(t).$$

После подстановки результата дробного дифференцирования в уравнение (10) получаем [7]:

$$\frac{t^{-2s}}{2s\Gamma(-2s)}=\frac{\omega^2}{k^2}\cdot\frac{\rho(x,t)}{\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{u_0\exp(ikx)}.$$

Отсюда определяется выражение для плотности тока проводимости:

$$\rho(x,t)=u_0\exp(ikx)\frac{t^{-2s}}{2s\Gamma(-2s)}\frac{k^2\varepsilon\varepsilon_0}{\omega^2}.$$

Таким образом, определяется решение

$$u(x,t)=u_0\cdot\exp(ikx)\cdot E_{2s}(-\omega^2t^{2s}).$$

Отметим, что в нашем случае дробное интегро-дифференцирование и, соответственно, феноменологический параметр s, учитывают влияние фрактальных свойств движения зарядов в диссипативной среде на создаваемое электромагнитное поле. При уменьшении s происходит затухание электромагнитных волн, причем при медленном диффузионном блуждании $(s<1/2)$ затухание имеет степенную асимптотику $E_{2s}(-t^2)\infty t^{2s}/\Gamma(-2s+1)$, характерную для многих фрактальных систем [7,8].

На рисунке 1 в качестве примера показаны графики функции $E_{2s}(-t^{2s})$ для различных значений параметра $2s$. Если параметр $2s$ находится в интервале от 1 до 2, то по переменной t будем иметь периодическую функцию с частотой ω. Если параметр $2s$ находится в интервале от 0 до 1, то функция становиться монотонно убывающей. Нетрудно заметить, что параметр $2s$ определяет скорость убывания функции.

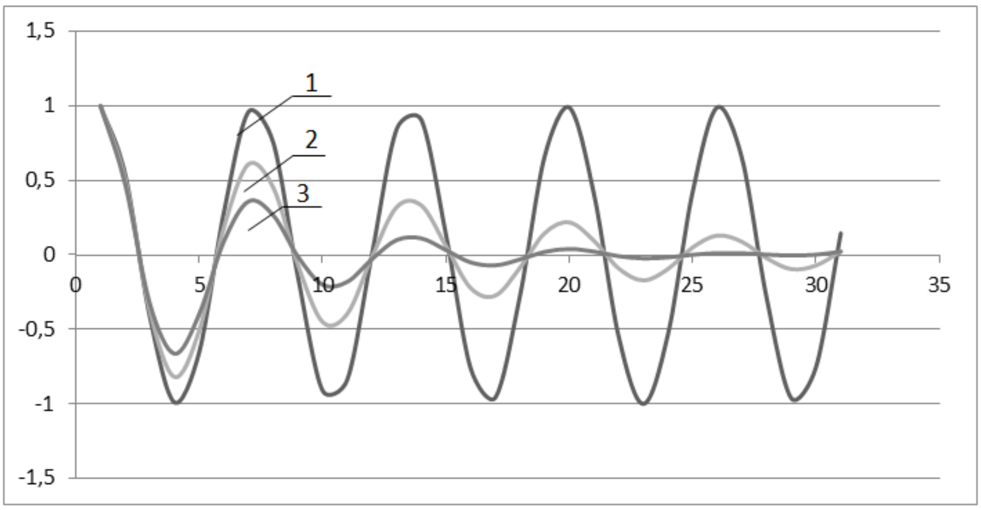

Рис. 1. *Графики функции Миттага-Леффлера $E_{2s}(-t^{2s})$ при различных значениях параметра $2s$: 1) $2s=2$; 2) $2s=1,9$; 3) $2s=1,8$*

Рассмотрим предельные случаи. Пусть $2s=2$ (гиперболический случай). Тогда функция Миттага-Леффлера преобразуется в гиперболический косинус:

$$E_2(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{\Gamma(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{y}\right)^{2n}}{2n!}=ch(\sqrt{y}).$$

Следовательно, решение $u(x,t)$ будет иметь вид:

$$u(x,t)=u_0\cdot\exp(ikx)\cdot E_2(-\omega^2t^2)=u_0\cdot\exp(ikx)\cdot ch\left(\sqrt{-\omega^2t^2}\right)=u_0\cdot\exp(ikx)\cdot ch(i\omega t).$$

Решение этого вида определяет плоскую монохроматическую волну,

являющуюся периодической функцией по обеим переменным.

