Онишкова Анастасия Михайловна
Onishkova Anastasia
ООО «ИТСК»/Ltd “ITSC”
Главный специалист/Chief Specialist
E-Mail: aonishkova@gmail.com

Численное решение краевых задач с неизвестной границей для системы уравнений

The numerical solution of boundary-value problems with unknown interfaces for the system of equations

Аннотация: Разработан численный алгоритм решения некоторых задач математической физики (одномерных), заключающихся в определении минимума некоторого квадратичного функционала, заданного в области, содержащей заранее неизвестную границу.

The Abstract: A numerical algorithm for solving some problems of mathematical physics (one-dimensional), consisting in the determination of some low-cerned a quadratic functional defined in a region containing the previously unknown interface.

Ключевые слова: Краевая задача; функционал; минимум; переменная граница; ифференциальное уравнение.

Keywords: Boundary-value problem, the functional, unknown interface; differential equation.

***

Изучение многих физических процессов сводится к математической модели, исследование которой в свою очередь заключается в решении краевой задачи математической физики со свободной границей или поверхностью. В ходе решения такую неизвестную границу и требуется определить. Как правило, для поиска границы применяются различные численные методы. Суть решения заключается в определении экстремального значения некоторого функционала при известном начальном приближении.

В работе рассмотрен пример реализации данного метода к системе уравнений, где граница (Г) определяется точкой на отрезке.

Постановка одномерной задачи

Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вектор-функция $\underline{y}(x)$ определена на отрезке $[0,l]$, на концах отрезка выполняются краевые условия.

$B_1\, \underline{y} = 0$, при $x = 0$,

$B_2\, \underline{y} = 0$, при $x = l$,

где B_1 и B_2 – некоторые матрицы.

Функция $\underline{y}$ является решением системы трехточечной краевой задачи

$\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y})$, $\underline{y}$, $\underline{f} \in R^{2n}$

при $x\in(0, x_0)$, $x\in(x_0, l)$ и краевых условий на концах отрезка

$B_1 \underline{y} = 0$, x = 0

$B_2 \underline{y} = 0$, x = l

(здесь должно быть 2n условий), и условий согласования при $x = x_0$

$B_3 \underline{y}_+ = B_4 \underline{y}_-$, где y_+ и y_- – решения, получаемые предельным переходом при стремлении x к x_0 соответственно справа и слева. Здесь также должно быть 2n условий. Положение точки x_0 заранее неизвестно. Оно определяется на основе минимума некоторого функционала

$$\Phi = \int_0^{x_0} W_1[x, y]dx + \int_{x_0}^{1} W_2[x, y]dx,$$

где W_1, W_2 – некоторые квадратичные функции $\boldsymbol{y}$.

В качестве примера рассмотрим уравнение второго порядка.

$-y'' + g(x)\, y = h(x)$

$y(0) = y(l) = 0$

$$\left.\begin{aligned} y_+ &= y_- \\ k_+ y_+' &= k_- y_-' \end{aligned}\right\}$$ - условия совместимости при $x=x_0$,

где k_+ , k_- - заданные коэффициенты.

$W_1=W_2= y'^2/2+ g(x)y^2/2-h(x)y$

В результате работы разработан алгоритм решения трех точечной краевой задачи методом прогонки и минимизации соответствующего функционала.

Решение системы дифференциальных уравнений (1.1) будем проводить с помощью метода прогонки [13].

Рассмотрим разностные методы решения линейной краевой задачи на примере одного уравнения

$$\begin{aligned} &u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), (1.1) \\ &u(a) + a_1 u'(a) = b_1, (1.2) \\ &u(b) + a_2 u'(b) = b_2 \; (1.3) \qquad a \le x \le b \end{aligned} \qquad (1)$$

Выберем на $[a, b]$ равномерную сетку, т.е. множество точек $\omega = \{x_n\}_{n=1}^{N}$ таких, что $x_n = a + nh$, где $h = \dfrac{b-a}{N}$, $N = \left[\dfrac{b-a}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$, ε – точность расчета. Построим разностную задачу, имеющую порядок аппроксимации $0(h^2)$.

