

Интернет-журнал «Наукоедение» ISSN 2223-5167 <http://naukovedenie.ru/>

Том 9, №3 (2017) <http://naukovedenie.ru/vol9-3.php>

URL статьи: <http://naukovedenie.ru/PDF/71TVN317.pdf>

Статья опубликована 15.06.2017

Ссылка для цитирования этой статьи:

Попов В.С., Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование взаимодействия пульсирующего слоя вязкой жидкости с круглыми пластинами, между которыми он находится // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 9, №3 (2017) <http://naukovedenie.ru/PDF/71TVN317.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

Выполнено при поддержке гранта РФФИ 15-01-01604-а

УДК 532.517.2:539.3

Попов Виктор Сергеевич

ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Россия, Саратов¹
Профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ»

Доктор технических наук

E-mail: vic_p@bk.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9582-7195>

РИНЦ: http://elibrary.ru/author_items.asp?id=13615

SCOPUS: <http://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=55627876864>

Попова Анна Александровна

ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Россия, Саратов
Доцент кафедры «Прикладная математика и системный анализ»

Кандидат технических наук

E-mail: anay_p@bk.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7786-1680>

РИНЦ: http://elibrary.ru/author_items.asp?id=614859

SCOPUS: <http://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=55053629800>

Христофорова Алевтина Владимировна

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Балашовский институт СГУ, Россия, Балашов

Доцент кафедры «Математика»

Кандидат физико-математических наук

E-mail: alevtinahristoforova@yandex.ru

РИНЦ: http://elibrary.ru/author_items.asp?id=499356

**Математическое моделирование взаимодействия
пульсирующего слоя вязкой жидкости с круглыми
пластинами, между которыми он находится**

Аннотация. В статье изучена механическая модель узкого канала, стенки которого образованы соосными упругими круглыми пластинами. Между пластинами находится тонкий пульсирующий слой вязкой несжимаемой жидкости. Пульсация давления в жидкости происходит за счет заданного гармонического закона пульсации давления жидкости на торцах. Используя метод приведенной массы, выполнен переход от упругих систем с распределенной массой и жесткостью (круглых пластин) к моделям с сосредоточенной массой - одномассовым

¹ 410054, Саратов, Саратовская обл., Политехническая ул., 77

моделям. Определены приведенные массы и коэффициенты жесткости данных моделей. Исследована осесимметричная задача. Разработана математическая модель рассматриваемой механической системы, которая представляет собой систему уравнений динамики вязкой жидкости и уравнения одномассовых моделей, с соответствующими краевыми условиями. Краевые условия задачи следующие: на границах контакта жидкость прилипает к пластинам; ограниченность давления на оси симметрии, а также условие свободного истечения жидкости. В работе предложены безразмерные малые параметры и переменные задачи. В частности, за малых параметры приняты относительные амплитуды перемещений пластин и поперечный размер слоя жидкости в канале. Задача гидроупругости решена для режима установившихся гармонических колебаний. Построены амплитудно-частотные характеристики круглых пластин, и давления в слое жидкости.

Ключевые слова: гидроупругие колебания; вязкая жидкость; круглая пластина; математическое моделирование; одномассовая модель; амплитудно-частотные характеристики

Математическое моделирование динамики взаимодействия упругих элементов конструкций с жидкостью является важной задачей при разработке и исследовании поведения элементов современных приборов и машин. Например, данным вопросам посвящены монографии [1-2]. К одной из первых работ по изучению гидроупругих колебаний можно отнести работу [3], в ней рассмотрены собственные колебания круглой пластины, взаимодействующей с идеальной несжимаемой жидкостью. Колебания круглой пластины, плавающей на поверхности жидкости, исследованы в [4], жидкость считается идеальной и несжимаемой. Моделирование колебаний круглой пластины, погруженной в идеальную жидкость проведено в [5]. Изгибные колебания прямоугольной пластины, погруженной в идеальную жидкость, в плоской постановке исследованы в [6]. Математическая модель для исследования хаотических гидроупругих колебаний пластины, взаимодействующей с потоком идеальной несжимаемой жидкости, предложена в [7]. Изгибные колебания балки, взаимодействующей с идеальной жидкостью, изучены в [8], на основе решения задачи гидроупругости разработана математическая модель для прогнозирования кавитационного ресурса гильзы двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением.

