Интернет-журнал «Науковедение» ISSN 2223-5167 http://naukovedenie.ru/

Том 8, №3 (2016) http://naukovedenie.ru/index.php?p=vol8-3

URL статьи: http://naukovedenie.ru/PDF/72EVN316.pdf

Статья опубликована 22.06.2016.

Ссылка для цитирования этой статьи:
Окунева Е.О. Сравнение математических моделей принятия решений в условиях определенности // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 8, №3 (2016) http://naukovedenie.ru/PDF/72EVN316.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 51-7

Окунева Елена Олеговна
АНО ВПО «Московский гуманитарно-экономический институт»
Филиал в г. Воронеж, Россия, Воронеж[1]
Профессор кафедры «Естественнонаучных дисциплин»
Кандидат педагогических наук
E-mail: oeo5@mail.ru

Сравнение математических моделей принятия решений в условиях определенности

Аннотация. Современные методы принятия решений ориентированы на учет всех особенностей качеств альтернатив, что существенно приближает формальные схемы к реальному миру. Поэтому, в настоящее время многокритериальное описание альтернатив становится все более распространенным. Одним из способов удовлетворения этих требований является постановка проблемы принятия решений на математическую основу. В статье рассматривается сравнительный анализ математических моделей принятия решений в условиях определенности, когда имеется полная информация о всех альтернативах по всем критериям. Анализ проводится разными методами оценок и осуществляется сравнение полученных результатов. Для оценивания привлекательности альтернатив при принятии решений в условиях определенности в рамках проведенного исследования используются два метода: классический метод, основанный на расчете функции полезности и метод Раша, основу которого составляет теория латентных переменных. Для сравнения результатов оценок альтернатив автором были проведены вычислительные эксперименты на основе корреляции Пирсона. Описываются преимущества и недостатки каждого метода. Результаты анализа показывают, что оценки, полученные по методу латентных переменных, обладают рядом преимуществ по сравнению с классическими методами принятия решений в условиях определенности.

Ключевые слова: принятие решений; критерий; альтернатива; математический метод; многокритериальные оценки; функция полезности; латентные переменные

Введение. Постановка задачи

Важнейшим аспектом разносторонних областей жизни и деятельности людей является процесс принятия оптимальных решений. Сложный характер рыночной экономики предъявляет более серьезные требования к обоснованию принятия решений. В большой

---

[1] 394088, г. Воронеж, бул. Победы, д. 50в, кв. 267

степени они связаны с вероятностным прогнозированием из-за неопределенности достижения конечного результата и влияния большого числа случайных и неконтролируемых факторов [1]. Одним из способов удовлетворения этих требований является постановка проблемы принятия решений на математическую основу.

Процесс принятия решения – это циклическая последовательность действий субъекта управления, направленных на разрешение проблем организации и заключающихся в анализе ситуации, генерации альтернатив, принятии решения и организации его выполнения [5].

На первой стадии при принятии решений проводится экономический анализ ситуации на микро- и макроструктуре, включающий поиск, сбор и обработку информации, а также выявляются и формулируются проблемы, требующие решения. Далее осуществляется экономико-математическое моделирование, которое является неотъемлемой частью любого исследования в области экономики с учетом необходимых принципов при построении моделей [9].

Технология менеджмента представляет управленческое решение как процесс, осуществляющийся в три стадии: подготовка решения, принятие решения, реализация решения. Схематически процесс принятия решений принято представлять в соответствии с рис. 1.

