

Интернет-журнал «Наукоедение» ISSN 2223-5167 <http://naukovedenie.ru/>

Том 8, №4 (2016) <http://naukovedenie.ru/index.php?p=vol8-4>

URL статьи: <http://naukovedenie.ru/PDF/90TVN416.pdf>

Статья опубликована 16.09.2016.

Ссылка для цитирования этой статьи:

Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Могилевич Л.И., Христофорова А.В. Математическое моделирование взаимодействия двух соосных цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними в условиях вибрации, с учетом износа оболочек // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 8, №4 (2016) <http://naukovedenie.ru/PDF/90TVN416.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

Выполнено при поддержке грантов РФФИ 15-01-01604-а, № 16-01-00175-а и гранта Президента МД-6012.2016.8

УДК 51-74

Кондратов Дмитрий Вячеславович

ФГБОУ ВПО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при президенте российской федерации»
«Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина» (филиал), Россия, г. Саратов¹
Заведующий кафедрой «Прикладная информатика и информационные технологии в управлении»
Доктор физико-математических наук, доцент
E-mail: kondratovdv@yandex.ru
РИНЦ: http://elibrary.ru/author_profile.asp?id=123833

Кондратова Юлия Николаевна

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», Россия, Саратов
Доцент кафедры «Математическая кибернетика и компьютерные науки»
Кандидат физико-математических наук
E-mail: kondratovaun@mail.ru
РИНЦ: http://elibrary.ru/author_profile.asp?id=527319

Могилевич Лев Ильич

ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Россия, Саратов
Профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ»
Доктор технических наук, профессор
E-mail: mogilevich@sgu.ru
РИНЦ: http://elibrary.ru/author_profile.asp?id=2927

Христофорова Алевтина Владимировна

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Филиал в г. Балашов, Россия, Балашов
Доцент кафедры «Математика»
Кандидат физико-математических наук
E-mail: alevtinahristoforova@yandex.ru
РИНЦ: http://elibrary.ru/author_profile.asp?id=499356

¹ 410031, г. Саратов, ул. Соборная, д. 23/25

Математическое моделирование взаимодействия двух соосных цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними в условиях вибрации, с учетом износа оболочек

Аннотация. В статье рассматривается механическая модель трубы, образованной двумя упругими соосными цилиндрическими оболочками, свободно опираемыми на концах, содержащими слой вязкой несжимаемой жидкости между ними. Представленная механическая модель находится под воздействием гармонического по времени переносного виброускорения. В соответствии с механической моделью построена математическая модель кольцевой трубы, представляющая собой связанную систему уравнений динамики жидкости и, основанных на гипотезах Кирхгофа-Лява, уравнений динамики внутренней и внешней цилиндрических оболочек, с соответствующими граничными условиями. Решение данной связанной системы осуществляется методом возмущений в безразмерных переменных. В качестве малых параметров задачи в методе возмущений выбраны относительная ширина слоя вязкой несжимаемой жидкости и относительные прогибы внешней и внутренней оболочек. Применение метода возмущений позволяет линеаризовать уравнения динамики жидкости. В результате решения определены выражения для амплитудных частотных характеристик внутренней и внешней оболочек трубы и давления в слое жидкости. Показаны значения амплитудных частотных характеристик для внутренней и внешней оболочек на резонансных частотах. Произведено численное моделирование поведения амплитудных частотных характеристик внутренней и внешней оболочек в зависимости от времени работы (пробега) при известном законе износа оболочек.

Ключевые слова: гидроупругость; соосные цилиндрические оболочки; вязкая несжимаемая жидкость; вибрация; кавитационный износ; математическая модель; свободное опирание; амплитудные частотные характеристики

Конструкции, широко используемые в авиа-, машино- и агрегатостроении могут быть описаны механической моделью, состоящей из соосных цилиндрических оболочек, между которыми находится вязкая несжимаемая жидкость. В зависимости от целей использования механической системы оболочки считаются либо упругими, либо абсолютно жесткими. Примерами использования модели с двумя цилиндрическими оболочками можно считать двигатели внутреннего сгорания, поплавковые приборы навигации, жидкостные ракетные двигатели, телескопические шасси, силовые цилиндры с полым плунжером [1, 2]. Реально существующие механические системы в процессе работы испытывают различные вибрации как от внешних, так и от внутренних источников. Следует заметить, что жидкость между оболочками служит для нескольких целей: демпфирования собственных колебаний оболочек, охлаждения оболочек, подогрева жидкости и тому подобное. При вибрации упругость как внутренней, так и внешней оболочек, приводит к динамическому воздействию на слой жидкости, в котором, вследствие этого, возникают зоны пониженного и повышенного давления. Следовательно, может возникать кавитационный эффект и кавитационный износ [3].