Однако, в указанных выше работах не осуществлялся учет вязкости жидкости, что крайне важно для учета демпфирующих свойств окружающей упругую конструкцию жидкости. В монографиях [9, 10] рассмотрены вопросы гидроупругих колебаний цилиндрических оболочек, окруженных слоем вязкой несжимаемой жидкости применительно к гироскопическим приборам и двигателям внутреннего сгорания с водяным охлаждением. В работе [11] предложена математическая модель демпфирующих свойств слоя вязкой жидкости при рассмотрении гидроупругих колебаний бесконечно длинной балки. В работе [12], рассмотрены колебания консольно закрепленной пластины, находящейся в потоке вязкой несжимаемой жидкости. Работы [13-19] посвящены вопросам математического моделирования гидроупругих колебаний однородных, ребристых и трехслойных пластин, взаимодействующих с тонким слоем вязкой несжимаемой жидкости. Исследование взаимодействие потока вязкой жидкости и балки-пьезопреобразователя с целью получения энергии от потока выполнено в работе [20]. В работе [21] исследовано взаимодействие вибрирующих дисков с вязкой жидкостью, находящейся между ними. Математическое моделирование колебаний упруго закрепленной стенки клиновидного канала с вязкой жидкостью проведено в работах [22, 23]. В работе [24], рассмотрены гидроупругие колебания стенок щелевого канала, установленного на упругое основание. Вместе с тем, представляет интерес исследование колебаний соосных круглых пластин, образующих стенки канала, и взаимодействующих с пульсирующей вязкой жидкостью.

Рассмотрим узкий канал, образованный двумя концентрически расположенными круглыми упругими пластинами 1 и 2 и заполненный вязкой пульсирующей жидкостью 3 (см. рис. 1а). Радиус пластин R , а их толщина h_1 и h_2 соответственно. Пластины жестко защемлены по контуру. Толщина слоя жидкости между пластинами $\delta_0 \ll R$, при этом также будем полагать, что $R \gg h_1$ и $R \gg h_2$. Амплитуды прогибов пластин w_{1m} и w_{2m} значительно меньше δ_0 . Свяжем цилиндрическую систему координат $Orz\varphi$ с центром пластины 1. Будем полагать, что на контуре канала жидкость свободно истекает под уровень в ту же жидкость, в которой поддерживается заданный гармонический закон пульсации давления $P_0 + p(\omega t)$. Вследствие осевой симметрии канала, далее рассмотрим осесимметричную задачу. Принимая во внимание вязкость жидкости, будем исследовать режим установившихся гармонических колебаний, так как переходные процессы будут быстро затухать [25].

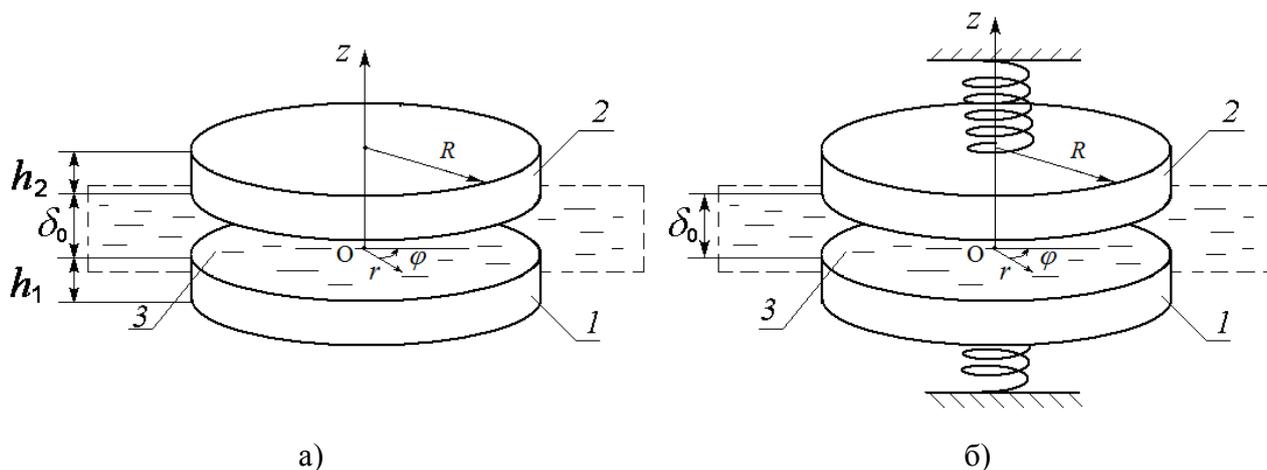


Рисунок 1. Щелевой канал с вязкой жидкостью, образованный двумя круглыми пластинами (а) и расчетная схема данного канала (б) при переходе к одномассовым системам (составлено авторами)

Закон изменения давления на контуре представим в виде:

$$p = p_0 + p_m \sin \omega t, \tag{1}$$

здесь: P_0 - статический уровень давления, p_m - амплитуда пульсация давления, ω - частота; t - время.

