

Интернет-журнал «Наукоедение» ISSN 2223-5167 <https://naukovedenie.ru/>

Том 9, №5 (2017) <https://naukovedenie.ru/vol9-5.php>

URL статьи: <https://naukovedenie.ru/PDF/65TVN517.pdf>

Статья опубликована 30.10.2017

Ссылка для цитирования этой статьи:

Астахова А.Я. Модель расчета тонких оболочек за пределом упругости // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 9, №5 (2017) <https://naukovedenie.ru/PDF/65TVN517.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 539.3

Астахова Августина Яковлевна¹

НИУ МГСУ «Национальный исследовательский московский государственный строительный университет»

Россия, Москва

Старший преподаватель

Кандидат технических наук, доцент

E-mail: ast965@yandex.ru

РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=677776

Модель расчета тонких оболочек за пределом упругости

Аннотация. В работе представлена модель расчета тонких изотропных оболочек за пределом упругости. Определение напряженно-деформированного состояния в оболочках основано на теории малых упругопластических деформаций и методе упругих решений. Решение строится на основе уравнений равновесия и геометрических соотношений линейной теории тонких оболочек в криволинейных координатах и соотношений упругости теории малых упругопластических деформаций. Деформации на основании гипотез Кирхгофа-Лява выражаются в виде первых двух членов разложения. Для заданного соотношения между интенсивностью деформаций и интенсивностью напряжений физические соотношения представлены в виде разности упругой составляющей и функций, выражающих физическую нелинейность материала. Эти функции в разрешающих дифференциальных уравнениях являются добавочными слагаемыми к компонентам внешней нагрузки. В первом приближении метода упругих решений добавочные функции полагаются равными нулю и определяются по величинам деформаций для второго приближения, величины деформаций второго приближения служат для определения добавочных функций для третьего приближения и так далее. Представлены функции и зависимости, которые позволяют определить области распространения пластических деформаций по толщине оболочки. Приводится подтверждение сходимости метода упругих решений на примере расчета сферической оболочки под действием кольцевой нагрузки, приложенной в середине меридиана.

Ключевые слова: тонкие оболочки; изотропный материал; теория оболочек; криволинейные координаты; уравнения равновесия; геометрические соотношения; соотношения упругости; упругопластический; оболочка вращения

Введение

Среди пространственных конструкций большое место занимают конструкции в форме оболочек. Теория расчета напряженно-деформированного состояния оболочек представлена в

¹ 117036, Москва, Проспект 60-лет Октября, дом 10/1, кв. 12

трудах [4], [5], [6] и многих других научных работах. Практическая необходимость расчета за пределом упругой работы материала вызвана тем, что в местах локальных воздействий в тонкостенных конструкциях возникают значительные напряжения, превышающие предел пропорциональности материала.

Метод

В настоящей работе рассматривается модель численной реализации расчета тонких изотропных оболочек, материал которых работает за пределом упругости. Определение напряженно-деформированного состояния тонких оболочек основывается на теории малых упругопластических деформаций и методе упругих решений А. А. Ильюшина [6]. В трудах И. С. Цуркова [8], [9] метод получил теоретическое обоснование и развитие для расчета тонких оболочек.

Применение ЭВМ в расчетной практике в дальнейшем [10], [1], [2], [3] позволило получить решения при действии не только распределенных по поверхности нагрузок, а также распределенных вдоль линии или распределенных на весьма малом отрезке, практически сосредоточенной силы и подтвердить теоретические доказательства сходимости метода упругих решений.

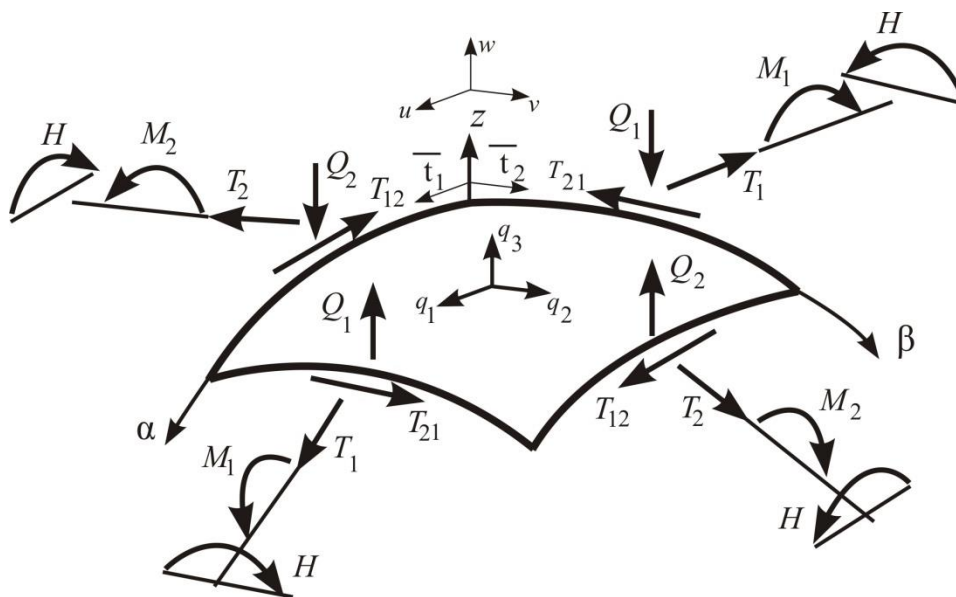


Рисунок 1. Положительные направления проекций внешней нагрузки и компонентов внутренних усилий (составлено автором)

