Цветкова Инна Владимировна
Zvetkova Inna Vladimirovna
ассистент кафедры «Высшая математика»,
assistant of the cathedra of of high mathematics
E-Mail: pilipenkoiv@mail.ru

Шамраева Виктория Викторовна
Shamraeva Victoria Victorovna
доцент кафедры «Высшая математика»
associate professor of the cathedra of of high mathematics
E-Mail: shamraeva@mail.ru

Ростовский государственный строительный университет,
кафедра «Высшая математика»
Rostov State University of Civil Engineering,
cathedra of high mathematics

05.13.18 - «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

Исследование модели финансового рынка с бесконечным числом скупщиков акций с помощью аргументов двойственности

Investigation of a model of financial market with infinite number of buyers-up of stocks with the help of duality arguments

Аннотация: С помощью построения двойственной задачи исследуются финансовые рынки с бесконечным числом скупщиков акций. Полученные результаты дают возможность продвинуть решение вопроса о нахождение достаточных условий, гарантирующих существование мартингальных мер, удовлетворяющих СУХЕ (ОСУХЕ). Это позволит преобразовывать неполные и безарбитражные рынки в полные безарбитражные, что в финансовой математике является весьма актуальной задачей.

The Abstract: With the help of duality arguments markets with infinite number of buyers-up of stocks are investigated. The obtained results give the possibility to more the solution to the question to find the sufficient conditions on the existing of martingale measures satisfying the VPHV (WVPHV). All this permits to transform of incomplete and arbitrage free markets to complete and arbitrage free ones. This task is very important in the domain of financial mathematics.

Ключевые слова: Финансовый рынок, счётное число состояний, мартингальные меры, финитно-определённая система ограничений, двойственная задача, свойство универсальной хааровской единственности (СУХЕ), ослабленное свойство универсальной хааровской единственности (ОСУХЕ).

Keywords: Financial market, infinite number of buyers-up of stocks, martingale measures, duality arguments, VPHV (WVPHV).

***

Рассмотрим одношаговый финансовый рынок, заданный на стохастическом базисе $(\Omega, \mathbf{F})$, где $\mathbf{F} = (\mathsf{F}_0, \mathsf{F}_1)$ - одношаговая фильтрация, причём $\mathsf{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$, а F_1 - порождена разбиением Ω на счетное число атомов A_i, $i = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим F-адаптированный случайный процесс $Z = (Z_n, \mathsf{F}_n)_{n=0}^{1}$, который мы мыслим как дисконтированную стоимость акции.

Введём следующие множества вероятностных мер: $\overline{\mathsf{P}} = \{P = (p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots):\ p_i \geq 0$, $i=1,2,\ldots\}$, $Z_0\big|_{\Omega} = a$, $Z_1\big|_{A_i} = b_i$ ($i=1,2,\ldots$), $\overline{\mathsf{P}}(Z,F) = \{P \in \overline{\mathsf{P}}:\ \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|\, p_i < \infty,\ \ \sum_{i=1}^{\infty} b_i p_i = a\}$.

Для элементов $P=(p_1,p_2,\ldots,p_i,\ldots)$ и $C=(c_1,c_2,\ldots,c_i,\ldots)$ обозначим скалярное произведение $(C,P) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i$. Пусть, далее, $f(P)=(C,P)$ цена финансового обязательства $f_1 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i I_{A_i}$, вычисленная по мартингальной мере $P \in \overline{\mathsf{P}}(Z,F)$.