Прогибы каждой из пластин с учетом их жесткого защемления на торцах можно задать в виде:

$$w_i = w_{im} \sum_{k=1}^{\infty} (R_{ik}^0 + R_{ik}(\tau)) \left[\frac{J_0(\beta_k \xi)}{J_0(\beta_k)} - \frac{I_0(\beta_k \xi)}{I_0(\beta_k)} \right], \quad \xi = \frac{r}{R}. \tag{2}$$

здесь: $R_{ik}(\tau)$ - гармоническая функция времени, R_{ik}^0 - постоянная, J_0, I_0 - функции Бесселя (первого рода нулевого порядка и модифицированная нулевого порядка, соответственно). Значения β_k определяются из решения трансцендентного уравнения

$$I_1(\beta_k)/I_0(\beta_k) = -J_1(\beta_k)/J_0(\beta_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

где: $J_1(\beta_k), I_1(\beta_k)$ - функция Бесселя и модифицированная функция Бесселя первого порядка. Числовые значения корней β_k можно найти в [26].

При разработке математической модели рассматриваемой колебательной системы сосредоточим свое внимание на изучении колебаний пластин на основной моде. Кроме того, сделаем переход от упругих систем с распределенной массой и жесткостью (пластин) к моделям с сосредоточенной массой, т.е. к абсолютно жестким дискам с эквивалентными массами m_1 и m_2 , имеющих подвес на пружинах с эквивалентными жесткостями. Принимая во внимание, что основной моде колебаний пластин соответствует первый член (2), далее ограничимся только его рассмотрением. Таким образом, в предлагаемом подходе согласно [27, 28] прогибы пластин при их колебаниях будем моделировать как перемещения жестких дисков имеющих упругую связь, т.е. перейдем к расчетной схеме, представленной на рис. 1б. В этом случае необходимо определить m_1 , m_2 и n_1 , n_2 . Выражения для m_1 и m_2 находим из условия равенства кинетической энергии упругих круглых пластин и жестких дисков с упругой связью, т.е.

$$m_i = (w_{ai})^{-2} 2\pi\rho_i h_i \int_0^R r(w_i(r))^2 dr, \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

здесь: ρ_i - плотность материала пластины, $w_i(x)$ - форма прогиба пластины, w_{ai} - прогиб пластины в точке сосредоточения массы $x = a$.

Выражения для n_1 , n_2 найдем из условия совпадения статического прогиба пластин $w_{i\max}$, при действии равномерно распределенной нагрузки эквивалентной силе $F = 1$ Н, со статическим перемещением одномассовых систем

$$n_i = F^* / w_{i\max}. \quad (4)$$

В результате с учетом (2)-(4) получаем следующие выражения для m_1 , m_2 и n_1 , n_2

$$m_i = \frac{2J_0(\beta_1)I_0(\beta_1)\pi R^2 h_i \rho_i}{I_0(\beta_1) - J_0(\beta_1)}, \quad n_i = \frac{J_0(\beta_1)\pi R^2 \beta_1 D_i \beta_1^5 / R^4}{2J_1(\beta_1)}, \quad D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \mu_i^2)}, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

здесь: μ_i - коэффициент Пуассона материала i -ой пластины, E_i - модуль Юнга материала i -ой пластины.

Таким образом, в рамках разрабатываемой математической модели, колебания круглых пластин-стенок канала будут описываться следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + n_1 z_1 &= N_1, \\ m_2 \ddot{z}_2 + n_2 z_2 &= N_2, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь: $z_1 = z_{1m} f_1(\omega t)$ - закон движения пластины 1 как одномассовой системы (жесткого диска 1), $z_2 = z_{2m} f_2(\omega t)$ - закон движения пластины 2 как одномассовой системы (жесткого диска 2), z_{1m} , z_{2m} - амплитуды колебаний жестких дисков 1 и 2, n_1 , n_2 - силы, действующие со стороны вязкого слоя жидкости на жесткие диски.