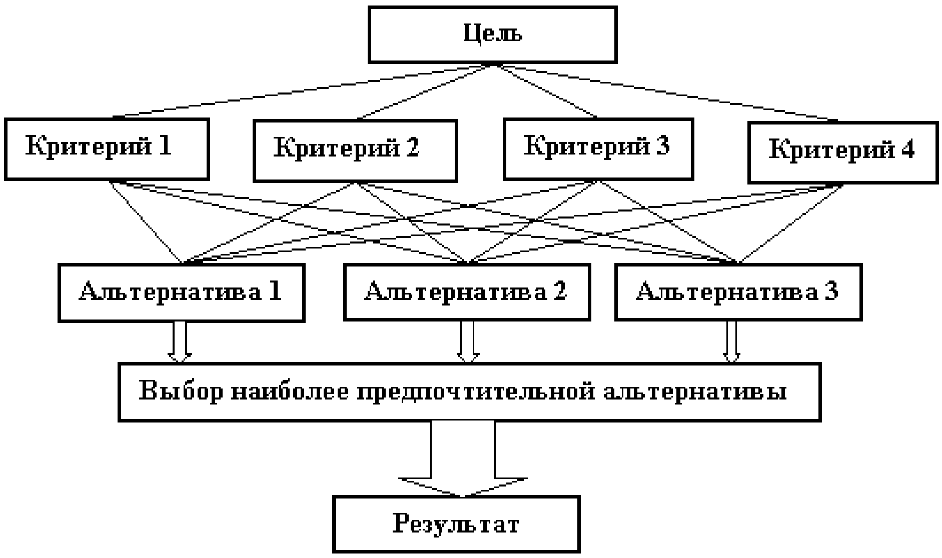

Рисунок 1. *Схема процесса принятия решений (составлено (разработано) автором)*

Однако, задачи принятия решений могут существенно отличаться по числу альтернатив и их наличию на момент выработки политики и принятия решений. Встречаются задачи, когда все альтернативы уже заданы и необходим лишь выбор из этого множества. Выбор осуществляется на основании сравнения альтернатив по критериям.

Критерии – это способ описания альтернативных вариантов решений, способ выражения различий между ними с точки зрения предпочтений ЛПР. Современные методы принятия решений ориентированы на учет всех особенностей качеств альтернатив, что существенно приближает формальные схемы к реальному миру. Поэтому, в настоящее время многокритериальное описание альтернатив становится все более распространенным. Рассмотрим ситуацию, когда имеется полная информация о всех альтернативах по всем критериям. Такая модель называется принятием решений в условиях определенности.

В работе ставится задача рассмотреть методы принятия решений в условиях определенности разными методами и сравнить полученные результаты.

Классическая модель многокритериальной оценки

Пусть имеется *n* альтернатив $A_i,\ i=1,2,...,n$ и *m* критериев $K_j,\ \ j=1,2,...,m$. Обозначим U_{ij} - оценку *i*-ой альтернативы по *j*-ому критерию. Причем все оценки альтернатив по критериям должны измеряться по одной и той же шкале.

Очевидно, что критерии имеют различную важность. Одни оказывают большее влияние на принятое в результате решение, другие меньшее. Назовем степень важности каждого критерия его весом. Пусть вес *j*-ого критерия равен W_j. Вес критерия измеряется по любой пропорциональной шкале.

Если известны оценки альтернатив, веса критериев и решается задача на максимизацию, то есть чем выше оценка альтернативы, тем она более привлекательна, то для принятия оптимального решения нужно вычислить функции полезности каждой альтернативы F_i по формулам:

$$F_i = \sum_{j=1}^{k} U_{ij} W_j, \quad i=1,2,...,n \tag{1}$$

и принимается та альтернатива, для которой функция полезности максимальна. Если решается задача минимизации (чем меньше оценка альтернатив по критериям, тем привлекательнее альтернатива), то выбирается альтернатива с меньшей функцией полезности.

Если локальные критерии оптимальности имеют различные единицы измерения (например, один критерий оценивается в рублях, другой – в минутах, третий – в экспертных баллах и т.д.), то для их сравнения и включения в функции полезности на равных (точнее пропорциональных весам) условиях используется метод нормализации. Под нормализацией критериев понимается такая последовательность процедур, с помощью которой все критерии приводятся к единому, безразмерному масштабу измерений. Рассмотрим один из наиболее часто применяемых на практике методов нормализации [3].