Таким образом, мы приходим к следующей задаче I: $f(P)=(C,P) \to \sup(\inf)$

$$\tilde{P}: \begin{cases} p_1 + p_2 + \ldots + p_i + \ldots = 1, \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 + \ldots + b_i p_i + \ldots = a, \\ \qquad p_i \geq 0, \quad i = \overline{1,\infty}. \end{cases}$$

Исследование финансовых рынков со счётным числом состояний было проведено в [1]. При этом использовался принципиально новый метод перехода от неполных рынков к полным – метод интерполяции, оперирующий такими понятиями как СУХЕ (свойство универсальной хааровской единственности) и ОСУХЕ (ослабленное свойство универсальной хааровской единственности) [2]. Однако в упомянутой работе остался нерешённым вопрос о нахождение достаточных условий (на a, b_1, b_2, …), гарантирующих существование мартингальных мер P, удовлетворяющих СУХЕ (ОСУХЕ). В данной статье применяется иной подход к решению этой проблемы при помощи построения двойственной к I задачи II: $g(U)=u_1+a\cdot u_2 \to \inf(\sup)$ при $\tilde{U} = \{u_1 + b_j u_2 \geq c_j,\ j = 1,2,\ldots\}$. Приведём результаты, которые получены на данный момент, и наметим дальнейшие пути решения поставленной задачи.

Обозначим $M:=\sup\{f(P): P\in \tilde{P}\}$, $N:=\inf\{g(U): U\in \tilde{U}\}$. Считаем, что $M=-\infty$ при $\tilde{P}=\varnothing$ и $N=+\infty$ при $\tilde{U}=\varnothing$.

Определение 1. Говорят, что задача I(II) *разрешима*, если $M < \infty$ и $\exists\ P\in \tilde{P}: f(P)=M$ ($N>-\infty$ и $\exists\ U\in \tilde{U}: g(U)=N$). (Заметим, что в случае, если задача I(II) разрешима, то $\tilde{P} \neq \varnothing$ ($\tilde{U} \neq \varnothing$).)

Определение 2. Задача II имеет *финитно-определённую систему ограничений*, если существует конечная подсистема из $\tilde{U}$, для которой $g(U) \geq N$, $\forall U \in \tilde{U}$.

Утверждение 1. $M \leq N$.

Утверждение 2. Пусть II – финитно-определена. Если $N>-\infty$, то II разрешима не всегда.

В дальнейшем будем предполагать, что задача II имеет финитно-определённую систему ограничений. Для простоты изложения считаем, что первые s уравнений из $\tilde{U}$ это та конечная подсистема из определения 2, для которой $g(U) \geq N$, $\forall U \in \tilde{U}$. Обозначим

$$\widetilde{U}_s:\begin{cases} u_1+b_1u_2\ge c_1, \\ u_1+b_2u_2\ge c_2, \\ \ldots \\ u_1+b_ju_2\ge c_j, \\ \ldots \\ u_1+b_su_2\ge c_s. \end{cases}\quad \widetilde{U}_s(t):\begin{cases} u_1+b_1u_2\ge c_1t, \\ u_1+b_2u_2\ge c_2t, \\ \ldots \\ u_1+b_ju_2\ge c_jt, \\ \ldots \\ u_1+b_su_2\ge c_st, \\ t\ge 0. \end{cases}$$

Рассмотрим систему векторов $\left\{\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\b_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\b_2\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}1\\b_s\end{pmatrix}\right\}$. Максимальное число линейно независимых векторов среди них равно двум. Значит ранг $r=r(\widetilde{U}_s\cup\{g(U)\ge N\})=2$. Предположим, что $b_1<a<b_2$.

Возможно следующие случаи:

1. Пусть $\left\{\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\b_1\end{pmatrix}\right\}$ - линейно-независимая система векторов. Рассмотрим $\begin{cases}u_1+au_2\ge N,\\ u_1+b_1u_2\ge c_1.\end{cases}$ Пусть $\begin{cases}u_1+au_2\ge N,\\ u_1+b_1u_2=c_1\end{cases}$ совместна. Прямые $u_1+au_2=N$ и $u_1+b_1u_2=c_1$ не могут быть параллельны, поскольку $\left\{\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\b_1\end{pmatrix}\right\}$ - линейно-независимая система векторов.

