Лукашевич Эдуард Брониславович
Lukashevich Eduard Bronislavovich
Доцент/Associate Professor
Ростовский государственный строительный университет
Rostov State University of Civil Engineering
E-Mail: edluk@yandex.ru

Сергеев Сергей Николаевич
Sergeev Sergey Nikolaevich
Магистрант/Postgraduate
Ростовский государственный строительный университет
Rostov State University of Civil Engineering
05.23.01 Строительные конструкции, здания и сооружения
E-Mail: sergeevsn23@gmail.com

Система дифференциальных уравнений для сводчатой трехслойной оболочки с легким заполнителем

The system of differential equations for the three-layer shell with arched light filler

Аннотация: Получена система дифференциальных уравнений, описывающих деформации трехслойной оболочки с легким заполнителем. Уравнения можно применять как для численного, так и для аналитического исследования напряжений и деформаций, возникающих в сводчатых покрытиях.

The Abstract: A system of differential equations describing the deformation of the three-layer shell with a light filler is given. Equation can be applied to numerical and analytical study of the stresses and strains arising vaulted roofs. Ill. 2, bibl. 3.

Ключевые слова: Свод, Оболочка, Трехслойная конструкция, Перемещение, Деформация, Напряжение

Keywords: Arch shell, Three-layer construction, Movement, Strain, Stress.

***

Вывод уравнений, описывающих деформации трехслойных оболочек с учетом сдвига среднего слоя, приводится ряде работ с российских ([1], и др.). В наиболее общей форме уравнения деформаций получены в статье [2]. Однако отсутствие соотношений, с помощью которых могут быть получены граничные условия, делает затруднительным практическое применение результатов указанной работы. В других работах (см., например, [3]) дифференциальные уравнения деформаций оболочки записаны относительно разрешающих функций. В связи с этим, в некоторых случаях возникают неудобства при формулировании граничных условий. Эти соображения побуждают применить для расчета открытой круговой цилиндрической оболочки вариант уравнений, которые можно получить на основе принципа возможных перемещений.

Рассмотрим тонкую круговую оболочку с легким заполнителем. Будем исходить из следующих предположений:

1) материал несущих слоев является ортотропным и упругим;

2) в радиальном направлении оболочка несжимаема;

3) перемещения, возникающие в оболочке, настолько малы, что для описания напряженно-деформированного состояния можно воспользоваться линейными уравнениями;

4) прямые линии, проведенные через точки заполнителя, перпендикулярные к его срединной поверхности до деформации, остаются прямолинейными, но вследствие сдвига в заполнителе, не перпендикулярными к изогнутой срединной поверхности последнего;

5) для несущих слоев принимается гипотеза прямой нормали;

Таким образом, в процессе деформации прямая линия, перпендикулярная к срединной поверхности, превращается в ломаную. Эта гипотеза, как указывалось выше, применяется во многих работах в области трехслойных конструкций.

При деформации оболочки точки срединных поверхностей несущих слоев получают перемещения U^+, V^+, U^-, V^-, W (индекс «+» относится к верхнему, а «—» к нижнему несущему слою).

Нетрудно показать, что, в силу сформулированных выше гипотез, напряженно-деформированное состояние оболочки определяется указанными выше пятью функциями цилиндрических координат x и φ (рис. 1). Деформации нижнего несущего слоя – тонкой круговой оболочки связаны с перемещениями U^-, V^- и W следующими зависимостями:

$$\varepsilon_x^- = \frac{\partial U^-}{\partial x} - z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \qquad \varepsilon_\varphi^- = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial V^-}{\partial \varphi} + W\right) + \frac{z}{R^2}\left(\frac{\partial V^-}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}\right)$$

$$\gamma_{x\varphi} = \frac{1}{R}\frac{\partial U^-}{\partial \varphi} + \frac{\partial V^-}{\partial x} - \frac{z}{R}\left(2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial V^-}{\partial x}\right) \qquad (1)$$