Таким образом, будем определять критические частоты вибрации – частоты, на которых происходят резонансные явления с учетом экспериментального закона кавитационного износа оболочек.

Задачами исследования динамики взаимодействия упругих оболочек и жидкости в условия вибрации исследовались различными авторами [4, 5]. Ранее проводились исследования механических систем, состоящих из двух соосных геометрически регулярных оболочек, свободно опертых на концах при пульсации давления [6]. Кроме того, исследовалась механическая система, состоящая из соосных цилиндрических оболочек, свободно опертых на концах, внешняя из которых являлась геометрически нерегулярной, взаимодействующих с вязкой несжимаемой жидкостью между ними, при пульсации давления [7].

Рассмотрим далее следующую физическую модель механической системы (рисунок 1).

Механическая система представляет собой внешнюю оболочку 1, которая является упругой цилиндрической оболочкой конечной длины, свободно опертой на концах. Внутренняя оболочка 2 – также упругая цилиндрическая оболочка конечной длины, свободно опертая на концах. Внутренний радиус внешней оболочки равен R_1 . Внешний радиус внутренней оболочки равен R_2 . Длины внутренней и внешней оболочек совпадают и равны l . Зазор δ цилиндрической щели между оболочками 1 и 2 полностью заполнен вязкой несжимаемой жидкостью 3. Радиальный зазор цилиндрической щели $\delta = R_1 - R_2 \ll R_2$. Жидкость свободно вытекает из цилиндрической щели. Механическая система считается термостабилизированной.

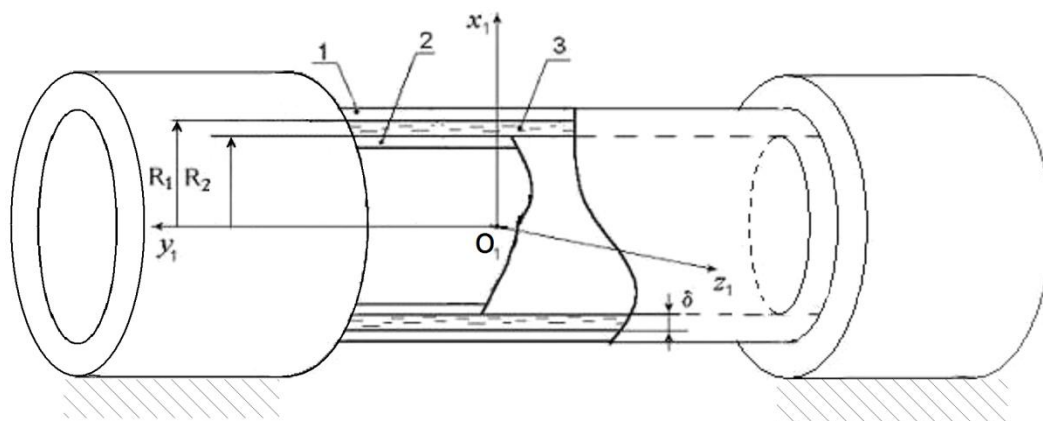


Рисунок 1. Физическая модель механической системы (составлено авторами)

Таким образом, физическая модель кольцевой трубы представляет собой две упругие замкнутые цилиндрические оболочки взаимодействующих между собой через слой жидкости под воздействием вибрации.

Введем систему координат $O_1x_1y_1z_1$. Центр системы координат $O_1x_1y_1z_1$ расположим в геометрическом центре внутренней оболочки и свяжем с основанием, к которому крепится механическая система. Будем предполагать отсутствие перемещения и виброускорения вдоль оси O_1y_1 . Обозначим виброускорение основания, к которому крепится механическая система через \ddot{x}_0, \ddot{z}_0 . Введем в рассмотрение необходимую далее цилиндрическую систему координат r, θ, y , полюс которой совпадает с началом координат $O_1x_1y_1z_1$, направления осей Oy , O_1y_1 цилиндрической и декартовой систем координат совпадают (рисунок 2).