При построении решения основными соотношениями являются уравнения равновесия и геометрических соотношения линейной теории тонких оболочек в криволинейной системе координат α и β [7]:

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial(T_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial(SA^2)}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 + \frac{2}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta} H + \\
 & + \frac{1}{R_1} \left[\frac{\partial(M_1 B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 + 2 \left(\frac{\partial H A}{\partial \beta} \right) \right] + ABq_1 = 0, \\
 & \frac{\partial(T_2 A)}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial(SB^2)}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + \frac{2}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} H +
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{R_2} \left[\frac{\partial(M_2 A)}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 + 2 \left(\frac{\partial H B}{\partial \alpha} \right) \right] + A B q_2 = 0, \\
 & \frac{1}{A B} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[\frac{\partial(M_1 B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 + \frac{1}{A} \frac{\partial(H A^2)}{\partial \beta} \right] \right\} + \\
 & + \frac{1}{A B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{B} \left[\frac{\partial(M_2 A)}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial(H B^2)}{\partial \alpha} \right] \right\} - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + A B q_3 = 0,
 \end{aligned}$$

На кромках бесконечно малого элемента срединной поверхности действуют (рис. 1), T_1 , T_2 – продольные усилия, T_{12} , T_{21} – сдвигающие усилия, Q_1 , Q_2 – поперечные силы, M_1 , M_2 – изгибающие моменты, H – крутящий момент и q_1 , q_2 , q_3 – проекции внешней распределенной по поверхности нагрузки на направления единичных векторов \bar{t}_1 , \bar{t}_2 , \bar{n} .

При этом поперечные, сдвигающие усилия и крутящий момент связаны следующими зависимостями:

$$Q_1 = \frac{1}{A B} \left[\frac{\partial(M_1 B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 + \frac{1}{A} \frac{\partial(H A^2)}{\partial \beta} \right], \quad (2)$$

$$Q_2 = \frac{1}{B} \left[\frac{\partial(M_2 A)}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial(H B^2)}{\partial \alpha} \right],$$

$$T_{12} = S + \frac{H}{R_1}, T_{21} = S + \frac{H}{R_2} \quad (3)$$

Геометрические соотношения:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{A B} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1}, \\
 \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{A B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2}, \\
 \gamma_{12} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right), \\
 \kappa_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} \right) - \frac{1}{A B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} \right), \\
 \kappa_2 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} \right) - \frac{1}{A B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} \right), \\
 \kappa_{12} &= -\frac{1}{A B} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \\
 & + \frac{1}{R_1} \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{1}{R_2} \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right),
 \end{aligned} \quad (4)$$

где: A , B – коэффициенты Ляме, u , v , w – проекции полного вектора перемещений, ε_1 , ε_2 , γ_{12} – относительные линейные и угловая деформация, κ_1 , κ_2 – изгибные деформации, κ_{12} – деформация кручения, R_1 , R_2 – радиусы главных кривизн.

Полная система уравнений получится с присоединением к системам уравнений (1) и (4) соотношений между деформациями и усилиями.

Деформации изотропной оболочки ε_α , ε_β , $\gamma_{\alpha\beta}$, в слое, расположенном на расстоянии z от срединной поверхности, на основании гипотезы Кирхгофа-Лява могут быть представлены в виде первых двух членов разложения по степеням z :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\alpha &= \varepsilon_1 + \kappa_1 z \\
 \varepsilon_\beta &= \varepsilon_2 + \kappa_2 z
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{12} + 2\kappa_{12}z$$

В теории малых упругопластических деформаций [6] деформации и напряжения связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha} &= \frac{1}{\psi} \left(\sigma_{\alpha} - \frac{1}{2} \sigma_{\beta} \right), \\ \varepsilon_{\beta} &= \frac{1}{\psi} \left(\sigma_{\beta} - \frac{1}{2} \sigma_{\alpha} \right), \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{3}{\psi} \tau_{\alpha\beta},\end{aligned}\tag{6}$$

где: ψ – соотношение между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций ε_i :

$$\psi = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}.\tag{7}$$

В результате соотношения между напряжениями и деформациями принимают вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= \frac{4}{3} \psi \left[\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 + \left(\kappa_1 + \frac{1}{2} \kappa_2 \right) z \right] \\ \sigma_{\beta} &= \frac{4}{3} \psi \left[\varepsilon_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 + \left(\kappa_2 + \frac{1}{2} \kappa_1 \right) z \right] \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{1}{3} \psi (\varepsilon_{12} + 2\kappa_{12}z)\end{aligned}\tag{8}$$