Используя разностные соотношения[13], получим для уравнения (1.1) дифференциальной задачи (1) разностное уравнение.

$$\frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + p_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + q_n y_n = f_n \quad 1 \le n \le N-1 .$$

Метод прогонки

Решение разностной системы

$$A_n y_{n-1} + B_n y_n + C_n y_{n+1} = f_n, \quad n = 1,\dots, N-1,$$

$$y_0 = \alpha_0 y_1 + \beta_0, \qquad (3)$$

$$y_N = \alpha_N y_{N-1} + \beta_N,$$

запишем в виде

$$y_n = \alpha_n y_{n+1} + \beta_n.$$

Из краевого условия (1.2) известны коэффициенты α_0 и β_0. Подставим $y_{n-1} = \alpha_{n-1} y_n + \beta_{n-1}$ в уравнение

$$A_n(\alpha_{n-1} y_n + \beta_{n-1}) + B_n y_n + C_n y_{n+1} = f_n \Rightarrow (A_n \alpha_{n-1} + B_n) y_n = f_n - A_n \beta_{n-1} - C_n y_{n+1}$$

$$y_n = -\frac{C_n}{(A_n \alpha_{n-1} + B_n)} y_{n+1} + \frac{f_n - A_n \beta_{n-1}}{(A_n \alpha_{n-1} + B_n)}$$

Отсюда следует, что можно вычислить все значения прогоночных коэффициентов α_n и β_n для n=1,...,N-1 (прямой ход прогонки), причем число операций O(N). Далее, с помощью краевого условия (1.3) вычисляются значения y_n для n=N и n=N-1

$$y_N = \alpha_N y_{N-1} + \beta_N$$

$$y_{N-1} = \alpha_{N-1} y_N + \beta_{N-1}.$$

Обратным ходом вычисляем искомые значения $\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$

$y_n = \alpha_n y_{n+1} + \beta_n$, n=N-1,N-2,...,1 ,0.

Метод прогонки точный и экономичный (требует 0(N) операций)

Метод прямых

Описанный выше метод может быть также использован при решении уравнений в частных производных, если воспользоваться методом прямых[14]. Далее в Главе 7 будет рассмотрено решение на основе метода конечных разностей.

Идея метода прямых состоит в сведении уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнения.

В качестве примера рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \qquad (4.1),$$

где u=u(x,t), $x \in [0,1]$ и предполагаются краевые условия

u(0,t)=u(1,t)=0

и начальные условия

$u(x,0)=u_0(x)$.

В уравнении (4.1) заменим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ конечными разностями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{2h},$$

где h - шаг сетки, $u_i(t)=u(x_i,t)$. Тогда (4.1) сводится к системе ОДУ

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_i\left[\frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{2h}\right] + f_i \qquad (4.2)$$

с начальными условиями

$u_i(0)=u_0(x_i)$.

Система уравнений (4.2) решается описанным выше методом прогонки.

Решение системы уравнений

Рассмотрим систему трех уравнений вида

$-y'' + g_1(x)\, y = h_1(x)$

$-y'' + g_2(x)\, y = h_2(x)$

$-y'' + g_3(x)\, y = h_3(x)$

Для каждого из уравнений выполнены граничные условия

$y(0) = y(l) = 0$

$y_+(x_0) = y_-(x_0)$

$k_+ y_+' = k_- y_-'$

И заданы коэффициенты k_+ , k_- .

Пусть для системы взяты следующие функции и коэффициенты

$g_{11}= -2$, $h_{11}= -(2+x(x^2-x))$, $g_{12}= -2$, $h_{12}= -(2+x(x^2-x))$, $k_{11}=1$, $k_{12}=1$;

$g_{21}= -1$, $h_{21}=-1$, $g_{22}=-x\sin(2x)$, $h_{22}= -\cos(x^2)$, $k_{21}=2$, $k_{22}= 5$;

$g_{31}=x^2$, $h_{31}= -x^2$, $g_{32}= -x^2$, $h_{32}=x^3$, $k_{31}=2$, $k_{32}=1$.

Здесь g_{ij},h_{ij} – функции, где i – номер уравнения, а j означает часть отрезка, на котором задана функция, то есть j=1 означает, что $x\in(0, x_0)$, а j=2 говорит, что $x\in(x_0, l)$. Аналогично для k_{ij} (j=1, когда $x\in(0, x_0)$, j=2, если $x\in(x_0, l)$).

Таким образом решение каждого уравнения системы сводится к решению задачи (3).

Применяя метод прогонки, получаем функционалы для каждого уравнения системы. Минимум суммарного функционала и есть неизвестная граница для системы.

Функционал для первого уравнения системы (Рис.1).