При $2s=1$ (параболический случай) функция Миттага-Леффлера преобразуется в экспоненту:

$$E_1(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{\Gamma(n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}=\exp(y).$$

Следовательно, решение $u(x,t)$ будет иметь вид:

$$u(x,t)=u_0\cdot\exp(ikx)\cdot E_1(-\omega^2t)=u_0\cdot\exp(ikx)\cdot\exp\left(-\omega^2t\right)=u_0\cdot\exp(ikx-\omega^2t).$$

Данное решение является периодическим лишь по переменной x. Его также можно понимать как плоскую волну, но с убывающей по времени амплитудой.

Рассмотрим теперь свойства свободного электромагнитного поля в диэлектрике с постоянными значениями ε и μ, исходя из приведенного выше диффузионно-волнового уравнения. Для этого записывается одномерное однородное уравнение дробного порядка

$$d^{-2s}t:u\left(x,t\right)-\frac{(c\tau)^2}{\mu\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}=0. \quad (11)$$

Уравнение (11) – линейное, и его частное решение также можно представить в виде

$$u(x,t)=u_0\cdot\exp(ikx)\cdot z(t),$$

где $z(t)$ – неизвестная функция, u_0 – комплексная амплитуда, k – компонент

волнового вектора в направлении x. Подставляя это частное решение в (11), получаем уравнение

$$d^{-2s}:z(t)+\omega^2z(t)=0, \quad (12)$$

где $\omega=\dfrac{ck\tau}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ – безразмерная частота.

Решение уравнения (12) также ищется в виде степенного ряда [8]. В качестве частного решения этого уравнения выберем дробный полином порядка $2s$ степени m, как определено в [4]:

$$P_{2s/m}(t)=\sum_{n=0}^{m} a_i \cdot t^{2s(n+1)-1}, \quad a_n = const, \quad (n=0,1,2,...,m) \ .$$

При взятии дробной производной порядка $2s$ от данного дробного полинома получаем:

$$d^{-2s}t : P_{2s/m}(t) = d^{-2s}t : \sum_{n=0}^{m} a_n \cdot t^{2s(n+1)-1} = \sum_{n=0}^{m} a_n \cdot d^{-2s} : t^{2s(n+1)-1} = \sum_{n=0}^{m} a_n \frac{\Gamma\left(2s(n+1)\right)}{\Gamma\left(2sn\right)} t^{2sn-1} =$$

$$= a_0 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0)} t^{-1} + \sum_{n=1}^{m} a_n \frac{\Gamma\left(2s(n+1)\right)}{\Gamma\left(2sn\right)} t^{2sn-1} = 0 + \sum_{n=0}^{m-1} a_{n+1} \frac{\Gamma\left(2s(n+2)\right)}{\Gamma\left(2s(n+1)\right)} t^{2s(n+1)-1} \ .$$

Здесь $\Gamma(0)=\infty$, поэтому первый член ряда равен нулю. Выбираем полином бесконечной степени, т.е. $m=\infty$, и потребуем выполнения условия:

$$a_n = a_{n+1} \frac{\Gamma\left(2s(n+2)\right)}{\Gamma\left(2s(n+1)\right)}, \quad (n=0,1,2,3,...,) \ .$$

Отсюда следуют равенства:

$$d^{-2s}t : P_{2s/\infty}(t) = P_{2s/\infty}(t) \ , \quad a_n = \frac{1}{\Gamma\left(2s(n+1)\right)}, \quad (n=0,1,2,3,...,) \ .$$

Теперь определяем функцию:

$$K_{2s}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2s(n+1)-1}}{\Gamma\left(2s(n+1)\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2sn-1}}{\Gamma\left(2sn\right)} \ .$$

Нетрудно убедиться в том, что для данной функции верны следующие выражения:

$$d^{-2s}t : K_{2s}(t) = K_{2s}(t) \text{ и } d^{-2s}t : K_{2s}(\theta t) = \theta^{2s} K_{2s}(\theta t) \ ,$$

где θ- константа.

В качестве частного решения уравнения (12) выбираем функцию

$$z(t) = K_{2s}(\theta t) \ ,$$

при этом значение константы θ определяется из уравнения:

$$\theta^{2s} K_{2s}(\theta t) + \omega^2 K_{2s}(\theta t) = 0 \ .$$

Отсюда получаем, что $\theta^{2s} = -\omega^2 = (i\omega)^2$, или $\theta = (i\omega)^{1/s}$.

Таким образом, определяется решение

$$u(x,t) = u_0 \cdot \exp(ikx) \cdot K_{2s}\left((i\omega)^{1/s} t\right).$$

На рисунке 2 в качестве примера показаны графики функции $k_{2s}(\omega,t) = (i\omega)^{1/s} K_{2s}((i\omega)^{1/s} t)$ для различных значений параметра $2s$ при $\omega = 1$.