В уравнениях равновесия теории тонких оболочек (1) вместо напряжений введены их интегральные характеристики: продольные и сдвигающие усилия и изгибающие, крутящие моменты. Соотношения (8) позволяют выразить усилия через деформации в следующем виде:

$$\begin{aligned}T_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha} dz = \frac{4}{3} \left[\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) J_1 + \left(\kappa_1 + \frac{1}{2} \kappa_2 \right) J_2 \right], \\ T_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\beta} dz = \frac{4}{3} \left[\left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right) J_1 + \left(\kappa_2 + \frac{1}{2} \kappa_1 \right) J_2 \right], \\ S &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\alpha\beta} dz = \frac{1}{3} (\gamma_{12} J_1 + 2\kappa_{12} J_2), \\ M_1 &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha} z dz = - \frac{4}{3} \left[\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) J_2 + \left(\kappa_1 + \frac{1}{2} \kappa_2 \right) J_3 \right], \\ M_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\beta} z dz = - \frac{4}{3} \left[\left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right) J_2 + \left(\kappa_2 + \frac{1}{2} \kappa_1 \right) J_3 \right], \\ H &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\alpha\beta} z dz = \frac{1}{3} (\gamma_{12} J_2 + 2\kappa_{12} J_3)\end{aligned}\tag{9}$$

В формулах (9) h обозначена толщина оболочки, z – расстояние от срединной поверхности вдоль нормали к срединной поверхности, функции J_1, J_2, J_3 представляют собой переменные вдоль срединной поверхности жесткости оболочки, они определяются по формулам:

$$J_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \psi dz, J_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \psi z dz, J_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \psi z^2 dz \quad (10)$$

Отметим, что для упругой области функция ψ представляет модуль упругости материала $\psi = E$ и значения жесткостей оболочки равны $J_1 = Eh$, $J_2 = 0$, $J_3 = Eh^3/12$. При этом внутренние усилия по соотношениям (9) переходят в соотношения упругости при коэффициенте Пуассона равном $1/2$, которые обозначим $t_1, t_2, s_1, m_1, m_2, h_1$:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{4}{3} Eh \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right), \\ t_2 &= \frac{4}{3} Eh \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right), \\ s_1 &= \frac{1}{3} Eh \gamma_{12} \\ m_1 &= -\frac{1}{9} Eh^3 \left(\kappa_1 + \frac{1}{2} \kappa_2 \right), \\ m_2 &= -\frac{1}{9} Eh^3 \left(\kappa_2 + \frac{1}{2} \kappa_1 \right), \\ h_1 &= \frac{1}{18} Eh^3 \kappa_{12}, \end{aligned} \quad (11)$$

Если известна зависимость между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций ε_i , то согласно [6] интенсивность деформаций определяется по формуле (13):

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i), \quad (12)$$

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\varepsilon + 2zP_{\varepsilon\kappa} + z^2P_\kappa}, \quad (13)$$

$$\text{где: } P_\varepsilon = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \frac{1}{4}\gamma_{12}^2,$$

$$P_{\varepsilon\kappa} = \varepsilon_1\kappa_1 + \varepsilon_2\kappa_2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1\kappa_2 + \varepsilon_2\kappa_1) + \frac{1}{2}\gamma_{12}\kappa_{12}, \quad (14)$$

$$P_\kappa = \kappa_1^2 + \kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 + \kappa_{12}^2.$$

При этом жесткости (10) выражаются в виде нелинейных функций от деформаций.

В результате, в методе упругих решений в выражениях внутренних усилий выделены упругая и пластическая составляющие, полученные на основе выражений (9) и (11):

$$\begin{aligned} T_1 &= t_1 - \Delta T_1, \\ T_2 &= t_2 - \Delta T_2, \\ S_1 &= -S_2 = s_1 - \Delta S_1, \\ M_1 &= m_1 - \Delta M_1, \\ M_2 &= m_2 - \Delta M_2, \\ H_1 &= -H_2 = h_1 - \Delta H_1, \end{aligned} \quad (15)$$

где функции, отражающие физическую нелинейность материала, определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \Delta T_1 &= \alpha_1 t_1 + \alpha_2 m_1 \\ \Delta T_2 &= \alpha_1 t_2 + \alpha_2 m_2 \\ \Delta S_1 &= \alpha_1 s_1 - \alpha_2 h_1 \\ \Delta M_1 &= \alpha_3 m_1 + \alpha_4 t_1 \\ \Delta M_2 &= \alpha_3 m_2 + \alpha_4 t_2 \\ \Delta H_1 &= \alpha_3 h_1 + \alpha_4 s_1 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{где: } \alpha_1 = 1 - \frac{J_1}{Eh}, \alpha_2 = \frac{12J_2}{Eh^2}, \alpha_3 = 1 - \frac{12J_3}{Eh^2}, \alpha_4 = \frac{J_2}{Eh} \quad (17)$$