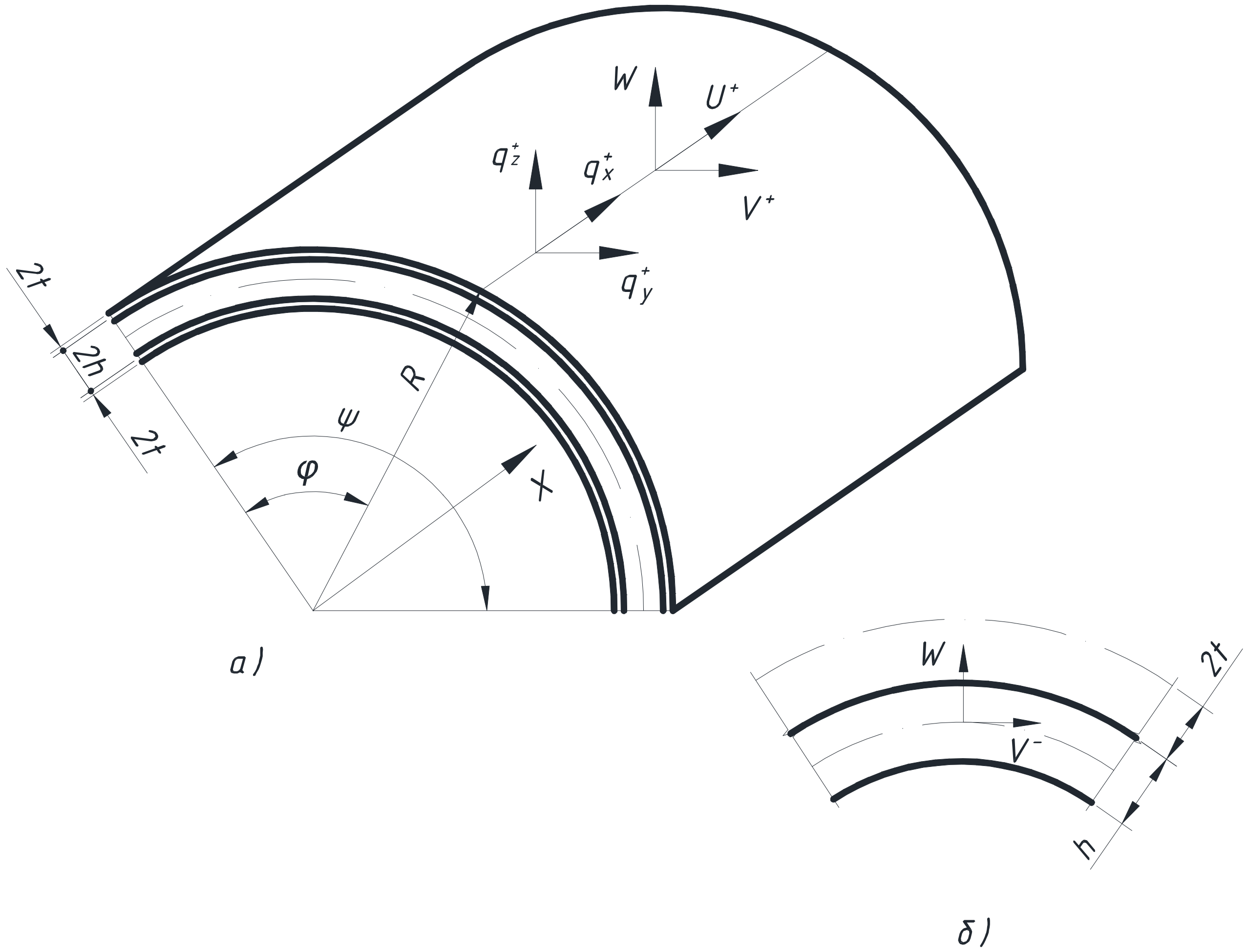

Рис. 1.

Предполагая, что плоскость, перпендикулярная оси ОХ, и меридиональная плоскость являются плоскостями упругой симметрии и, применяя обобщенный закон Гука, получим следующие выражения напряжений:

$$\sigma_{\varphi}^{-} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial V^-}{\partial \varphi}+W\right)+\frac{z}{R^2}\left(\frac{\partial V^-}{\partial \varphi}-\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}\right)+\nu_1\left(\frac{\partial U^-}{\partial x}-z\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)\right],$$

$$\sigma_{x}^{-} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}\left\{\frac{\partial U^-}{\partial x}-z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\frac{\nu_2}{R}\left[\frac{\partial V^-}{\partial \varphi}+W+\frac{z}{R}\left(\frac{\partial V^-}{\partial \varphi}-\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}\right)\right]\right\},$$

$$\tau_{x\varphi}^{-} = G\left[\frac{1}{R}\frac{\partial U^-}{\partial \varphi}+\frac{\partial V^-}{\partial x}\frac{z}{R}\left(2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial \varphi}-\frac{\partial V^-}{\partial x}\right)\right] \qquad (2)$$

Считая толщину оболочки малой по сравнению с ее радиусом, пренебрежем различием в радиусах слоев. В записанных выше выражениях (2) под R подразумевается радиус срединной поверхности заполнителя.