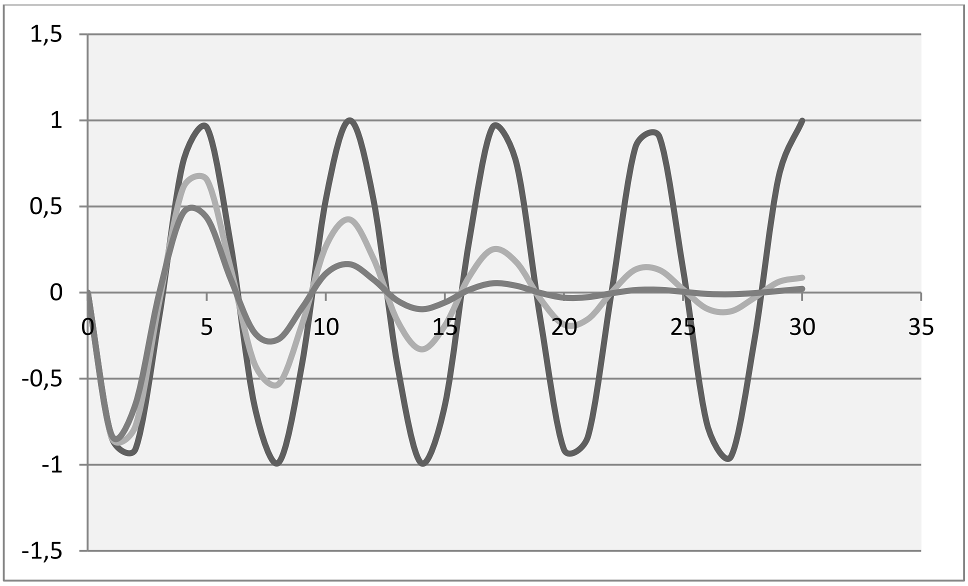

***Рис. 2**. Графики функции $k_{2s}(\omega,t)$ при различных значениях параметра $2s$: 1) $2s=2$; 2) $2s=1{,}9$; 3) $2s=1{,}8$*

Отметим, что в нашем случае функция $K_{2s}(t)$ при предельном значении параметра $2s=2$ (гиперболический случай) преобразуется в гиперболический синус:

$$K_2(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{\Gamma\left(2n\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}=sh(t).$$

Следовательно, решение $u(x,t)$ будет иметь вид:

$$u(x,t)=u_0\cdot\exp(ikx)\cdot K_2\left((i\omega)^{1/s}t\right)=u_0\cdot\exp(ikx)\cdot sh\left((i\omega)^{1/s}t\right).$$

Решение этого вида также определяет плоскую монохроматическую волну.

В параболическом случае $2s=1$ и функция $K_{2s}(t)$ преобразуется в экспоненту:

$$K_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{\Gamma\left(n\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}=\exp(t).$$

Следовательно, решение $u(x,t)$ будет иметь вид:

$$u(x,t)=u_0\cdot\exp(ikx)\cdot K_1\left((i\omega)^{1/s}t\right)=u_0\cdot\exp(ikx)\cdot\exp\left((i\omega)^{1/s}t\right).$$

В заключение отметим следующее. Значение параметра s определяет не только фрактальные свойства движения зарядов, но и, в некотором смысле, характеризует фрактальность исследуемой диссипативной среды [9,10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Стародубцев П.А., Мироненко М.В., Григорьев В.В. Акустическая голография и возможность ее применения в низкочастотной гидроакустической томографии океанской среды / Статья.- Владивосток, Сб. стат. пробл. и метод. разраб. и эксплуат. вооружен. и воен. техн. ВМФ.-Владивосток, МО РФ,ТОВВМУ имени С.О.Макарова,-Вып.19.- 1998 -с.131-137.

2. Стародубцев П.А., Пичугин К.А., Василенко А.М. Узкополосное параболическое при-ближение для моделирования характеристик звукового поля движущейся возмущенной об-ласти / Статья.- Владивосток, Мат. 46 всерос. межвуз. научно-технической конференции. -Владивосток, ТОВМИ имени С.О. Макарова, 2003.-с.182-185.

3. Стародубцев П.А. Получение аналитического и графического отображения передаточ-ной характеристики гидроакустического канала с использованием импульсных сигналов / Статья.- Улан-Удэ, Вестник БГУ. –Вып.2.-2003.- с.107-112.

4. Потапов А.А. Фракталы, скейлинг и дробные операторы в радиотехнике и радиоэлектроники: современное развитие / Статья.-Москва, журнал радиоэлектроники, №1, 2010.-с. 1-98.