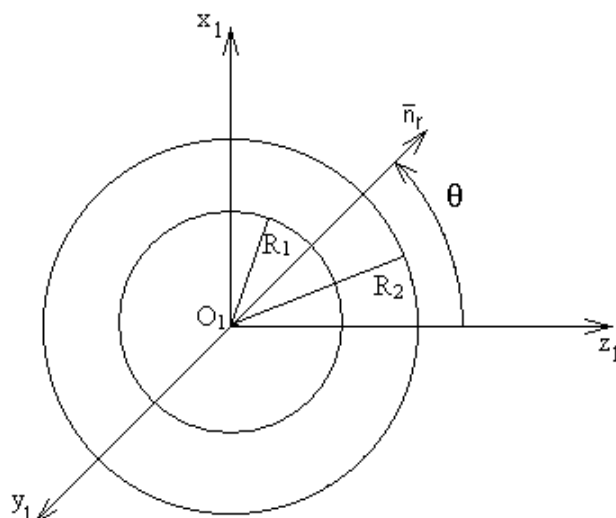


Рисунок 2. Выбор системы координат (составлено авторами)

Определим закон поступательного движения механической системы, как абсолютно жесткого тела и его абсолютное ускорение в виде

$$x_0(t) = E_x f_{x_0}(\omega t), y_0(t) \equiv 0, z_0(t) = E_z f_{z_0}(\omega t), \quad (1)$$

$$W_{1x1} = \ddot{x}_0 = E_x \omega^2 f_{x_0}''(\omega t), W_{1y1} \equiv 0, W_{1z1} = \ddot{z}_0 = E_z \omega^2 f_{z_0}''(\omega t),$$

где штрих означает производную функции по ее аргументу, а E_x, E_z – амплитуды поступательных колебаний; $\omega = 2\pi f$ – частота поступательных колебаний (рад/с).

В реальных механических системах отношение δ к R_2 очень мало, поэтому можно ввести малый параметр $\psi = \delta/R_2 \ll 1$, характеризующий ширину цилиндрического слоя жидкости, окружающей внутреннюю цилиндрическую оболочку.

Малый параметр ψ позволяет упростить постановку задачи гидроупругости с цилиндрическими оболочками. Перейдем к безразмерным переменным, вводя редуцированное давление для цилиндрической щели [8]

$$\xi = (r - R_2)/\delta, \theta = \theta, \tau = \omega t, \zeta = 2y/l_2, V_r = w_m^{(i)} \omega u_\xi, V_\theta = (w_m^{(i)} \omega / \psi) u_\theta, V_y = (w_m^{(i)} \omega / \psi) (l/2R_2) u_\zeta;$$

$$u_1^{(i)} = u_m^{(i)} U_1^{(i)}, u_2^{(i)} = v_m^{(i)} U_2^{(i)}, u_3^{(i)} = w_m^{(i)} U_3^{(i)}, \psi = \delta/R_2 \ll 1, \lambda^{(i)} = w_m^{(i)}/\delta, (c^{(i)})^2 = E^{(i)} / [\rho_0^{(i)} (1 - (\mu_0^{(i)})^2)],$$

$$(a_0^{(i)})^2 = \frac{(h_0^{(i)})^2}{12 (R^{(i)})^2}, \quad i = 1, 2$$

$$p = p_0 + \rho R_2 \frac{w_m^{(1)} \omega^2}{\psi \text{Re}} \left\langle P - \text{Re} \left[\frac{\psi E_z}{w_m^{(1)}} f_{z_0}''(\tau) \cos \theta + \frac{\psi E_x}{w_m^{(1)}} f_{x_0}''(\tau) \sin \theta \right] \right\rangle, \quad \text{Re} = \frac{\delta^2 \omega}{\nu}. \quad (2)$$

где верхний индекс 1 относится к внешней оболочке, а индекс 2 – к внутренней оболочке, p_0, ρ, ν – уровень отсчета давления, плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости; $h_0^{(i)}, \rho_0^{(i)}, E^{(i)}, \mu_0^{(i)}$ – толщина, плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки; P – редуцированное безразмерное давление жидкости; где

$u_1^{(i)} = u_1^{(i)}(y, \theta, t)$ – продольное упругое перемещение оболочки, положительное в направлении \bar{n}_s , противоположным направлению \bar{j} ; $u_2^{(i)} = u_2^{(i)}(y, \theta, t)$ – окружное упругое перемещение оболочки в направлении \bar{n}_θ ; $u_3^{(i)} = u_3^{(i)}(y, \theta, t)$ – прогиб внешней оболочки, положительный в направлении \bar{n} , совпадающим с \bar{n}_r и противоположным направлению к центру кривизны; V_r, V_θ, V_y – проекции скорости жидкости на r, θ, y .