2. Пусть $\left\{\begin{pmatrix}1\\b_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\b_2\end{pmatrix}\right\}$ - линейно-независимая система векторов. Рассмотрим $\begin{cases}u_1+au_2\ge N,\\ u_1+b_1u_2\ge c_1,\\ u_1+b_2u_2\ge c_2.\end{cases}$ Пусть $\begin{cases}u_1+au_2\ge N,\\ u_1+b_1u_2=c_1,\\ u_1+b_2u_2=c_2\end{cases}$ совместна. Очевидно (в силу линейной независимости $\left\{\begin{pmatrix}1\\b_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\b_2\end{pmatrix}\right\}$), что из того, что произвольное решение системы $\begin{cases}u_1+b_1u_2=c_1,\\ u_1+b_2u_2=c_2\end{cases}$ удовлетворяет неравенству $g(U)=u_1+au_2\ge N$ вытекает, что $\exists\, p_1,p_2\in R:\begin{cases}p_1+p_2=1,\\ b_1p_1+b_2p_2=a.\end{cases}$ И наоборот.

3. Пусть $\left\{\begin{pmatrix}1\\b_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\b_2\end{pmatrix}\right\}$ - линейно-независимая система векторов. Из того, что неравенство $g(U)=u_1+au_2\ge 0$ является следствием $\begin{cases}u_1+b_1u_2\ge 0,\\ u_1+b_2u_2\ge 0\end{cases}$ вытекает, что $\exists\, p_j\ge 0$ (j=1,2) для которых $\begin{cases}p_1+p_2=1,\\ b_1p_1+b_2p_2=a.\end{cases}$, то есть $g(U)\equiv\sum_{j=1}^{2}p_j(u_1+b_ju_2)$. И наоборот.

4. Будем обозначать

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11[00] – до 18[00])
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

$$\widetilde{U}_2 = \{u_1 + b_j u_2 \geq c_j,\ j = 1{,}2\},\ \widetilde{U}_2(t) = \{u_1 + b_j u_2 \geq c_j t,\ t \geq 0,\ \ j = 1{,}2\}.$$

Из того, что неравенство $g(U) \geq Nt$ является следствием некоторой совместной конечной подсистемы ограничений $\widetilde{U}_2(t)$ вытекает, что $\exists\ p_j \geq 0$ (j=0,1,2) такие что $\begin{cases} p_1 + p_2 = 1, \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 = a, \\ c_1 p_1 + c_2 p_2 = N, \end{cases}$ то есть g(U)-$Nt \equiv \sum_{j=1}^{2} p_j (u_1 + b_j u_2 - c_j t) + p_0 t$, t≥0. И наоборот.

Утверждение 3. Неравенство $g(U) \geq N$ является следствием некоторой совместной конечной подсистемы ограничений $\widetilde{U}_2$ $\Leftrightarrow$ неравенство $g(U) = u_1 + au_2 \geq Nt$ является следствием.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть (u_1^0, u_2^0, t_0) - решение системы. Рассмотрим два случая, когда $t_0>0$ и $t_0=0$.

Пусть $t_0>0$. Тогда $u_1^0 + b_j u_2^0 \geq c_j t_0$. Значит $\frac{u_1^0}{t_0} + b_j \frac{u_2^0}{t_0} \geq c_j$ и $\left(\frac{u_1^0}{t_0}, \frac{u_2^0}{t_0}\right)$ - решение системы $\widetilde{U}_2$. Тогда $\left(\frac{u_1^0}{t_0}, \frac{u_2^0}{t_0}\right)$ удовлетворяет и неравенству $g(U) \geq N$, то есть $\frac{u_1^0}{t_0} + a\frac{u_2^0}{t_0} \geq N$ или $g(u_1^0, u_2^0) \geq Nt_0$. Отсюда вытекает, что и (u_1^0, u_2^0, t_0) удовлетворяет $g(U) \geq Nt$.