Обобщая соотношения (15), получили, что общий тензор внутренних усилий (Т) можно представить в виде разложения его на упругий (t) и тензор дополнительный (ΔТ), отражающий физическую нелинейность задачи:

$$(T) = (t) - (\Delta T) \quad (18)$$

При подстановке разложения (18) в уравнения равновесия, правая часть системы получается состоящей в виде двух слагаемых:

$$\begin{aligned} L_{1q} &= -ABq_1 + L_1(\Delta T), \\ L_{2q} &= -ABq_2 + L_2(\Delta T), \\ L_{3q} &= -ABq_3 + L_3(\Delta T) \end{aligned} \quad (19)$$

где: q_1, q_2, q_3 – проекции компонентов внешней распределенной по поверхности нагрузки, $L_1(\Delta T), L_2(\Delta T), L_3(\Delta T)$ – компоненты, отражающие физическую нелинейность.

Таким образом, при решении задачи методом упругих решений полная система уравнений состоит в виде следующей суммы систем уравнений.

При подстановке в уравнения равновесия функций внутренних усилий в форме (15) в правой части системы уравнений равновесия появляются слагаемые, выражающие физическую нелинейность материала тонкой оболочки. В каждом приближении система (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(T_{1n}B)}{\partial\alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial(S_n A^2)}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} T_{2n} + \frac{2}{R_2} \frac{\partial A}{\partial\beta} H_n + \\ & + \frac{1}{R_1} \left[\frac{\partial(M_{1n}B)}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_{2n} + 2 \left(\frac{\partial H_n A}{\partial\beta} \right) \right] = -ABq_{1n} + L_1(\Delta T)_n, \\ & \frac{\partial(T_{2n}A)}{\partial\beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial(S_n B^2)}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta} T_{1n} + \frac{2}{R_1} \frac{\partial B}{\partial\alpha} H_n + \\ & + \frac{1}{R_2} \left[\frac{\partial(M_{2n}A)}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta} M_{1n} + 2 \left(\frac{\partial H_n B}{\partial\alpha} \right) \right] = -ABq_{2n} + L_2(\Delta T)_n, \\ & \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[\frac{\partial(M_{1n}B)}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_{2n} + \frac{1}{A} \frac{\partial(H_n A^2)}{\partial\beta} \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial\beta} \left\{ \frac{1}{B} \left[\frac{\partial(M_{2n}A)}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta} M_{1n} + \frac{1}{B} \frac{\partial(H_n B^2)}{\partial\alpha} \right] \right\} - \frac{T_{1n}}{R_1} - \frac{T_{2n}}{R_2} = -ABq_{3n} + L_3(\Delta T)_n \end{aligned} \quad (20)$$

Геометрические соотношения в каждом приближении определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1n} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u_n}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial\beta} v_n + \frac{w_n}{R_1}, \\ \varepsilon_{2n} &= \frac{1}{B} \frac{\partial v_n}{\partial\beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial\alpha} u_n + \frac{w_n}{R_2}, \\ \gamma_{12n} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{v_n}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{u_n}{A} \right), \\ \kappa_{1n} &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w_n}{\partial\alpha} - \frac{u_n}{R_1} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial\beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w_n}{\partial\beta} - \frac{v_n}{R_2} \right), \\ \kappa_{2n} &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w_n}{\partial\beta} - \frac{v_n}{R_2} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial\alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w_n}{\partial\alpha} - \frac{u_n}{R_1} \right), \\ \kappa_{12n} &= -\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial\beta} \frac{\partial w_n}{\partial\alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial\alpha} \frac{\partial w_n}{\partial\beta} \right) + \\ & + \frac{1}{R_1} \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{u_n}{A} \right) + \frac{1}{R_2} \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{v_n}{B} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Физические соотношения принимают вид:

$$\begin{aligned} T_{1n} &= t_{1n} - \Delta T_{1n}, \\ T_{2n} &= t_{2n} - \Delta T_{2n}, \\ S_{1n} &= -S_{2n} = s_{1n} - \Delta S_{1n}, \\ M_{1n} &= m_{1n} - \Delta M_{1n}, \\ M_{2n} &= m_{2n} - \Delta M_{2n}, \\ H_{1n} &= -H_{2n} = h_{1n} - \Delta H_{1n}, \end{aligned} \quad (22)$$

где: $t_{1n}, t_{2n}, s_{1n}, m_{1n}, m_{2n}, h_{1n}$ – представляют собой внутренние усилия и моменты для упругой оболочки, которая имеет те же деформации, что и рассматриваемая упругопластическая оболочка,

$$\begin{aligned} t_{1n} &= \frac{4}{3} Eh \left(\varepsilon_{1n} + \frac{1}{2} \varepsilon_{2n} \right), \\ t_{2n} &= \frac{4}{3} Eh \left(\varepsilon_{2n} + \frac{1}{2} \varepsilon_{1n} \right), \\ s_{1n} &= \frac{1}{3} Eh \gamma_{12n} \\ m_{1n} &= -\frac{1}{9} Eh^3 \left(\kappa_{1n} + \frac{1}{2} \kappa_{2n} \right), \\ m_{2n} &= -\frac{1}{9} Eh^3 \left(\kappa_{2n} + \frac{1}{2} \kappa_{1n} \right), \\ h_{1n} &= \frac{1}{18} Eh^3 \kappa_{12n}. \end{aligned} \quad (23)$$