Выражения для n_1 , n_2 имеют вид

$$N_1 = \int_0^{2\pi R} \int_0^0 q_{zz} r d\varphi dr \quad \text{при } z = z_{1m} f_1(\omega t); \quad (7)$$

$$N_2 = - \int_0^{2\pi} \int_0^R q_{zz} r dr d\varphi \quad \text{при } z = \delta_0 + z_{2m} f_2(\omega t),$$

где $q_{zz} = -p + 2\rho\nu(\partial u_r / \partial r)$ - нормальное напряжение в слое вязкой жидкости [1, 2].

Движение вязкой жидкости в узком канале является ползущим [22, 23], следовательно, уравнения его динамики представляют собой уравнения Навье-Стокса и уравнение неразрывности без инерционных членов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right), \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где: ρ - плотность жидкости, u_r , u_z - компоненты вектора скорости, p - давление в жидкости, ν - коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Краевые условия уравнений (8) состоят в условиях прилипания жидкости к непроницаемым поверхностям пластин, условие для давления на торцах пластин, условия ограниченности давления на оси симметрии:

$$u_r = 0, \quad u_z = dz_1/dt \quad \text{при } z = z_{1m} f_1(\omega t),$$

$$u_r = 0, \quad u_z = dz_2/dt \quad \text{при } z = \delta_0 + z_{2m} f_2(\omega t), \quad (9)$$

$$p = p_0 + p_m \sin \omega t \quad \text{при } r = R, \quad r \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0. \quad (10)$$

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \psi = \delta_0/R \ll 1, \quad \lambda = z_{1m}/\delta_0 \ll 1, \quad \tau = \omega t, \quad \xi = r/R, \quad \zeta = z/\delta_0, \\ u_z = z_{1m} \omega U_\zeta, \quad u_r = z_{1m} \omega U_\xi / \psi, \quad p = p_0 + p(\tau) + \rho \nu z_{1m} \omega (\delta_0 \psi^2)^{-1} P. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь ψ , λ - параметры, характеризующие задачу.

Учитывая безразмерные переменные (11) в (6)-(10) получаем:

- безразмерные уравнения динамики жидкости

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2} + \psi^2 \left(\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} - \frac{U_\xi}{\xi^2} \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \psi^2 \left[\psi^2 \left(\frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} \right]$$

$$\frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} U_\zeta + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0$$

- уравнения динамики пластин-стенок канала

$$m_1 \ddot{z}_1 + n_1 z_1 = -\pi R^2 (p_0 + p(\tau)) - \frac{2\pi R^2 \rho v z_{1m} \omega}{\delta_0 \psi^2} \int_0^1 \left(P - 2\psi^2 \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) \xi d\xi, \quad (13)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + n_2 z_2 = \pi R^2 (p_0 + p(\tau)) + \frac{2\pi R^2 \rho v z_{1m} \omega}{\delta_0 \psi^2} \int_0^1 \left(P - 2\psi^2 \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) \xi d\xi$$

Краевые условия (9), (10) примут вид

$$U_\xi = 0, U_\zeta = \frac{df_1}{d\tau} \text{ при } \zeta = \lambda f_1(\tau); \quad U_\xi = 0, U_\zeta = \frac{z_{2m}}{z_{1m}} \frac{df_2}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1 + \lambda(z_{2m}/z_{1m})f_2(\tau); \quad (14)$$

$$P = 0 \text{ при } \xi = 1, \quad \xi \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0. \quad (15)$$

Принимая во внимание, что $\psi \ll 1$ уравнения (12) и (13) упрощаются, так как в них можно пренебречь членами при ψ^2 . Кроме того, можно заметить, что в рассматриваемой постановке $\lambda = o(1)$, а $z_{2m}/z_{1m} = O(1)$. В этом случае, получаем следующую задачу динамики тонкого слоя вязкой жидкости:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} U_\zeta + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \quad (16)$$

с краевыми условиями

$$U_\xi = 0, U_\zeta = \frac{df_1}{d\tau} \text{ при } \zeta = 0; \quad U_\xi = 0, U_\zeta = \frac{z_{2m}}{z_{1m}} \frac{df_2}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1; \quad (17)$$

$$P = 0 \text{ при } \xi = 1, \quad \xi \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0,$$