Выражения деформаций и напряжений в верхнем слое оболочки аналогичны (2). Их можно получить путем соответствующей замены индексов.

Выразим деформацию сдвига в среднем слое γ_{xz} через перемещения U^-, U^+, W. Для этого рассмотрим (рис. 2) нормаль к срединной поверхности оболочки до и после деформации. Согласно принятой гипотезе, прямая $ABCD$ превращается в ломаную линию $A_iB_iC_iD_i$.

Отмечая, что перемещения точек C и B в направлении оси OX соответственно равны $U^- - t\frac{\partial W}{\partial x}$ и $U^+ + t\frac{\partial W}{\partial x}$ и принимая во внимание, что нормаль к изогнутой срединной поверхности заполнителя образует с $ABCD$ угол $\frac{\partial W}{\partial x}$, можно найти угол сдвига заполнителя:

$$\gamma = \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x},$$

где (рис. 2)

$$U_z = \frac{1}{2h}\left(U^+ + t\frac{\partial W}{\partial x} - +t\frac{\partial W}{\partial x}\right)z + U^- - t\frac{\partial W}{\partial x}.$$

Таким образом, деформация заполнителя определяется выражением:

$$\gamma_{xz} = \frac{U^+ - U^-}{2h} + \left(1 + \frac{t}{h}\right)\frac{\partial W}{\partial x}. \tag{3}$$

Установим, далее, связь между деформацией γ_{zy} и перемещениями V^+, V^- и W. Запишем выражение для V_z в виде:

$$V_z = V^- - \frac{t}{R}\frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{z}{2h}\left(V^+ + \frac{t}{R}\frac{\partial W}{\partial \varphi} - V^- + \frac{t}{R}\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right).$$

Поскольку, как известно, деформация сдвига в полярных координатах определяется равенством

$$\gamma_{z\varphi} = \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{V_z}{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial W}{\partial \varphi},$$

то, пренебрегая величиной $\frac{z}{R}$ по сравнению с единицей, получим искомое выражение деформации сдвига в среднем слое оболочки:

$$\gamma_{z\varphi} = \frac{V^+ - V^-}{2h} + \frac{1}{R}\left(1 + \frac{t}{h}\right)\frac{\partial W}{\partial x}. \tag{4}$$

Работающий на сдвиг заполнитель предполагается упругим, поэтому касательные напряжения в заполнителе вычисляются так:

$$\tau_{xz} = G_1\left[\frac{U^+ - U^-}{2h} + \left(1 + \frac{t}{h}\right)\frac{\partial W}{\partial x}\right];$$

$$\tau_{\varphi z} = G_2\left[\frac{V^+ - V^-}{2h} + \frac{1}{R}\left(1 + \frac{t}{h}\right)\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right]; \tag{5}$$

где G_1 и G_2 – модули сдвига заполнителя.