Предположим, что имеется *n* альтернатив и *k* критериев. Обозначим U_{ij} - оценку *i*-ой альтернативы по *j*-ому критерию, $\widehat{U}_j = \max_i (U_{ij})$ - максимальное значение *j*-го критерия по каждой альтернативе, $\breve{U}_j = \min_i (U_{ij})$ - минимальное значение *j*-го критерия по альтернативам. Тогда нормализованные оценки u_{ij} альтернатив по критериям в случае максимизации критериев (чем больше показатель, тем лучше):

$$u_{ij} = \frac{U_{ij} - \breve{U}_j}{\widehat{U}_j - \breve{U}_j}, \tag{2}$$

в случае минимизации критериев (чем меньше, тем лучше):

$$u_{ij} = \frac{\widehat{U}_{ij} - U_{ij}}{\widehat{U}_j - \breve{U}_j}. \tag{3}$$

В результате нормализации, вне зависимости, ведется максимизация или минимизация критерия, альтернатива, имеющая наилучший для лица, принимающего решения, показатель привлекательности по любому критерию получает оценку 1, наименее привлекательная имеет оценку 0, а остальные альтернативы имеют промежуточные оценки от 0 до 1 пропорционально их привлекательности между показателями наилучшей и наихудшей альтернатив. Функции полезности каждой альтернативы F_i вычисляются по формулам, аналогичным (1):

$$F_i = \sum_{j=1}^{k} u_{ij} W_j, \quad i = 1,2,...,n \qquad (4)$$

Принимается та альтернатива, для которой функция полезности максимальна.

Модель многокритериальной оценки, основанная на теории латентных переменных

Существует еще один подход к вычислению функции полезности альтернатив и принятию решений в условиях определенности. Он основан на теории оценивания латентных переменных. Объясним сначала, что означает термин «латентная переменная».

В математике и статистике под термином "*латентная переменная*" понимают вид переменных, которые в явном виде не измеряются. Они могут быть вычислены только с помощью наблюдаемых переменных по некоторым математическим моделям. Эти наблюдаемые переменные, которые можно измерить непосредственно, и на основании которых происходит оценка латентных переменных, называются *индикаторными переменными*. В настоящее время латентные переменные получили широкое распространение в самых различных областях человеческой деятельности. Они активно используются, например, в психологии, социологии, экономике, здравоохранении, образовании и т.д.

Такой показатель, как «степень привлекательности альтернативы» является типичной латентной переменной. А индикаторными переменными будут выступать оценки альтернатив по критериям, которые явно измеряются. На основании этих и подобных наблюдаемых переменных, строится математическая модель и вычисляется значение исследуемой латентной переменной – функция полезности или степень привлекательности альтернатив. В качестве математической модели, позволяющей оценивать латентные переменные, выступает модель Раша, названная так в честь датского математика Георга Раша, впервые предложившую данную модель [2, 10, 11].

Рассмотрим математическую модель задачи принятия решений в условиях определенности, основанную на методе Раша оценки латентных переменных [6, 7].

Пусть ЛПР имеет n альтернатив A_1, A_2, …, A_n и m критериев K_1, K_2, … K_m. Обозначим U_{ij} - оценку i-й альтернативы по j-му критерию. Эти оценки могут быть разной природы и иметь различную размерность. Для приведения оценок к единой шкале проводят процедуру нормализации по формулам (2) или (3), в результате которой все нормализованные оценки альтернатив по критериям u_{ij} примут значения из отрезка от 0 до 1.

Введем латентные переменные:

θ_I – степень привлекательности альтернативы A_i, которая аналогична функции полезности (1) или (4);

β_j – степень невыполнимости критерия: тем меньше ее значение, тем лучше альтернативы удовлетворяют данному критерию.

Пусть также w_j – вес j-го критерия.