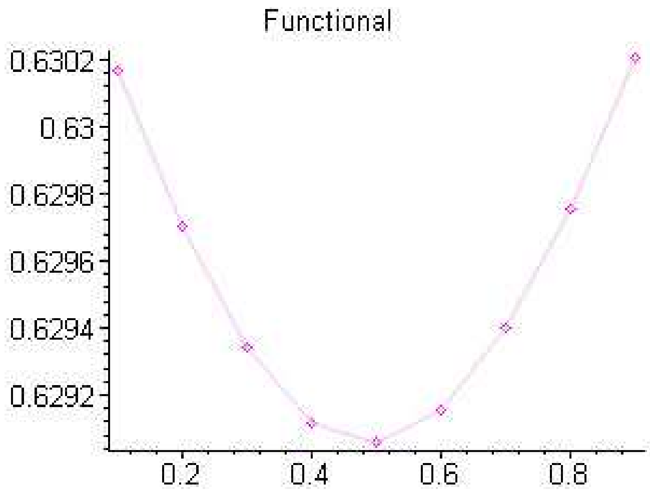

Рис. 1.

Функционал для второго уравнения системы (Рис.2).

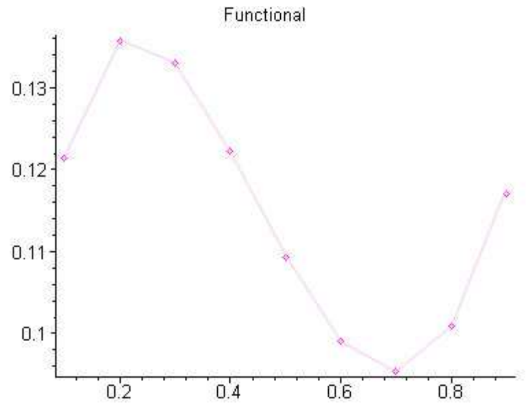

Рис. 2.

Функционал для третьего уравнения системы (Рис.3).

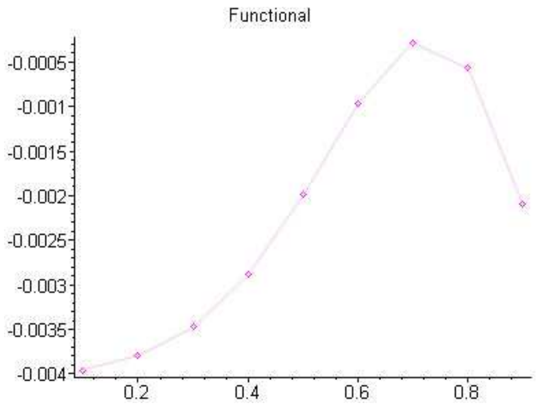

Рис. 3.

Суммарный функционал (Рис.4).

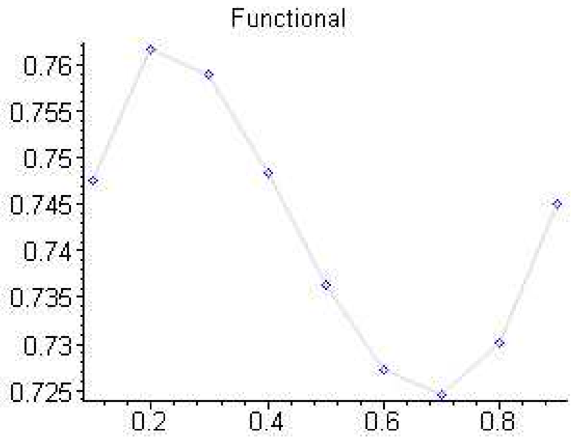

Рис. 4.

Таким образом, построен численный алгоритм на основе метода прогонки, позволяющий определить неизвестную границу для системы дифференциальных уравнений на отрезке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. –М.:Наука, 1985.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. –М.: Наука, 1987.
3. Гиббс Дж. Термодинамика. Статистическая механика. – М.:Наука, 1982, 584с.
4. Дьяконов В.П., Maple7: учебный курс. –СПб.: Питер, 2002.
5. Зеньковская С.М., Моршнева И.В., Цывенкова О.А. Методические указания к практикуму по курсу «Численные методы». Методы решения задач Коши и краевых задач. – Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 2001.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. –М.:Наука, 1978.
7. Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в Maple: Учебное пособие. – Белгород: Изд. Белаудит, 2001.
8. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. –М.: Мир, 1980.

Рецензент: Козулин Сергей Николаевич, ведущий программист, к.ф.-м.н., Система Лизинг 24 (ЗАО)