а уравнения динамики пластин-стенок канала запишутся как

$$m_1 \ddot{z}_1 + n_1 z_1 = -\pi R^2 (p_0 + p(\tau)) - \frac{2\pi R^2 \rho v z_{1m} \omega}{\delta_0 \psi^2} \int_0^1 P \xi d\xi, \quad (18)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + n_2 z_2 = \pi R^2 (p_0 + p(\tau)) + \frac{2\pi R^2 \rho v z_{1m} \omega}{\delta_0 \psi^2} \int_0^1 P \xi d\xi$$

Решение уравнений (16) с краевыми условиями (17) определяет закон изменения безразмерного давления в слое жидкости между пластинами как

$$P = 3(\xi^2 - 1) \left[\frac{z_{2m}}{z_{1m}} \frac{df_2}{d\tau} - \frac{df_1}{d\tau} \right] \quad (19)$$

Подставляя (19) в уравнения динамики пластин-стенок канала (18) получаем

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + n_1 z_1 + K \dot{z}_1 - K \dot{z}_2 &= -\pi R^2 (p_0 + p_m \sin \omega t), \\ m \ddot{z}_2 + n z_2 + K \dot{z}_2 - K \dot{z}_1 &= \pi R^2 (p_0 + p_m \sin \omega t), \end{aligned} \quad (20)$$

здесь
$$K = \frac{3\pi R^2 \rho \nu}{2\delta_0 \psi^2}.$$

Решение системы (20) для заданного гармонического закона пульсации давления в слое жидкости (1) имеет вид

$$\begin{aligned} z_i &= (-1)^i \frac{\pi R^2 p_0}{n_i} + (-1)^i \pi R^2 p_m A_i(\omega) \sin(\omega t + \varphi_i(\omega)), \quad i=1,2, \\ \varphi_1(\omega) &= \varphi_2(\omega) = \arctg \left(\frac{K\omega(\omega^2(m_1 + m_2) - (n_1 + n_2))}{(n_1 - m_1\omega^2)(n_1 - m_2\omega^2)} \right) \\ A_1(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{(n_1 - m_1\omega^2)^2 + K^2\omega^2(n_1 + n_2 - \omega^2(m_1 + m_2))^2(n_2 - m_2\omega^2)^{-2}}}, \\ A_2(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{(n_2 - m_2\omega^2)^2 + K^2\omega^2(n_1 + n_2 - \omega^2(m_1 + m_2))^2(n_1 - m_1\omega^2)^{-2}}}, \end{aligned} \quad (21)$$

здесь: $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$ - амплитудные частотные характеристики (АЧХ) пластин 1 и 2; $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$ - фазовые частотные характеристики пластин 1 и 2.

Если неподвижна пластина 1 (т.е. она принимается абсолютно жесткой), получим

$$z_2 = \frac{\pi R^2 p_0}{n_2} + \pi R^2 p_m \frac{1}{\sqrt{(n_2 - m_2\omega^2)^2 + (K\omega)^2}} \sin(\omega t + \arctg(K\omega/(m_2\omega^2 - n_2))) \quad (22)$$

Аналогично для случая неподвижной пластины 2 имеем

$$z_1 = -\frac{\pi R^2 p_0}{n_2} - \pi R^2 p_m \frac{1}{\sqrt{(n_1 - m_1\omega^2)^2 + (K\omega)^2}} \sin(\omega t + \arctg(K\omega/(m_1\omega^2 - n_1))) \quad (23)$$

Переходя от безразмерного давления (19) к размерному давлению согласно (11) получим

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_m \sin \omega t + ((r/R)^2 - 1) K_p (\dot{z}_2 - \dot{z}_1), \\ K_p &= 3\rho \nu (\delta_0 \psi^2)^{-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

т.е. давление имеет три составляющих: первая - постоянный уровень давления, вторая обусловлена заданной пульсацией давления на торцах, которая передается без изменения (закон Паскаля для несжимаемой жидкости) и третья обусловлена вибрацией пластин-стенок канала. Третья составляющая давления с учетом (21) имеет вид

$$p^{(3)} = \pi R^2 p_m ((r/R)^2 - 1) K_p \omega \left(A_2(\omega) \sin(\omega t + \varphi_2 + \frac{\pi}{2}) + A_1(\omega) \sin(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}) \right) = \pi R^2 p_m A_p(\omega) ((r/R)^2 - 1) \sin(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}), \quad (25)$$

где: $A_p(\omega) = K_p \omega \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ - АЧХ давления в слое жидкости, $\operatorname{tg} \beta = (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) / (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)$.