Уравнения динамики поддерживающего и демпфирующего слоя жидкости [9] в нулевом приближении по ψ примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0, \quad \text{Re} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \tau} + \lambda \left(u_\xi \frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\zeta \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} \right) \right] &= - \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \xi^2}, \\ \text{Re} \left[\frac{\partial u_\zeta}{\partial \tau} + \lambda \left(u_\xi \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi} + u_\theta \frac{\partial u_\zeta}{\partial \theta} + u_\zeta \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right] &= - \left(\frac{2R_2}{l} \right)^2 \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial \xi^2}, \\ \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} &= 0, \quad \text{Re} = \frac{\delta^2 \omega}{\nu}. \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия на непроницаемых поверхностях в нулевом приближении по ψ запишутся в виде:

$$\begin{aligned} u_\xi &= \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial \tau}; \quad u_\theta = 0; \quad u_\zeta = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \xi_*^{(1)} = 1 + \lambda^{(1)} U_3^{(1)}; \\ u_\xi &= \frac{w_m^{(2)}}{w_m^{(1)}} \frac{\partial U_3^{(2)}}{\partial \tau}; \quad u_\theta = 0; \quad u_\zeta = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \xi_*^{(2)} = \lambda^{(2)} U_3^{(2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Условия для редуцированного давления P при свободном истечении жидкости из цилиндрической щели в торцевые:

$$P = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1. \quad (5)$$

Уравнения динамики упругих цилиндрических внутренней и внешней оболочек кольцевой трубы, основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява [10], в безразмерных переменных (2) с учетом условия $\psi \ll 1$ запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{(c^{(i)})^2 \rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{(R^{(i)})^2} \left\{ \left(\frac{2R^{(i)}}{l} \right)^2 u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \zeta^2} + \frac{1 - \mu_0^{(i)}}{2} u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \theta^2} - \right. \\ \left. - \frac{1 + \mu_0^{(i)}}{2} \left(\frac{2R^{(i)}}{l} \right) v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \zeta \partial \theta} - \mu_0^{(i)} \left(\frac{2R^{(i)}}{l} \right) w_m^{(i)} \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \zeta} \right\} - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \omega^2 u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \tau^2} = 0; \\ \frac{(c^{(i)})^2 \rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{(R^{(i)})^2} \left\{ - \frac{1 + \mu_0^{(i)}}{2} \frac{2R^{(i)}}{l} u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \zeta \partial \theta} + \frac{1 - \mu_0^{(i)}}{2} \left(\frac{2R^{(i)}}{l} \right)^2 v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \zeta^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \theta^2} + w_m^{(i)} \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \theta} + (a_0^{(i)})^2 v_m^{(i)} \left[2(1 - \mu_0^{(i)}) \left(\frac{2R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \theta^2} \right] - \\
 & - (a_0^{(i)})^2 w_m^{(i)} \left[(2 - \mu_0^{(i)}) \left(\frac{2R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\partial^3 U_3^{(i)}}{\partial \zeta^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 U_3^{(i)}}{\partial \theta^3} \right] \left. \right\} - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \omega^2 \left(\frac{W_{1x1}}{\omega^2} \cos \theta - \frac{W_{1z1}}{\omega^2} \sin \theta + v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \tau^2} \right) = 0, \\
 & \frac{(c^{(i)})^2 \rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{(R^{(i)})^2} \left\{ - \mu_0^{(i)} \frac{2R^{(i)}}{l} u_m^{(i)} \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial \zeta} + v_m^{(i)} \frac{\partial U_2^{(i)}}{\partial \theta} - \right. \\
 & - (a_0^{(i)})^2 v_m^{(i)} \left[(2 - \mu_0^{(i)}) \left(\frac{2R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\partial^3 U_2^{(i)}}{\partial \zeta^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 U_2^{(i)}}{\partial \theta^3} \right] + w_m^{(i)} U_3^{(i)} + \\
 & \left. + (a_0^{(i)})^2 w_m^{(i)} \left[\left(\frac{2R^{(i)}}{l} \right)^4 \frac{\partial^4 U_3^{(i)}}{\partial \zeta^4} + 2 \left(\frac{2R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\partial^4 U_3^{(i)}}{\partial \zeta^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 U_3^{(i)}}{\partial \theta^4} \right] \right\} - \\
 & - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \omega^2 \left(\frac{W_{1x1}}{\omega^2} \sin \theta + \frac{W_{1z1}}{\omega^2} \cos \theta + w_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_3^{(i)}}{\partial \tau^2} \right) = (-1)^{i-1} \frac{\rho R_2 w_m^{(i)} \omega^2}{\operatorname{Re} \psi} \times \\
 & \times \left\{ \frac{\operatorname{Re} \psi p_0}{\rho R_2 w_m^{(i)} \omega^2} + P - \operatorname{Re} \left[\frac{\psi E_x}{w_m^{(i)}} f_{x0}''(\tau) \sin \theta + \frac{\psi E_z}{w_m^{(i)}} f_{z0}''(\tau) \cos \theta \right] \right\} \Bigg|_{\xi=\xi_*^{(i)}},
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $\xi_*^{(1)} = 1 + \lambda^{(1)} U_3^{(1)}$, $\xi_*^{(2)} = \lambda^{(2)} U_3^{(2)}$.