5. Потапов А.А., Черных В.А. Дробное исчисление А.В. Летникова, теория фракталов и скейлинг / Под ред. А.А. Потапова.– М.: Физматлит, 2009.- 820 с.

6. Стародубцев П.А. Взаимодействие упругих и электромагнитных волн в проводящей морской / Статья.- Владивосток, Сб.докл. рег. научно-практ. конф. «Море-2003».-Тихоокеанская инспекция Российского Морского Регистра судоходства, 2003. -с.100 - 104.

7. Чуриков В.А. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе d-оператора: учебное пособие / Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 118 с.

8. Стародубцев П.А., Пичугин К.А. Оптимизация процесса обработки гидролокационной информации методами нелинейной фильтрации/ Статья.- Москва, Наукоемкие технологии. - № 5.-Т.5,-2004.-с.45-50.

9. Потапов А.А. Фракталы, скейлинг и дробные операторы как основа новых методов об-работки информации и конструирования фрактальных радиосистем // Технология и кон-струирование в электронной аппаратуре. 2008. № 5(77). с. 3 – 19.

10. Стародубцев П.А., Карпачев А.А., Халаев Н.Л. Новые физические объяснения решений уравнений электродинамики материальных сред/ Статья.- Владивосток, Проблемы и методы разработки и эксплуатации вооружения и военной техники ВМФ: сб. научных трудов. - Владивосток: ВУНЦ ВМФ «ВМА» (филиал, г. Владивосток). – Вып.82, ч.2,-2013.-с.7-12.

Рецензент: Карасев Владимир Владимирович, Профессор кафедры Судовождение, к.т.н., «Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет», ФГБОУ ВПО «Дальрыбвтуз».

REFERENCES

1. Starodubtcev P.A., Mironenko M.V., Grigoriev V.V. Acoustic holography and the possibility of its application in low-frequency sonar imaging of the ocean environment / Article . - Vladivostok, Sat stat . probl . method . razrab . and operation . forearmed. and military . tehn. VMF. Vladivostok, Russian Defense Ministry , TOVVMU named Makarov , - Vyp.19 . - 1998 p.131 -137 .

2. Starodubtcev P.A., Pichugin K.A., Vasilenko A.M. Narrowband parabolic approximation for modeling the behavior of the sound field of a moving perturbed the field / Article . - Vladivostok, mate . 46 All-Russia. Intercollege . scientific and technical conference . Vladivostok , TOVVMU named after SO Makarova , 2003. - p.182 -185 .

3. Starodubtcev P.A. Preparation of analytical and graphical display peredatoch -tion characteristics of sonar channel using pulsed signals / Article . - Ulan-Ude, BGU Herald . Vyp.2. - 2003 . - P.107 -112 .

4. Potapov A.A. Fractals, scaling and fractional operators in the radio and electronics : the modern development / Art. - Moscow, electronics magazine , № 1, 2010.-s. 1-98 .

5. Potapov A.A., Chernykh V.A. Fractional Calculus A.V. Letnikova , the theory of fractals and scaling / Ed. A.A. Potapov. - Fizmatlit, Moscow, 2009 . - 820 .

6. Starodubtcev P.A. Interaction of elastic and electromagnetic waves in conducting marine / Article . - Vladivostok, Sb.dokl . reg . scientific and practical . conf. "Sea - 2003 ." Pacific Inspectorate of the Russian Maritime Register of Shipping , 2003 . , p.100 - 104.

7. Tchurikov V.A. Additional chapters of analysis. Fractional integration and fractional differentiation on the basis of d- operator : a tutorial / Tomsk: Tomsk Polytechnic University in 2010 . - 118 .

8. Starodubtcev P.A., Pichugin K.A. Optimization of processing sonar information methods for nonlinear filtering / Article . - Moscow, High Tech . - № 5.- T.5 , - 2004. - p.45- 50 .

9. Potapov A.A. Fractals, scaling and fractional operators as a basis for new methods of information processing and design of fractal radio / / Technology and concentration struirovanie in electronic equipment . 2008 . Number 5 (77). s. 3 - 19.

10. Starodubtcev P.A. Karpachev A.A., Halaew N.L. Physical explanation of solutions of equations of electrodynamics of material media / article . - Vladivostok, Problems and methods of development and operation of weapons and military equipment of the Navy : Sat scientific papers. - Vladvostok VUNTS Navy " WMA " (Branch , Vladivostok) . - Vyp.82 , p.2 - 2013. - p.7- 12.