Тогда оценки латентных переменных θ_i и β_j находятся в результате решения задачи оптимизации вида:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \left(u_{ij} - \frac{e^{\theta_i - \beta_j}}{1+e^{\theta_i - \beta_j}}\right)^2 \to \min \quad . \tag{5}$$

Оценки θ_i и β_j, полученные по (5), будут измеряться по линейным шкалам и начало отсчета в них будет неопределенным. Нулевой отсчет шкал можно выбрать так, чтобы все оценки были неотрицательными. Тогда задача оптимизации (5) будет дополнена ограничениями

$$\theta_i \geq 0; \ \beta_j \geq 0, \ i = 1,2,...,n, \ \ j = 1,2,...,m. \tag{6}$$

Решение задачи условной нелинейной оптимизации (5) и (6) возможно только с привлечением вычислительной техники, например, в среде MS Excel [8].

Анализ методов оценивания альтернатив

Для сравнения результатов оценок альтернатив, полученных описанными выше методами, были проведены вычислительные эксперименты. Генерировались матрицы U_{ij} разных размеров, а также вектора весов критериев W_j, по формулам (2) и (3) проводилась их нормализация, далее находились оценки привлекательности альтернатив обоими методами, по формулам (4) и (5), (6). Сравнивались полученные оценки привлекательности альтернатив. В частности, вычислялась корреляция Пирсона, которая в среднем для матриц размера не более 10х10 составляла 0,97 – 0,99. Для матриц большего размера коэффициент корреляции был еще выше.

Для проведения анализа остальных свойств и особенностей оценок приведем типичный пример.

Пусть имеется 10 альтернатив, которые оцениваются по 10 критериям и нормализованные оценки альтернатив по критериям соответствуют табл. 1.

Таблица 1

Нормализованные оценки альтернатив по критериям и веса критериев (составлено (разработано) автором)

Альтернативы	Критерии									
	$К_1$	$К_2$	$К_3$	$К_4$	$К_5$	$К_6$	$К_7$	$К_8$	$К_9$	$К_{10}$
A_1	0,70	0,30	0,13	0,64	0,41	0,58	0,77	0,06	0,68	0,36
A_2	0,75	0,12	0,16	0,97	0,63	0,07	0,49	0,16	0,51	0,57
A_3	0,21	0,26	0,67	0,49	0,87	0,55	0,42	0,42	0,51	0,28
A_4	0,20	0,02	0,14	0,36	0,39	0,57	0,95	0,40	0,00	0,23
A_5	0,34	0,31	0,77	0,63	0,47	0,07	0,63	0,87	0,30	0,44
A_6	0,47	0,90	0,84	0,95	0,51	0,65	0,24	0,71	0,53	0,05
A_7	0,93	0,62	0,89	0,33	0,29	0,30	0,17	0,99	0,56	0,83

Альтернативы	Критерии									
	$К_1$	$К_2$	$К_3$	$К_4$	$К_5$	$К_6$	$К_7$	$К_8$	$К_9$	$К_{10}$
$А_8$	0,52	0,45	0,11	0,29	0,72	0,66	0,64	0,09	0,84	0,24
$А_9$	0,93	0,07	0,36	0,11	0,76	0,51	0,55	0,64	0,33	0,01
$А_{10}$	0,86	0,53	0,30	0,24	0,33	0,09	0,42	0,81	0,07	0,78
Вес	0,316	0,902	0,199	0,915	0,367	0,153	0,772	0,173	0,383	0,078

По данным из табл. 1, вычислены оценки привлекательности каждой альтернативы по классическому методу и по методу, основанному на методе Раша оценки латентных переменных. Эти оценки приведены в табл. 2 и на рис. 2. По методу латентных переменных получены также оценки невыполнимости критериев β_j. Они приведены в табл. 3.