Можно заметить, что выражение (25) справедливо и для частных случаев, когда пластина 1 или 2 неподвижны. В частности, если неподвижна пластина 1 полагаем $A_1 = 0$, а A_2 и φ_2 определяются по (22); если неподвижна пластина 2, то считаем, что $A_2 = 0$, а A_1 и φ_1 определяются по (23).

Таким образом, в работе разработана математическая модель для изучения динамики взаимодействия гармонически пульсирующего тонкого слоя вязкой жидкости с соосными упругими круглыми пластинами-стенками его ограничивающими. В рамках модели возможно изучение колебаний стенок канала на основной моде колебаний, а также давления, обусловленного упругими перемещениями пластин-стенок канала. Предложенная модель может быть использована для развития неразрушающих методов диагностирования упругих элементов конструкций по параметрам их вынужденных колебаний, а также для определения критических частот пульсаций давления в слое жидкости, проводящих к возникновению резонансных колебаний пластин-стенок и оценки давления в слое жидкости, вызванного гидроупругими колебаниями стенок канала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 591 с.
2. Морозов В.И., Пономарев А.Т., Рысев О.В. Математическое моделирование сложных аэроупругих систем. М.: Физматлит, 1995. 736 с.
3. Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water // Proc. Roy. Soc. A 98, 1921, pp. 205-216.
4. Amabili M. Vibrations of Circular Plates Resting on a Sloshing Liquid: Solution of the Fully Coupled Problem // Journal of Sound and Vibration. Vol. 245, no. 2, 2001, pp. 261-283.
5. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M., Hydroelastic Vibration of Circular Plates Immersed in a Liquid-filled Container with Free Surface // Journal of Sound and Vibration. 2013. Vol. 332. № 12. P. 3064-3085.
6. Haddara M.R. and Cao S. A Study of the Dynamic Response of Submerged Rectangular Flat Plates // Marine Structures. Vol. 9. №10. 1996. P. 913-933.
7. Аврамов К.В., Стрельникова Е.А. Хаотические колебания пластинок при их двустороннем взаимодействии с потоком движущейся жидкости // Прикладная механика. 2014. Т. 50. № 3. С. 86-93.

8. Индейцев Д.А., Полипанов И.С., Соколов С.К. Расчет кавитационного ресурса втулки судовых двигателей // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. №4. С. 59-64.
9. Могилевич Л.И., Попов В.С. Прикладная гидроупругость в машино- и приборостроении. Саратов: Саратовский ГАУ, 2003. 156 с.
10. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Упругогидродинамика машин и приборов на транспорте. М.: РГОТУПС, 2007. 169 с.
11. Önsay T. Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system // Journal of Sound and Vibration. 1993. Vol. 163. №2. P. 231-259.
12. Faria Cassio T., Inman Daniel J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler-Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // Mechanical Systems and Signal Processing. Vol. 45. №2. 2014. P. 317-329.
13. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругих элементов вибромшины со сдвливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №4. С. 23-32.
14. Попова А.А. Математическое моделирование динамических процессов в виброопоре с упругими элементами конструкции // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. Т. 1. № 4. С. 25-31.
15. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. № 78.
16. Попова А.А. Математическое моделирование процессов взаимодействия вязкой жидкости с тонкостенными ребристыми элементами гидродинамических демпферов и трубопроводов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Саратовский государственный технический университет. Саратов, 2008. 174 с.
17. Агеев Р.В., Кузнецова Е.Л., Куликов Н.И., Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическая модель движения пульсирующего слоя вязкой жидкости в канале с упругой стенкой // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 3. С. 17-35.
18. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 1. С. 3-11.
19. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N., Kuznetsova E.L. Mathematical model of three-layer plate interaction with viscous incompressible liquid layer under foundation vibration // Applied Mathematical Sciences. 2015. Т. 9. № 112. С. 5551-5559.
20. Akcabay D.T., Young Y.L. Hydroelastic Response and Energy Harvesting Potential of Flexible Piezoelectric Beams in Viscous Flow // Physics of Fluids. 2012, Vol.24. № 5.
21. Могилевич Л.И., Попов В.С. Исследование взаимодействия слоя вязкой несжимаемой жидкости со стенками канала, образованного соосными вибрирующими дисками // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2011. № 3. С. 42-55.

22. Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N. Mathematical modeling of elastically fixed wall longitudinal oscillations of wedge-shaped channel under foundation vibration // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2016. Т. 12. № 4. С. 9-17.
23. Popov V.S., Popova A.A., Sokolova D.L. Mathematical modeling of longitudinal oscillations tapered narrow channel wall under pulsating pressure of highly viscous liquid // Applied Mathematical Sciences. 2016. Т. 10. № 53. С. 2627-2635.
24. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия пульсирующей вязкой жидкости со стенками щелевого канала, установленного на упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 1. С. 15-23.
25. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.
26. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М.: Физматлит, 2005. 576 с.
27. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругого цилиндра со слоем вязкой несжимаемой жидкости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2004. № 5. С. 179-190.
28. Попов В.С., Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование колебаний пластины, установленной на упругом основании Винклера и взаимодействующей со штампом через слой вязкой жидкости // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». 2017. Том 9, №2. <http://naukovedenie.ru/PDF/91TVN217.pdf>.

Popov Victor Sergeevich

Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov
E-mail: vic_p@bk.ru

Popova Anna Aleksandrovna

Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov
E-mail: anay_p@bk.ru

Christoforova Alevtina Vladimirovna

Saratov state university
Balashov branch, Russia, Balashov
E-mail: alevtinahristoforova@yandex.ru

Mathematical modeling of the pulsating liquid layer interaction with the circular plates between which it placed

Abstract. The article considers a mechanical model of the narrow channel which formed by coaxial circular plates. There is a thin-pulsating layer of incompressible viscous fluid between the circular plates. The pulsation of fluid in channel caused by specified pressure pulsation law at the channel edges. The elastic circular plates are modeled as spring-mass system by equivalent mass method. Equivalent masses and stiffness of springs were defined. We studied axisymmetrical problem. The mathematical model of the narrow channel was built. It consist of fluid dynamics equations and equations of spring-mass system, as well as appropriate boundary conditions. We suggested the dimensionless variables and small parameters for the considered problem. The relative thickness of liquid in the channel and relative amplitudes of plates' deflections are taken as small parameters. We solved the hydroelastic problem for the regime of steady-state harmonic oscillations. The plates' amplitude-frequency characteristics and the pressure one are received.

Keywords: hydroelastic oscillations; viscous fluid; circular plate; mathematical modeling; spring-mass system; amplitude-frequency characteristics

REFERENCES

1. Gorshkov, A.G., Morozov, V.I., Ponomarev, A.T., Shklyarchuk F.N. Aerohydroelasticity of Structures, Moscow: Fizmatlit, 2000.
2. Morozov V.I., Ponomarev A.T., Rysev O.V., Mathematical Modeling of Complex Aeroelastic Systems, Fizmatlit, Moscow, 1995.
3. Lamb H. On the Vibrations of an Elastic Plate in Contact with Water // Proc. Roy. Soc. A 98, 1921, pp. 205-216.
4. Amabili M. Vibrations of Circular Plates Resting on a Sloshing Liquid: Solution of the Fully Coupled Problem // Journal of Sound and Vibration. 2001. Vol. 245. No 2. P. 261-283.
5. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M., Hydroelastic Vibration of Circular Plates Immersed in a Liquid-filled Container with Free Surface // Journal of Sound and Vibration. 2013. Vol. 332. No 12. P. 3064-3085.
6. Haddara M.R. and Cao S. A Study of the Dynamic Response of Submerged Rectangular Flat Plates // Marine Structures. 1996. Vol. 9. No 10. P. 913-933.