Функции, отражающие физическую нелинейность материала, определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \Delta T_{1n} &= \alpha_{1n} t_{1,n-1} + \alpha_{2n} m_{1,n-1} \\ \Delta T_{2n} &= \alpha_{1n} t_{2,n-1} + \alpha_{2n} m_{2,n-1} \\ \Delta S_{1n} &= \alpha_{1n} s_{1,n-1} - \alpha_{2n} h_{1,n-1} \\ \Delta M_{1n} &= \alpha_{3n} m_{1,n-1} + \alpha_{4n} t_{1,n-1} \\ \Delta M_{2n} &= \alpha_{3n} m_{2,n-1} + \alpha_{4n} t_{2,n-1} \\ \Delta H_{1n} &= \alpha_3 h_{1,n-1} + \alpha_4 s_{1,n-1} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{где: } \alpha_{1n} = 1 - \frac{J_{1n}}{Eh}, \alpha_{2n} = \frac{12J_{2n}}{Eh^2}, \alpha_{3n} = 1 - \frac{12J_{3n}}{Eh^2}, \alpha_{4n} = \frac{J_{2n}}{Eh} \quad (25)$$

$$J_{1n} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Psi_n dz, \quad n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Psi_n z dz, \quad J_{3n} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Psi_n z^2 dz \quad (26)$$

$$\Psi_n = \frac{\sigma_{i,n-1}}{\varepsilon_{i,n-1}} \quad (27)$$

$$\varepsilon_{i,n-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_{\varepsilon,n-1} + 2z P_{\varepsilon\kappa,n-1} + z^2 P_{\kappa,n-1}} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon,n-1} &= \varepsilon_{1,n-1}^2 + \varepsilon_{1,n-1} \varepsilon_{2,n-1} + \varepsilon_{2,n-1}^2 + \gamma_{12,n-1}^2, \\ P_{\varepsilon\kappa,n-1} &= \varepsilon_{1,n-1} \kappa_{1,n-1} + \varepsilon_{2,n-1} \kappa_{2,n-1} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{1,n-1} \kappa_{2,n-1} + \varepsilon_{2,n-1} \kappa_{1,n-1}) + \\ &\quad + \gamma_{12,n-1} \kappa_{12,n-1} \\ P_{\kappa,n-1} &= \kappa_{1,n-1}^2 + \kappa_{1,n-1} \kappa_{2,n-1} + \kappa_{2,n-1}^2 + \kappa_{12,n-1}^2 \end{aligned} \quad (29)$$

Используя метод упругих решений, в первом приближении при $n = 1$ получаем значения компонентов напряженно-деформированного состояния, соответствующие упругой стадии работы материала, при этом компоненты (24) полагаются равными нулю. Значения деформаций первого приближения позволяет определить значения функций (24) для второго приближения, величины деформаций второго приближения служат для определения добавочных функций для третьего приближения и так далее. Достижение требуемой точности для значений компонентов напряженно-деформированного состояния тонкой изотропной оболочки требует выполнения n числа приближений.

Функции, выражающие физическую нелинейность задачи (22), не равны нулю в точках образования пластических деформаций. Соотношения (28), (29) позволяют определить области распространения пластических деформаций по толщине оболочки.

Например, зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций для случая линейного упрочнения выражается следующими линейными функциями:

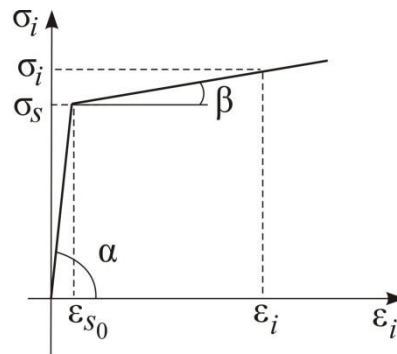


Рисунок 2. Зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций для случая линейного упрочнения материала (составлено автором)

Обозначены: σ_i, ϵ_i – значения интенсивности напряжений и интенсивности деформаций в произвольной точке, σ_s, ϵ_{s_0} – интенсивность напряжений и интенсивность деформаций на границе между упругой и пластической областями.

$$\text{При } \epsilon_i \leq \epsilon_{s_0} \sigma_i = E \epsilon_i, \tag{30}$$

$$\text{при } \epsilon_i > \epsilon_{s_0} \sigma_i = E \epsilon_i \left[1 - \lambda \left(1 - \frac{\epsilon_{s_0}}{\epsilon_i} \right) \right], \text{ где } \lambda = \frac{tg\alpha - tg\beta}{tg\alpha} = \frac{E - E_1}{E} \tag{31}$$