Пусть теперь $t_0=0$. Возьмём некоторое решение $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{t})$ системы с $\bar{t} > 0$; таковым является, например, $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, 1)$, где $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ - произвольное решение системы. Обозначим $u_1(\gamma) = (1-\gamma)\bar{u}_1 + \gamma u_1^0$, $u_2(\gamma) = (1-\gamma)\bar{u}_2 + \gamma u_2^0$, $t(\gamma) = (1-\gamma)\bar{t} + \gamma t_0$, $\forall\gamma \in (0,1)$. Ясно, что вектор $(u_1(\gamma), u_2(\gamma), t(\gamma))$, $\forall\gamma \in (0,1)$, - решение системы. Но так как $t(\gamma) > 0$, то по рассмотренному выше случаю $g((u_1(\gamma), u_2(\gamma))) \geq N\,t(\gamma)$. Поскольку

$$g((u_1(\gamma), u_2(\gamma))) = (1-\gamma)\bar{u}_1 + \gamma u_1^0 + a((1-\gamma)\bar{u}_2 + \gamma u_2^0) =$$

$$= (1-\gamma)(\bar{u}_1 + a\bar{u}_2) + \gamma(u_1^0 + au_2^0) \geq N((1-\gamma)\bar{t} + \gamma t_0) = (1-\gamma)N\bar{t} + \gamma N t_0,$$

то переходя в последнем неравенстве к пределу при $\gamma \to 1-0$, получим, что $g(u_1^0, u_2^0) \geq Nt_0$, то есть решение (u_1^0, u_2^0, t_0) системы $\widetilde{U}_2(t)$ при $t_0=0$ удовлетворяет неравенству $g(U) \geq Nt$.

Достаточность условий очевидна. □

Утверждение 4. Неравенство $g(U) \geq N$ является следствием некоторой совместной конечной подсистемы ограничений $\Leftrightarrow \exists\ p_j \geq 0$ (k=1,2) для которых

$$g(U)\text{-}N \equiv \sum_{j=1}^{k} p_j (u_1 + b_j u_2 - c_j).$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть неравенство $g(U) \geq N$ является следствием некоторой совместной конечной подсистемы ограничений $\widetilde{U}_2$. Тогда в силу утверждения 3 неравенство $g(U) = u_1 + au_2 \geq Nt$ является следствием $\widetilde{U}_2(t)$. Тогда $\exists\, p_j \geq 0$ (j=0,1,2) такие что

$$\mathrm{g}(U)\text{-}Nt \equiv \sum_{j=1}^{k} p_j(u_1 + b_j u_2 - c_j t) + p_0 t .$$

При t=1 это соотношение приобретает следующий вид: $g(U)\text{-}N \equiv \sum_{j=1}^{k} p_j(u_1 + b_j u_2 - c_j) + p_0$. Заметим, что $\forall\varepsilon>0$ неравенство $g(U)\geq N+\varepsilon$ перестаёт быть следствием некоторой совместной конечной подсистемы ограничений $\widetilde{U}_2$. Если бы $p_0 > 0$, то неравенство $g(U) \geq N + p_0$ в силу уже доказанного было бы следствием некоторой совместной конечной подсистемы ограничений $\widetilde{U}_2$, чего не может быть. Поэтому $p_0 = 0$, что и доказывает утверждение.

Достаточность очевидна. □

Утверждение 5. Пусть $\widetilde{U}_2$ конечная подсистема из $\widetilde{U}$ для которой $g(U)\geq N$. Тогда $\exists$ $p_j \geq 0$ (j=1,2) такие, что $\begin{cases} 1 = p_1 + p_2, \\ a = p_1 b_1 + p_2 b_2, \\ N = p_1 c_1 + p_2 c_2. \end{cases}$

Доказательство. Тогда $\exists\, p_j \geq 0$ (j=1,2) для которых

$$g(U)\text{-}N \equiv \sum_{j=1}^{k} p_j(u_1 + b_j u_2 - c_j) .$$

Отсюда выписываем требуемую систему. □

Утверждение 6. Пусть II – финитно-определена. Если N>-∞, то I разрешима (то есть $M<+\infty$ и $\exists\, P\in \widetilde{P}$: $f(P)=M$). При этом $M=N$.