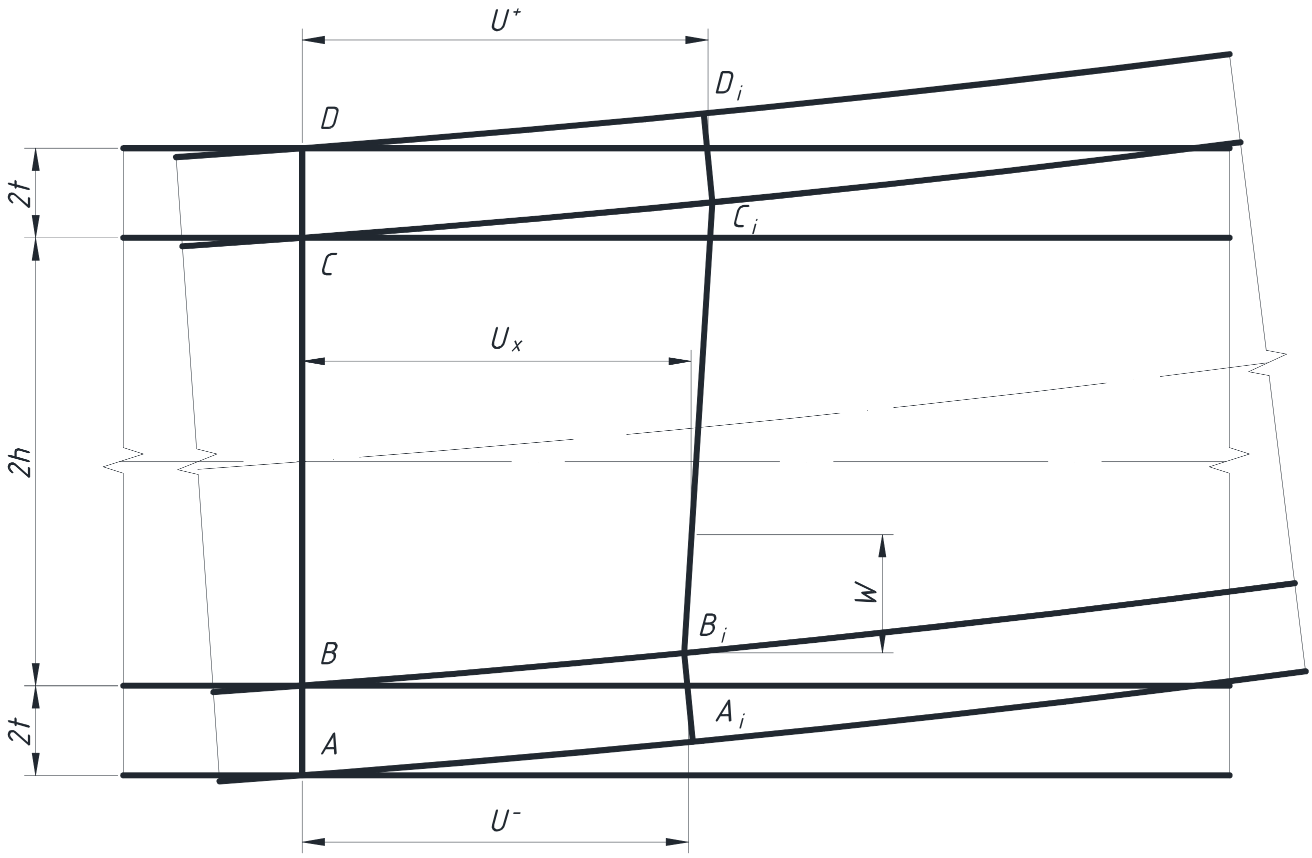

Рис. 2.

Таким образом, напряженно-деформированное состояние оболочки в рамках принятых предположений определяется пятью функциями цилиндрических координат x и φ: U^-, U^+, V^-, V^+, W. Для того чтобы определить эти функции, воспользуемся принципом возможных перемещений.

После проведения относительно простых преобразований получим следующую систему дифференциальных уравнений, описывающих деформации трехслойной оболочки:

$$\begin{cases} A_1\dfrac{\partial^2 U^-}{\partial x^2} - 2\dfrac{Gt}{R^2}\dfrac{\partial^2 U^-}{\partial \varphi^2} + \dfrac{G_1}{2h}(U^- - U^+) + A_3\dfrac{\partial^2 V^-}{\partial x\partial\varphi} + A_2\dfrac{\partial W}{\partial x} = q_x^-, \\ A_3\dfrac{\partial^2 U^-}{\partial x\partial\varphi} + A_4\dfrac{\partial^2 V^-}{\partial x^2} + A_5\dfrac{\partial^2 V^-}{\partial \varphi^2} + \dfrac{G_2}{2h}(V^- - V^+) + A_6\dfrac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial\varphi} + A_7\dfrac{\partial^3 W}{\partial\varphi^3} + \\ + A_8\dfrac{\partial W}{\partial\varphi} = q_\varphi^-, \\ \dfrac{G_1}{2h}(U^- - U^+) + A_1\dfrac{\partial^2 U^+}{\partial x^2} - 2\dfrac{Gt}{R^2}\dfrac{\partial^2 U^+}{\partial \varphi^2} + A_3\dfrac{\partial^2 V^+}{\partial x\partial\varphi} + A_3\dfrac{\partial W}{\partial x} = q_x^+, \\ A_3\dfrac{\partial^2 U^+}{\partial x\partial\varphi} + A_4\dfrac{\partial^2 V^+}{\partial x^2} + A_5\dfrac{\partial^2 V^+}{\partial \varphi^2} + \dfrac{G_2}{2h}(V^+ - V^-) + A_6\dfrac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial\varphi} + A_7\dfrac{\partial^3 W}{\partial\varphi^3} + \\ + A_9\dfrac{\partial W}{\partial\varphi} = q_\varphi^+, \\ -A_2\dfrac{\partial U^-}{\partial x} + A_{13}\dfrac{\partial U^+}{\partial x} - A_9\dfrac{\partial V^+}{\partial\varphi} + A_7\left(\dfrac{\partial^3 V^-}{\partial\varphi^3} + \dfrac{\partial^3 V^+}{\partial\varphi^3} + 2\dfrac{\partial^4 W}{\partial\varphi^4} - 6\dfrac{R^2}{t^2}W\right) - \\ -A_8\dfrac{\partial V^-}{\partial\varphi} - A_6\left(\dfrac{\partial^3 V^-}{\partial x^2\partial\varphi} + \dfrac{\partial^3 V^+}{\partial x^2\partial\varphi} + 4\dfrac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial\varphi^2}\right) - \dfrac{2}{3}t^2 A_1\dfrac{\partial^4 W}{\partial x^4} + A_{10}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \\ + A_{11}\dfrac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2} = q_z^- + q_z^+. \end{cases} \qquad (6)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$A_1 = -\frac{2E_1 t}{1-\nu_1\nu_2}, \quad A_2 = -\frac{2E_2\nu_1 t}{R(1-\nu_1\nu_2)} - G_1\left(1+\frac{t}{h}\right), \quad A_3 = -\frac{2E_2\nu_1 t}{R(1-\nu_1\nu_2)} - 2\frac{Gt}{R},$$

$$A_4 = -2Gt\left(1-\frac{t^2}{3R^2}\right), \quad A_5 = -\frac{2E_2 t}{1-\nu_1\nu_2}\left(\frac{1}{R^2}+\frac{t^2}{3R^4}\right), \quad A_6 = \frac{2t^3}{3R^2}\left(\frac{E_1\nu_2}{1-\nu_1\nu_2}+2G\right),$$

$$A_7 = \frac{2}{3R^4}\,\frac{E_2 t^3}{1-\nu_1\nu_2}, \quad A_8 = -\frac{2E_2 t}{R^2(1-\nu_1\nu_2)} - \frac{G_2}{R}\left(1+\frac{t}{h}\right), \qquad (7)$$

$$A_9 = \frac{E_2 t}{1-\nu_1\nu_2}\frac{1}{R^2} + \frac{G_2}{R}\left(1+\frac{t}{h}\right), \quad A_{10} = 2G_1 h\left(1+\frac{t}{h}\right)^2,$$

$$A_{11} = \frac{2G_2 h}{R^2}\left(1+\frac{t}{h}\right)^2, \quad A_{12} = G_1\left(1+\frac{t}{h}\right),$$

$$A_{13} = \frac{2E_1\nu_2 t}{R(1-\nu_1\nu_2)} - G_1\left(1+\frac{t}{h}\right), \quad A_{14} = \frac{4t^3}{3R^2}\left(\frac{E_1\nu_2}{1-\nu_1\nu_2}+4G\right).$$

Систему (6) можно применять как для численного, так и для аналитического определения напряжений и деформаций, возникающих в сводчатых покрытиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И. Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем // Изв. АН СССР, ОТН – №1 – 1957. – С. 77–84.

2. Брусиловский А.И., Торосян Е.А. Расчет трехслойных оболочек с легким заполнителем с учетом температурных напряжений / Прочность и деформативность конструкций с применением пластмасс. М.: СИ – 1996. – 296С.

3. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение – 1973. – 170С.