Обозначим минимальное значение функции интенсивности деформации ϵ_i по толщине оболочки h – ϵ_{i_0} , значение интенсивности деформаций на внутренней поверхности ($z = -h/2$) – ϵ_{i_1} , значение интенсивности деформаций на внешней поверхности ($z = h/2$) – ϵ_{i_2} , эти функции определяются по следующим формулам:

$$\epsilon_{i_0} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\epsilon - \frac{P_{\epsilon\kappa}^2}{P_\kappa}} \tag{32}$$

$$\epsilon_{i_1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\epsilon - h P_{\epsilon\kappa} + \frac{h^2}{4} P_\kappa} \text{ для } z = -h/2 \tag{33}$$

$$\epsilon_{i_2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\epsilon + h P_{\epsilon\kappa} + \frac{h^2}{4} P_\kappa} \text{ для } z = h/2 \tag{34}$$

Если минимальное значение функции интенсивности деформаций ϵ_{i_0} располагается в пределах толщины пластины h , на расстоянии z_0 от срединной поверхности при этом пластические деформации располагаются вблизи внешней и внутренней поверхностей (рис. 3), или со стороны одной из поверхностей, тогда величины жесткостей определяются из следующих соотношений.

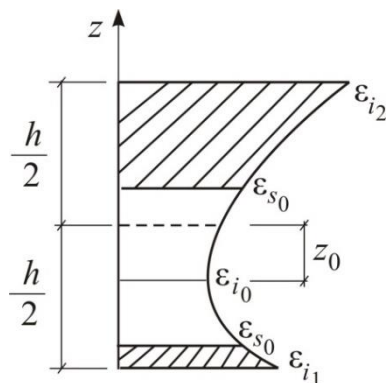


Рисунок 3. Области пластических деформаций, расположенные вблизи внешней и внутренней поверхностей оболочки (составлено автором)

$$\text{При } -\frac{h}{2} \leq \left(z_0 = -\frac{P_{\varepsilon\kappa}}{P_{\kappa}} \right) \leq \frac{h}{2} \quad (35)$$

$$J_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{P_{\kappa}}}$$

$$J_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{P_{\varepsilon\kappa}}{P_{\kappa}\sqrt{P_{\kappa}}} B_0 + \frac{3}{4P_{\kappa}} A_0, \quad (36)$$

$$J_3 = \frac{3\sqrt{3}}{8P_{\kappa}\sqrt{P_{\kappa}}} C_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{P_{\varepsilon\kappa}^2}{P_{\kappa}^2\sqrt{P_{\kappa}}} B_0 - \frac{3}{2} \frac{P_{\varepsilon\kappa}}{P_{\kappa}^2} A_0,$$

$$\text{где } A_0 = \int_{\varepsilon_{i1}}^{\varepsilon_{i2}} \sigma_i d\varepsilon_i,$$

$$B_0 = \int_{\varepsilon_{i0}}^{\varepsilon_{i1}} \frac{\sigma_i d\varepsilon_i}{\sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_{i0}^2}} + \int_{\varepsilon_{i0}}^{\varepsilon_{i2}} \frac{\sigma_i d\varepsilon_i}{\sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_{i0}^2}}, \quad (37)$$

$$C_0 = \int_{\varepsilon_{i0}}^{\varepsilon_{i1}} \sigma_i \sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_{i0}^2} d\varepsilon_i + \int_{\varepsilon_{i0}}^{\varepsilon_{i2}} \sigma_i \sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_{i0}^2} d\varepsilon_i$$

Если минимальное значение функции интенсивности деформаций ε_{i0} располагается за пределами толщины пластины h , на расстоянии z_0 от срединной поверхности (рис. 4а, б), при этом пластические деформации располагаются вблизи внешней (рис. 4а) или внутренней поверхности оболочки (рис. 4б), тогда величины жесткостей определяются с помощью коэффициентов A_1, B_1, C_1 .

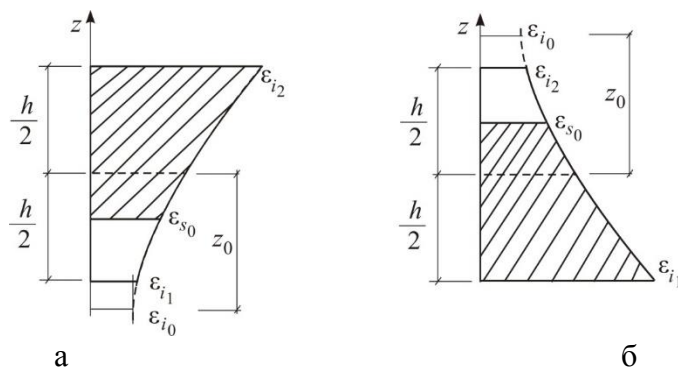


Рисунок 4. Области пластических деформаций при минимальном значении функции интенсивности деформаций ε_{i0} расположенном за пределами толщины пластины ε_{i0} :
 а – пластические деформации располагаются со стороны внешней поверхности оболочки, б – пластические деформации располагаются со стороны внутренней поверхности оболочки (составлено автором)