Доказательство. Произвольное решение системы $\widetilde{U}$ удовлетворяет неравенству $g(U)\geq N$, то есть $g(U)\geq N$ является следствием системы ограничений $\widetilde{U}$. Поскольку II – финитно-определена, то $g(U)\geq N$ является следствием и некоторой конечной подсистемы ограничений $\widetilde{U}_2$. Рассмотрим систему $\widetilde{U}_2$. Тогда в силу утверждения 5 получаем, что $\exists\, p_j \geq 0$ (j=1,2) такие, что

$$\begin{cases} 1 = \sum_j p_j, \\ a = \sum_j p_j b_j, \\ N = \sum_j p_j c_j. \end{cases}$$

Если положить $p = (p_1, p_2, ..., p_i, ...)$, причём $p_i = 0$ для $i\neq 1,2$, то полученные соотношения можно переписать в виде

$$\begin{cases} 1 = p_1 + p_2 + \ldots, \\ a = p_1 b_1 + p_2 b_2 + \ldots \\ N = c_1 p_1 + c_2 p_2 + \ldots \end{cases}.$$

Значит $p \in \widetilde{P}$ и $N = c_1 p_1 + c_2 p_2 + \ldots \le M$, что вместе с утверждением 1 даёт требуемое равенство $M=N$. □

Утверждение 7. Пусть II – финитно-определена. Если I разрешима, то $N>-\infty$. При этом $M=N$.

Доказательство. По условию I разрешима, то есть $M<+\infty$ и $\exists\ P^* \in \widetilde{P} : f(P^*)=M$. Значит $\widetilde{P} \ne \varnothing$ и $-\infty<M<+\infty$. Используя утверждение 1, и предыдущий вывод имеем, что $N>-\infty$. Тогда по утверждению 6 выполняется равенство $M=N$. □

Следовательно, условия на a, b_1, b_2, …, гарантирующие финитно-определённость системы ограничений задачи II, дадут вместе с тем и условия разрешимости задачи I. Кроме того, имея условия на эти же коэффициенты, найденные в работе [1], можно изучить некую между ними взаимосвязь. Что даст возможность найти ряд ещё одних условий (возможно, отличных от условий, предложенных в [1]), гарантирующих существование мартингальных мер P, удовлетворяющих СУХЕ (ОСУХЕ). Что в конечном итоге, позволит преобразовывать неполные и безарбитражные рынки в полные безарбитражные, что в финансовой математике является весьма актуальной задачей [3-4].

Пример. Возьмём $a=3$, $b_i=i(i+1)$, $c_i=2i+1$, $i=1,2,\ldots$ В этом случае, задача I(II) выглядит следующим образом: I. $f(P)=3p_1+5p_2+7p_3+\ldots\to\sup$ II. $g(U)=u_1+3u_2\to\inf$

$$\tilde{P}: \begin{cases} p_1 + p_2 + \ldots + p_i + \ldots = 1, \\ 2p_1 + 6p_2 + 12 p_i + \ldots = 3, \\ p_i \ge 0, \quad i = \overline{1,\infty}. \end{cases} \qquad \tilde{U}: \begin{cases} u_1 + 2u_2 \ge 3, \\ u_1 + 6u_2 \ge 5, \\ u_1 + 12u_2 \ge 7, \\ \ldots \end{cases}$$

Цена финансового обязательства для этой задачи равна 3,5 для мартингальной меры $P(3/4,1/4,0,0,\ldots)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данекянц А.Г. Моделирование безарбитражных финансовых рынков с помощью хааровских интерполяций на счётном вероятностном пространстве. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Ростов-на-Дону, 2005.

2. Данекянц А.Г., Павлов И.В. Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности. // Обозрение прикладной и промышленной математики, М.: ТВП, 2004, т. 11, вып. 3, с. 506-508.

3. Богачева М.Н., Павлов И.В. О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных. // Успехи математических наук, 2002, т. 57, вып. 3, с.143-144.

4. Богачева М.Н., Павлов И.В. О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных. // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2002, №3, с.16-24.