Таблица 2

Оценки альтернатив, полученные разными методами (составлено (разработано) автором)

Альтернатива	Абсолютные оценки		Нормализованные оценки	
	Классический метод	Метод латентных переменных	Классический метод	Метод латентных переменных
$А_1$	1,146	2,238	0,1219	0,1115
$А_2$	1,071	2,151	0,1140	0,1071
$А_3$	0,822	1,899	0,0875	0,0945
$А_4$	0,464	1,492	0,0494	0,0743
$А_5$	1,014	2,092	0,1078	0,1042
$А_6$	1,814	2,797	0,1930	0,1393
$А_7$	0,964	2,071	0,1025	0,1031
$А_8$	0,978	2,071	0,1041	0,1031
$А_9$	0,511	1,547	0,0544	0,0770
$А_{10}$	0,615	1,722	0,0655	0,0858

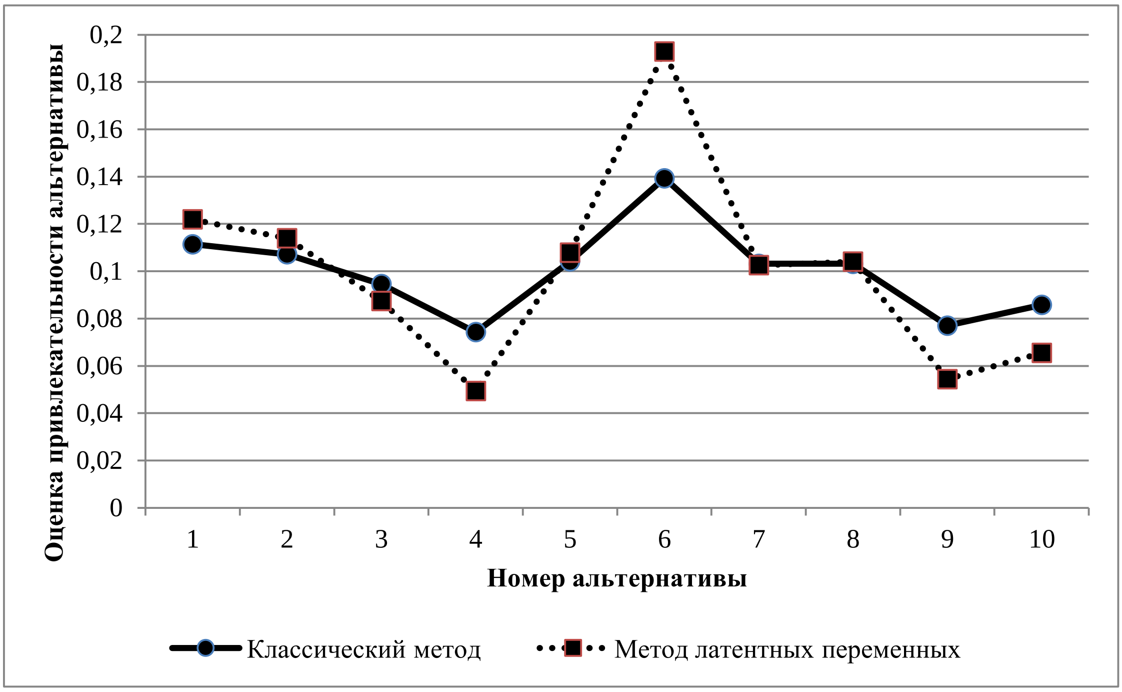

***Рисунок 2.** Оценки привлекательности альтернатив, полученные разными методами (составлено (разработано) автором)*

Таблица 3

Оценки невыполнимости критериев, полученных по методу латентных переменных (составлено (разработано) автором)

Критерий	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}
Оценка β_j	0,52	1,52	1,21	0,94	0,75	1,36	0,78	0,88	1,19	1,46

Коэффициент корреляции Пирсона для данного примера равен 0,994. Видно, что наиболее привлекательной альтернативой является A_6, а наихудшей A_4. Обратим внимание на то, что оценки альтернатив A_7 и A_8 по классическому методу одинаковые. Однако метод латентных переменных поставил A_8 выше. Это говорит о том, что этот метод более гибкий, т.к. учитывает свойство выполнимости критериев [4].