При $(z_0 = -\frac{P_{\epsilon\kappa}}{P_{\kappa}}) > \frac{h}{2}$ или $(z_0 = -\frac{P_{\epsilon\kappa}}{P_{\kappa}}) < -\frac{h}{2}$ константы A_0, B_0, C_0 в выражениях (36) заменяются на A_1, B_1, C_1 :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A_0 = \int_{\epsilon_{i_1}}^{\epsilon_{i_2}} \sigma_i d\epsilon_i, \\
 B_1 &= \frac{\epsilon_{i_2} - \epsilon_{i_1}}{|\epsilon_{i_2} - \epsilon_{i_1}|} \int_{\epsilon_{i_1}}^{\epsilon_{i_2}} \frac{\sigma_i d\epsilon_i}{\sqrt{\epsilon_i^2 - \epsilon_{i_0}^2}}, \\
 C_1 &= \frac{\epsilon_{i_2} - \epsilon_{i_1}}{|\epsilon_{i_2} - \epsilon_{i_1}|} \int_{\epsilon_{i_1}}^{\epsilon_{i_2}} \sigma_i \sqrt{\epsilon_i^2 - \epsilon_{i_0}^2} d\epsilon_i
 \end{aligned} \tag{38}$$

Результаты

Исследование сходимости полученных решений было проведено численным методом [1] при котором сравнивались каждые десятые приближения для всех разрешающих функций.

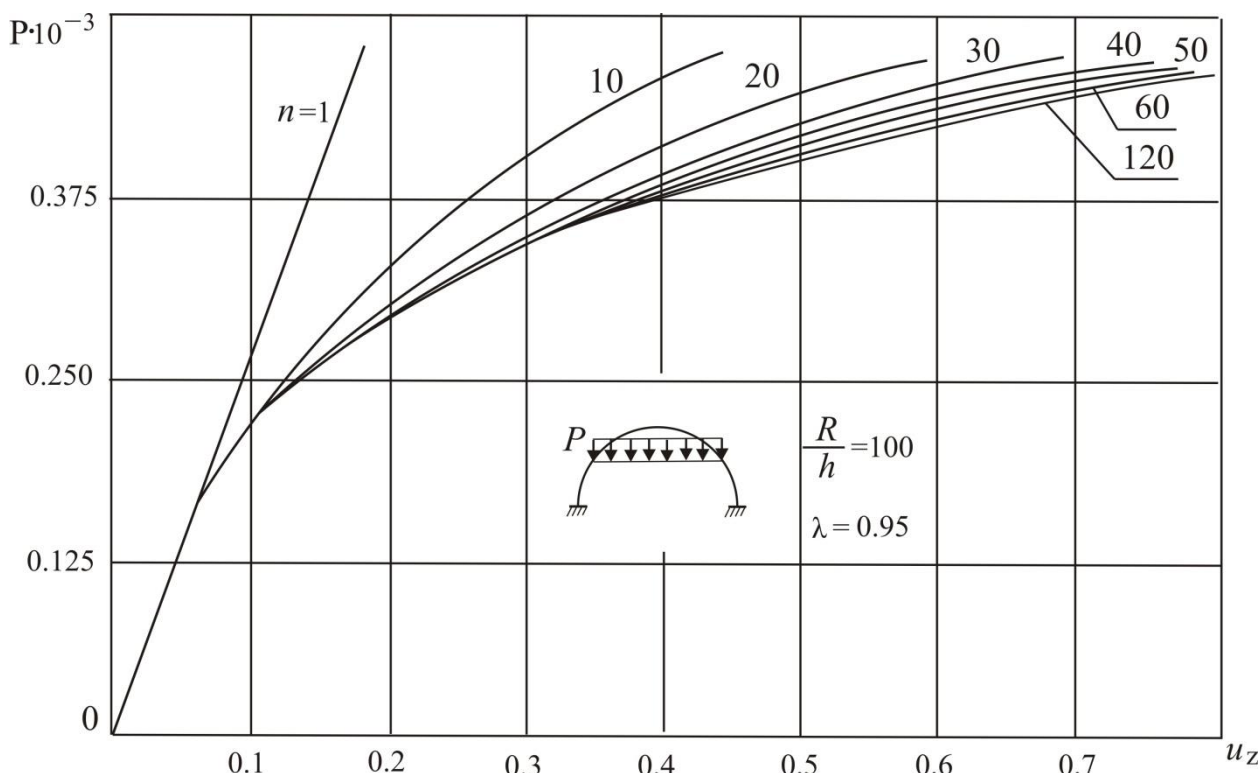


Рисунок 5. Диаграмма нагрузка – вертикальное перемещение $P - u_z$ (составлено автором)