Условия жесткого зацебления на торцах внешней и внутренней оболочек запишутся в виде

$$\frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial \zeta} = 0, \quad U_2^{(i)} = 0, \quad U_3^{(i)} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_3^{(i)}}{\partial \zeta^2} = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1. \tag{7}$$

Таким образом, получена связанная задача гидроупругости безразмерных переменных с учетом малости относительной ширины слоя жидкости Ψ , дальнейшее решение, которой осуществляется методом возмущений [11]. За малые параметры в методе возмущений принимается относительные прогибы внутренней и внешней оболочек $\lambda^{(i)} \ll 1$. Допущение о малости относительного прогиба оболочек применительно к реальным механическим системам действительно имеет место. Малые параметры $\lambda^{(i)}$ позволяют линеаризовать задачу. Решение задачи (3)-(7) будем искать в виде:

$$P = P_0 + \lambda^{(1)} P_1 + \dots, \quad u_\theta = u_{\theta 0} + \lambda^{(1)} u_{\theta 1} + \dots, \quad u_\xi = u_{\xi 0} + \lambda^{(1)} u_{\xi 1} + \dots, \quad u_\zeta = u_{\zeta 0} + \lambda^{(1)} u_{\zeta 1} + \dots, \tag{8}$$

$$U_1^{(i)} = U_{10}^{(i)} + \lambda^{(i)} U_{11}^{(i)} + \dots, \quad U_2^{(i)} = U_{20}^{(i)} + \lambda^{(i)} U_{21}^{(i)} + \dots, \quad U_3^{(i)} = U_{30}^{(i)} + \lambda^{(i)} U_{31}^{(i)} + \dots.$$

Разложения (8) подставляются в уравнения (3), (6), в граничные условия (4) со снесением их на невозмущенную поверхность (т.е. разложением в ряд Тейлора искомых величин на этой поверхности), в граничные условия (7). Результатом будет являться связанная система уравнений в нулевом приближении по $\lambda^{(i)}$. Для решения получившейся линейной задачи определяется частное решение неоднородных линейных уравнений в виде гармонических функций по времени с коэффициентами, зависящими от координат. Общее

решение соответствующих однородных уравнений не определяется и переходный процесс не исследуется, так как в колебательной системе присутствует демпфирующий слой жидкости, взаимодействующий с цилиндрическими оболочками. Наличие демпфирования приводит к тому, что переходный процесс со временем быстро затухает, влияние начальных условий перестает сказываться на колебаниях и возникают установившиеся (периодические или гармонические) вынужденные колебания. Следовательно, при процессах более длительных, чем переходный, общее решение однородных уравнений и начальные условия можно отбросить с самого начала.