Таким образом, можно сделать вывод, что оценки, полученные по методу латентных переменных, обладают следующими преимуществами по сравнению с классическими методами принятия решений в условиях определенности:

1. Кроме оценок привлекательности альтернатив, данный метод позволяет получить дополнительно некоторые оценки, характеризующие сами критерии. Эти оценки критериев сами являются латентными переменными и имеют смысл невыполнимости критериев. Они показывают, насколько альтернативы в своей совокупности удовлетворяют каждому критерию. Чем меньше данный показатель, тем больше совокупная оценка критерия по всему множеству альтернатив, то есть тем в большей степени критерии выполняются на всей совокупности рассматриваемых альтернатив.
2. Оценки привлекательности альтернатив и невыполнимости критериев измеряются по линейной шкале.
3. Оценки привлекательности альтернатив являются их уникальными свойствами и не зависят от оценочных критериев.
4. Полученные оценки привлекательности альтернатив по методу латентных переменных являются более гибкими, так как учитывают показатель выполнимости критериев.

Однако, метод латентных переменных имеет и один существенный недостаток: математическая модель (5) и (6), используемая при расчетах, является более сложной и не позволяет провести расчеты аналитически. Для решения задачи требуется использовать вычислительную технику.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедева, Е.В., Основные вероятностные понятия как результат экономического прогнозирования их эмпирических прототипов / Е.В. Лебедева, В.Д. Селютин // Ученые записки Орловского государственного университета. Серия «Гуманитарные науки и социальные науки», №2, 2012.
2. Летова, Л.В. Семейство моделей Раша для объективного измерения латентных переменных. / Л.В. Летова, А.А. Маслак, С.А. Осипов // Информатизация образования и науки, 2013, №4. – С. 131-141.
3. Малыхин, В.И. Математические методы принятия решений: Учебное пособие / В.И. Малыхин, С.И. Моисеев // Воронеж: ВФ МГЭИ, 2009. 102 с.
4. Маслак, А.А. Сравнительный анализ оценок параметров модели Раша, полученных методами максимального правдоподобия и наименьших квадратов / А.А. Маслак, С.И. Моисеев, С.А. Осипов // Проблемы управления, №5, 2015. С. 58-66.
5. Мендель А.В. Модели принятия решений: учебное пособие для обучающихся, обучающихся по направлениям «Экономика» и «Менеджмент» – М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2013. 463 с.
6. Моисеев, С.И. Методы принятия решений, основанные на модели Раша оценки латентных переменных / С.И. Моисеев, А.Ю. Зенин // Экономика и менеджмент систем управления, №2.3 (16) 2015 г. С. 368-375.
7. Моисеев С.И. Модель оценки латентных переменных с непрерывными множествами исходных данных и ее приложения / С.И. Моисеев, Ю.В. Киреев, С.В. Гончаров // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 57. № в3.1. С. 161-167.
8. Моисеев, С.И. Модель Раша оценки латентных переменных, основанная на методе наименьших квадратов / С.И. Моисеев // Экономика и менеджмент систем управления. Научно-практический журнал. №2.1 (16), 2015. - С. 166-172.
9. Окунева Е.О., Моисеев С.И. Математические методы исследования экономики. – Воронеж: ВФ МГЭИ, 2013. 73 с.
10. Rasch G. Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests / G. Rasch. - Copenhagen, Denmark: Danish Institute for Educational Research, 1960.
11. Rasch Models. Foundations, Resent Developments and Applications / Editors Fischer G.H., Molenaar I.W. Springer, 1997.