7. Avramov K.V., Strel'nikova E.A. Chaotic Oscillations of Plates Interacting on Both Sides with a Fluid Flow // *International Applied Mechanics*. 2014. 50 (3). P. 303-309.
8. Indeitsev D.A., Polipanov I.S., Sokolov S.K. Calculation of Cavitation Life-time of Ship Engine Liner // *Problemy Mashinostraniya i Nadezhnos'ti Mashin*. 1994. No.4. P. 59-64.
9. Mogilevich L.I., Popov V.S. Applied Hydroelasticity of Mashino-and Instrument Making: Saratov: Saratov State Agrarian University, 2003.
10. Kondratov D.V., Mogilevich L.I. Elastohydrodynamic of Machines and Devices on Transport, Moscow: RGOTUPS, 2007.
11. Önsay T. Effects of Layer Thickness on the Vibration Response of a Plate-fluid Layer System // *Journal of Sound and Vibration*. 1993. Vol. 163. No 2. P. 231-259.
12. Faria Cassio T., Inman Daniel J. Modeling Energy Transport in a Cantilevered Euler-Bernoulli Beam Actively Vibrating in Newtonian Fluid // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2014. Vol. 45. No 2. P. 317-329.
13. Popova A.A. Mathematical Modeling of Dynamic Processes in Vibration Support with Elastic Parts of Construction // *Bulletin of Saratov State Technical University*. 2007. Vol. 1. No. 4. P. 25-31.
14. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Dynamics of Interaction of Elastic Elements of a Vibrating Machine with the Compressed Liquid Layer Lying between Them // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2010. Vol. 39. No 4. P. 322-331.
15. Popova A.A. Mathematical Modeling of the Interaction of a Viscous Liquid with Thin-walled Ribbed Elements of Hydrodynamic Dampers and Pipelines. The dissertation on competition of a scientific degree of candidate of technical Sciences, Saratov state technical University. Saratov, 2008.
16. Ageev, R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Viscous Liquid Movement in a Flat Channel, Formed by a Vibrating Stamp and Simply Supported Plate // *Journal "Trudy MAI" Moscow Aviation institute (National Research University)*. 2014. No 78.
17. Ageev R.V., Kuznetsova E.L., Kulikov N.I., Mogilevich L.I., Popov V.S. Mathematical Model of Movement of a Pulsing Layer of Viscous Liquid in the Channel with an Elastic Wall // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. No 3. P. 17-35.
18. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. Vibrations of the Walls of a Slot Channel with a Viscous Fluid Formed by Three-layer and Solid Disks // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014. Vol. 43. No 1. P. 1-8.
19. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N., Kuznetsova E.L. Mathematical Model of Three-layer Plate Interaction with Viscous Incompressible Liquid Layer under Foundation Vibration // *Applied Mathematical Sciences*. 2015. Vol. 9. No 112. P. 5551-5559.
20. Akcabay D.T., Young Y.L. Hydroelastic Response and Energy Harvesting Potential of Flexible Piezoelectric Beams in Viscous Flow // *Physics of Fluids*. 2012. Vol.24. No 5.
21. Mogilevich L.I., Popov V.S. Investigation of the Interaction between a Viscous Incompressible Fluid Layer and Walls of a Channel Formed by Coaxial Vibrating Discs // *Fluid Dynamics*. 2011. Vol. 46. No 3, P. 375-388.
22. Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N. Mathematical Modeling of Elastically Fixed Wall Longitudinal Oscillations of Wedge-shaped Channel under Foundation

- Vibration // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2016. Vol. 12. No 4. P. 9-17.
23. Popov V.S., Popova A.A., Sokolova D.L. Mathematical Modeling of Longitudinal Oscillations Tapered Narrow Channel wall under Pulsating Pressure of Highly Viscous Liquid // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10. No 53. P. 2627-2635.
 24. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Interaction Dynamics of Pulsating Viscous Liquid with the Walls of the Conduit on an Elastic Foundation // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. Vol. 46. No 1. P. 12-19.
 25. Panovko Ya.G. and Gubanova I.I., Ustoichivost' i kolebaniya uprugikh sistem (Elastic Systems' Stability and Oscillations), Moscow: Nauka, 1987.
 26. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., and Yarovaya, A.V., Mekhanika sloistyx vyazkouprugoplasticheskikh elementov konstruksii (Mechanics of Layered Viscous Elastic-Plastic Structure Elements), Moscow: Fizmatlit, 2005.
 27. Mogilevich L.I., Popov V.S. Dynamics of Interaction of an Elastic Cylinder with a Layer of Viscous Incompressible Fluid // Mechanics of Solids. 2004. Vol. 39 No 5. P. 146-155.
 28. Popov V.S., Popova A.A., Hristoforova A.V. Mathematical Modeling of Oscillations of a Plate resting on Winkler Foundation and Interacting with a Stamp through the Viscous Liquid Layer // Naukovedenie. 2017. Vol. 9 No. 2. <http://naukovedenie.ru/PDF/91TVN217.pdf>.