В результате решения уравнений динамики жидкости найдем выражения для давления в слое жидкости:

$$P_0 = \frac{\sigma}{w_m^{(1)}} \int_{-1}^{\zeta} sh \sigma (\zeta - q) \left[12 v \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}(q, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}(q, \theta, \tau)}{\partial \tau} \right) + \right. \\ \left. + 2 \varepsilon^2 w \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}(q, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}(q, \theta, \tau)}{\partial \tau} \right) \right] dq - \frac{\sigma}{2 w_m^{(1)}} \left(\frac{ch \sigma \zeta}{ch \sigma} + \frac{sh \sigma \zeta}{sh \sigma} \right) \int_{-1}^1 sh \sigma (1 - q) \times \\ \times \left[12 v \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}(q, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}(q, \theta, \tau)}{\partial \tau} \right) + 2 \varepsilon^2 w \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}(q, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}(q, \theta, \tau)}{\partial \tau} \right) \right] dq, \quad (9)$$

где:

$$w = \frac{d}{d^2 + f^2}, \quad v = -\frac{1}{6} \varepsilon^2 \frac{f}{d^2 + f^2}, \quad d = 1 + \frac{1}{\varepsilon} (c_1 - c_2), \quad f = \frac{1}{\varepsilon} (c_1 + c_2), \quad c_1 = -\frac{sh \varepsilon}{ch \varepsilon + \cos \varepsilon}, \\ c_2 = -\frac{\sin \varepsilon}{ch \varepsilon + \cos \varepsilon}, \quad v_1 = \varepsilon \frac{\sin \varepsilon ch \varepsilon + \cos \varepsilon sh \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon + sh^2 \varepsilon}; \quad w_1 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon ch \varepsilon - \cos \varepsilon sh \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon + sh^2 \varepsilon}; \\ v_2 = \varepsilon \frac{\sin \varepsilon \cos \varepsilon + ch \varepsilon sh \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon + sh^2 \varepsilon}; \quad w_2 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{ch \varepsilon sh \varepsilon - \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon + sh^2 \varepsilon}; \quad v_{12} = v_1 - v_2; \quad w_{12} = w_1 + w_2, \quad \varepsilon = \delta \sqrt{\frac{\omega}{2 \nu}}.$$

Решение уравнений динамики цилиндрических оболочек будем искать в виде

$$u_{10}^{(i)} = u_m^{(i)} U_{10}^{(i)} = u_m^{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \left(\frac{2k-1}{2} \pi \zeta \right) \left\{ (a_{10c}^{(i)} \cos \theta + a_{10s}^{(i)} \sin \theta) \sin (\tau + \varphi_{u1}^{(i)}) + a_{10o}^{(i)} \right\}, \\ u_{20}^{(i)} = v_m^{(i)} U_{20}^{(i)} = v_m^{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left(\frac{2k-1}{2} \pi \zeta \right) \left\{ a_{20s}^{(i)} \cos \theta + a_{20c}^{(i)} \sin \theta + a_{20o}^{(i)} \right\} \sin (\tau + \varphi_{u2}^{(i)}), \quad (10) \\ u_{30}^{(i)} = w_m^{(i)} U_{30}^{(i)} = w_m^{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left(\frac{2k-1}{2} \pi \zeta \right) \left\{ (a_{30c}^{(i)} \cos \theta + a_{30s}^{(i)} \sin \theta) \sin (\tau + \varphi_{u3}^{(i)}) + a_{30o}^{(i)} \right\},$$

Учтем, что в системе присутствует демпфирование, возникающее за счет жидкости, что приводит к быстрому затуханию собственных колебаний системы и возникновению установившихся вынужденных колебаний одной формы. Поэтому будем предполагать, что колебания механической системы носят гармонический характер

$$f_{x0}(\tau) = \sin (\tau + \varphi_{x0}), \quad f_{z0}(\tau) = \sin (\tau + \varphi_{z0}).$$

Подставляя формулы (10) в уравнения динамики внутренней и внешней оболочек в нулевом приближении по λ , приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в левой и правой частях этих уравнений, получим систему

линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов, входящих в формулы (10). Из полученной системы уравнений определяются необходимые в дальнейшем коэффициенты (данные коэффициенты из-за громоздкости не приводятся). Поставляя полученные коэффициенты в выражения (10), получим следующие выражения для прогибов внутренней и внешней оболочек для произвольного члена ряда:

$$u_{30}^{(i)} = \cos \left(\frac{2k-1}{2} \pi \zeta \right) a_{30o}^{(i)} + \sqrt{\frac{\text{num}^{(i)}}{\text{den}}} \cos \left(\frac{2k-1}{2} \pi \zeta \right) \times \quad (11)$$

$$\times [E_z \omega^2 \cos \theta \sin(\omega t + \varphi_{z0} + \eta^{(i)}(\omega)) + E_x \omega^2 \sin \theta \sin(\omega t + \varphi_{x0} + \eta^{(i)}(\omega))]$$

где $\text{num}^{(i)} = (a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)} de_1^{(j)} g_1^{(i)} b_{33}^{(j)})^2 + 2(a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)})^2 de_1^{(j)} de_1^{(i)} g_1^{(j)} g_1^{(i)} b_{33}^{(j)} b_{33}^{(i)} + (a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)} de_1^{(j)} g_1^{(i)} b_{33}^{(j)})^2 +$
 $+ 4w \varepsilon^2 a_{11}^{(j)} (a_{11}^{(i)})^2 de_1^{(j)} g_1^{(i)} g_1^{(j)} g_2^{(j)} B_0^{(i)} + 4w^2 \varepsilon^4 (a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)} de_1^{(j)} g_1^{(i)} B_0^{(i)})^2 + (a_{11}^{(i)} g_1^{(i)} g_1^{(j)})^2, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2,$
 $i \neq j;$

$$\text{den} = (g_2^{(1)} g_2^{(2)})^2 + (288 v^2 - 8 w^2 \varepsilon^4) a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)} de_1^{(1)} de_1^{(2)} g_2^{(1)} g_2^{(2)} B_0^{(1)} B_0^{(2)} +$$

$$+ (16 w^2 \varepsilon^4 + 2304 v^2) w^2 \varepsilon^4 (a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)} de_1^{(1)} de_1^{(2)} B_0^{(1)} B_0^{(2)})^2 + 144 v^2 (de_1^{(1)} a_{11}^{(1)} g_2^{(2)} B_0^{(1)})^2 +$$

$$+ 144 v^2 (de_1^{(2)} a_{11}^{(2)} g_2^{(1)} B_0^{(2)})^2 - 1152 v^2 w \varepsilon^2 (a_{11}^{(1)} de_1^{(1)} B_0^{(1)})^2 a_{11}^{(2)} g_2^{(2)} de_1^{(2)} B_0^{(2)} -$$

$$- 1152 v^2 w \varepsilon^2 a_{11}^{(1)} g_2^{(1)} de_1^{(1)} B_0^{(1)} (a_{11}^{(2)} de_1^{(2)} B_0^{(2)})^2;$$

$$a_{30o}^{(i)} = (-1)^{i-1} \frac{2 p_0 (R^{(i)})^2}{\left\{ \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} (c^{(i)})^2 \left[1 - (\mu_0^{(i)})^2 + (a_0^{(i)})^2 \left(\frac{2k-1}{2} \pi \right)^4 \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^4 \right] \right\}}, \quad i = 1, 2; \quad \eta^{(i)}(\omega) = \frac{F_{num}^{(i)}}{F_{den}^{(i)}}$$

$$F_{num}^{(i)} = de_1^{(i)} Dr^{(i)} (de_1^{(i)} a_{11}^{(j)} ccc^{(j)} de_1^{(i)} de_2^{(j)} - de_1^{(i)} a_{11}^{(i)} de_9^{(j)} de_1^{(j)} ccc^{(i)} -$$

$$- de_1^{(i)} a_{11}^{(j)} de_9^{(i)} de_1^{(j)} ccc^{(j)} - a_{11}^{(j)} de_2^{(i)2} cof^{(j)} + a_{11}^{(i)} de_2^{(j)2} cof^{(i)} - a_{11}^{(i)} ccc^{(i)} de_9^{(j)} de_2^{(i)} de_1^{(j)}) +$$

$$+ 2 de_1^{(i)} a_{11}^{(i)} a_{11}^{(j)} \varepsilon^2 w Dr^{(i)} (de_1^{(i)} cof^{(j)} B0New^{(i)} - de_1^{(j)} cof^{(i)} B0New^{(j)}) Dr^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad i \neq j;$$