Приведены результаты исследования для сферической оболочки с углом полураствора $\alpha_0 = 90^\circ$, отношением радиуса кривизны оболочки $R/h = 100$, при действии кольцевой нагрузки, приложенной в середине меридиана. На рис. 5 представлена диаграмма $P - u_z$ (нагрузка – вертикальное перемещение) в зависимости от числа приближений. Рассматривается сечение под точкой приложения нагрузки, в области появления пластических деформаций. Материал – сталь, модуль упругости материала $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, диаграмма с линейным упрочнением при $\lambda = 0.95$. На основании полученных зависимостей получается, что упругое решение пригодно для нагрузки до $P/Eh \approx 0.15 \cdot 10^{-3}$. Для достижения точности $\mu = 0.1 \%$ при нагрузках до $P/Eh \approx 0.2 \cdot 10^{-3}$ требуется 10 приближений, для нагрузок $P/Eh \approx 0.25 \cdot 10^{-3}$ – порядка 20-30 приближений, в случае больших нагрузок $P/Eh > 0.35 \cdot 10^{-3}$ – порядка 100 приближений.

Расчеты показали, что с ростом нагрузки необходимое число приближений для достижения требуемой точности возрастает. Для диапазона нагрузок, при которых теория малых упруго пластических деформаций становится не справедливой, метод упругих решений сходится слишком медленно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Астахова А. Я. Расчет упругопластических оболочек вращения при действии упругопластических нагрузок, МТТ. 1985. №4. С. 147-152.
2. Астахова А. Я., Леонтьев А. Н. Пластические деформаций в тонких замкнутых и кольцевых сферических оболочках. М.: МГСУ, 2000. Ч.1, 141-144 с. Строительные конструкции XXI века: сб. материалов, 21-23 ноября 2000 г., ч. 1,2. М.: Изд-во МГСУ, 2000.
3. Astakhova A., Plastic deformations in thin rotational shells, 01016, Published online, 28 November 2016, Number of page(s) 7. Matec Web Conf. V. 86, 5th International Scientific Conference: “Integration, Partnership and Innovation in Construction Science and Education”, Section 1 Structural Mechanics. 2016. <http://dx.doi.org/10/1051/Matecconf/20168601016>.
4. Власов В. З. Общая теория оболочек, М.: Изд. АН СССР, 1962. 520 с.
5. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек, М.: Наука, 1976. – 512 с.
6. Ильюшин А. А. Труды (1946-1966). В 2-х т. Т.2 Пластичность, М.: Физматлит, 2004. – 3,9 МБ.
7. Основы теории упругих тонких оболочек [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов бакалавриата, обучающихся по направлению подготовки 15.03.03 Прикладная механика, изучающих дисциплину «Теория пластин и оболочек» / Московский государственный строительный университет; А. А. Горшков, А. Я. Астахова, Н. Ю. Цыбин. – Учебное электронное издание. – Электрон. текстовые дан. – Москва: МГСУ, 2016. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM): цв. – ISBN 978-5-7264-1314-3: Загл. с этикетки диска <http://lib-04.gic.mgsu.ru/lib/2017/8.pdf>.
8. Цурков, И. С. К вопросу об интегрировании уравнений теории неупругих тонких оболочек Сборник трудов МИСИ им. В. В Куйбышева, №47, М., 1965. С. 3-16.
9. Цурков, И. С. Определение жесткостей упруго-пластической оболочки Сб. трудов МИСИ им. В. В Куйбышева, №47, М.: 1965. С. 17-23.
10. Численное решение краевых задач статики ортотропных слоистых оболочек вращения на ЭВМ типа М-220 / Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Василенко А. Т. и др. // АН УССР Институт механики, метод. пособие, К.: Наукова думка, 1971. 152 с.

Astakhova Avgustina Yakovlevna

Moscow state university of civil engineering, Russia, Moscow

E-mail: kanz@mgsu.ru

The model of calculation of thin shells beyond the elastic limit

Abstract. The paper focuses on the model of calculation of isotopic thin shells beyond the elastic limit. The definition of the stress-strain state in the shells is based on small elastic-plastic deformation theory and the method of elastic decisions. The decision is based on equilibrium equations and geometric relations of the linear theory of shells in curved coordinates and the ratio of the elasticity of small elastic-plastic deformation theory. The deformations based on Hirschhoff-Lave hypothesis is expressed in the form of two first power series expentions. The physical ratios for the specified ratio between the intensities of the deformations and the intensities of the stress are presented in the form of the difference of elastic component and the functions expressing the physical nonlinearity of the material. The functions in resolving differential equations are incremental components to external load components. In the first order of smallness of the method of elastic decisions, incremental functions are concerned to be equal to zero and are determined by means of deformation values for the second order of smallness. Deformation values of the second order of smallness serve to the determination of incremental functions for the third order of smallness etc. The functions and the relations afforded to determine the range of plastic deformations according to the thickness of the shell are presented. The conformation of the convergence of the method of elastic decisions by the example of the spherical shell boundary conditions under the action of the radial loads applied to the middle of the Meridian is provided.

Keywords: thin shells; isotopic material; shells theory; curved coordinates; equilibrium equations; geometric relations; the ratio of the elasticity; elastic-plastic; the shell boundary