Okuneva Elena Olegovna
Moscow humanitarian economic institute, Russia, Voronezh
E-mail: oeo5@mail.ru

Comparison of the mathematical models of decision making under the condition of distinctness

Abstract. Modern methods of decision-making are focused on accounting all features of qualities of alternatives and result in bringing formal schemes to the real world. Therefore, at the present time multicriteria description of alternatives is getting more wide-spread. One of the way to meet these requirements is the statement of the problem of decision-making on the mathematical basis. The article deals with the comparative analysis of the mathematical models of decision-making under the condition of distinctness when there is complete information about all alternatives by all criteria. The analysis is carried out by different methods of evaluation and the results are compared. For evaluation of attractiveness while decision-making under the condition of distinctness in the frame of the conducted research, two methods are used: classical method based on the utility function calculation and Rush method based on the theory of latent variables. The author has conducted computational experiments based on the Pearson correlation for the comparison of the results of the alternatives' evaluation. Advantages and disadvantages of each method are described. The results of the analysis show that the estimates obtained by the method of the latent variables have a number of advantages in contrast with the classical methods of decision-making under the condition of distinctness.

Keywords: decision-making; criterion; alternative; mathematical method; multicriteria evaluation; utility function; latent variables

REFERENCES

1. Lebedeva, E.V., Osnovnye veroyatnostnye ponyatiya kak rezul'tat ekonomicheskogo prognozirovaniya ikh empiricheskikh prototipov / E.V. Lebedeva, V.D. Selyutin // Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Gumanitarnye nauki i sotsial'nye nauki», №2, 2012.
2. Letova, L.V. Semeystvo modeley Rasha dlya ob"ektivnogo izmereniya latentnykh peremennykh. / L.V. Letova, A.A. Maslak, S.A. Osipov // Informatizatsiya obrazovaniya i nauki, 2013, №4. – S. 131-141.
3. Malykhin, V.I. Matematicheskie metody prinyatiya resheniy: Uchebnoe posobie / V.I. Malykhin, S.I. Moiseev // Voronezh: VF MGEI, 2009. 102 s.
4. Maslak, A.A. Sravnitel'nyy analiz otsenok parametrov modeli Rasha, poluchennykh metodami maksimal'nogo pravdopodobiya i naimen'shikh kvadratov / A.A. Maslak, S.I. Moiseev, S.A. Osipov // Problemy upravleniya, №5, 2015. S. 58-66.
5. Mendel' A.V. Modeli prinyatiya resheniy: uchebnoe posobie dlya obuchayushchikhsya, obuchayushchikhsya po napravleniyam «Ekonomika» i «Menedzhment» – M.:YuNITI-DANA, 2013. 463 s.
6. Moiseev, S.I. Metody prinyatiya resheniy, osnovannye na modeli Rasha otsenki latentnykh peremennykh / S.I. Moiseev, A.Yu. Zenin // Ekonomika i menedzhment sistem upravleniya, №2.3 (16) 2015 g. C. 368-375.
7. Moiseev S.I. Model' otsenki latentnykh peremennykh s nepreryvnymi mnozhestvami iskhodnykh dannykh i ee prilozheniya / S.I. Moiseev, Yu.V. Kireev, S.V. Goncharov // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii. 2014. T. 57. № v3.1. S. 161-167.
8. Moiseev, S.I. Model' Rasha otsenki latentnykh peremennykh, osnovannaya na metode naimen'shikh kvadratov / S.I. Moiseev // Ekonomika i menedzhment sistem upravleniya. Nauchno-prakticheskiy zhurnal. №2.1 (16), 2015. - S. 166-172.
9. Okuneva E.O., Moiseev S.I. Matematicheskie metody issledovaniya ekonomiki. – Voronezh: VF MGEI, 2013. 73 s.
10. Rasch G. Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests / G. Rasch. - Copenhagen, Denmark: Danish Institute for Educational Research, 1960.
11. Rasch Models. Foundations, Resent Developments and Applications / Editors Fischer G.H., Molenaar I.W. Springer, 1997.