$$F_{den}^{(i)} = -a_{11}^{(j)2} de_1^{(j)2} cof^{(j)} b_{33}^{(j)2} KK^{(i)} - b_{33}^{(j)} a_{11}^{(j)} de_1^{(j)} b_{33}^{(i)} a_{11}^{(i)} de_1^{(i)} KK^{(i)} cof^{(j)} -$$

$$- b_{33}^{(j)} a_{11}^{(j)2} de_1^{(j)} b_{33}^{(i)} de_1^{(i)} KK^{(j)} cof^{(i)} - a_{11}^{(i)} a_{11}^{(j)} de_1^{(i)2} cof^{(j)} b_{33}^{(i)2} KK^{(j)} -$$

$$- 2 a_{11}^{(j)} de_1^{(i)} cof^{(i)} cof^{(j)} B0New^{(i)} w \varepsilon^2 KK^{(j)} + 2 a_{11}^{(j)2} de_1^{(j)2} a_{11}^{(i)} de_1^{(i)} B0New^{(i)} w \varepsilon^2 b_{33}^{(j)2} KK^{(i)} +$$

$$+ 2 a_{11}^{(j)2} a_{11}^{(i)} de_1^{(i)2} de_1^{(j)} b_{33}^{(j)} B0New^{(i)} w \varepsilon^2 b_{33}^{(i)} KK^{(j)} + 2 de_1^{(j)2} a_{11}^{(i)2} a_{11}^{(j)} de_1^{(i)} b_{33}^{(j)} B0New^{(j)} w \varepsilon^2 b_{33}^{(i)} KK^{(i)} +$$

$$+ 2 a_{11}^{(j)2} a_{11}^{(i)} de_1^{(i)2} de_1^{(j)} B0New^{(j)} w \varepsilon^2 b_{33}^{(i)2} KK^{(j)} + 4 B0New^{(j)} cof^{(j)} a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)} de_1^{(j)} de_1^{(i)} B0New^{(i)} w^2 \varepsilon^4 KK^{(i)} +$$

$$+ 8 B0New^{(i)2} B0New^{(j)} a_{11}^{(i)} de_1^{(i)2} de_1^{(j)} a_{11}^{(j)2} w^3 \varepsilon^6 KK^{(j)} - cof^{(i)} cof^{(j)2} KK^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad i \neq j;$$

$$\begin{aligned}
 b_{33}^{(i)} &= -12 v B_0^{(i)}, \quad de_1^{(i)} = a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} - (a_{12}^{(i)})^2, \quad de_2^{(i)} = a_{12}^{(i)} a_{13}^{(i)} - a_{11}^{(i)} a_{23}^{(i)}, \quad de_3^{(i)} = a_{13}^{(i)} a_{22}^{(i)} - a_{12}^{(i)} a_{23}^{(i)}, \\
 de_4^{(i)} &= a_{12}^{(i)} a_{13}^{(i)} + a_{11}^{(i)} a_{23}^{(i)}, \quad de_7^{(i)} = a_{33}^{(i)} de_1^{(i)} - a_{23}^{(i)} de_2^{(i)} + a_{13}^{(i)} de_3^{(i)}, \quad de_8^{(i)} = (de_7^{(i)})^2 + (b_{33}^{(i)} de_1^{(i)})^2, \\
 de_9^{(i)} &= a_{33}^{(i)} a_{11}^{(i)} + a_{13}^{(i)2}, \quad B_0^{(i)} = \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} (c^{(i)})^2} B_{00}, \quad B_{00} = -\frac{\rho R_2}{\text{Re } \psi} \sigma F, \\
 g_1^{(i)} &= \left(\frac{2k-1}{2} \pi \right)^2 \left(\frac{R^{(i)}}{c^{(i)}} \right)^2 \left(\left(\frac{\rho R_2}{\rho_0^{(i)} h_0^{(i)}} - (-1)^i \right) de_1^{(i)} - de_1^{(i)} \right), \quad g_2^{(i)} = de_2^{(i)2} + (a_{33}^{(i)} a_{11}^{(i)} + (a_{13}^{(i)})^2) de_1^{(i)}, \\
 a_{33}^{(i)} &= 1 + (a_0^{(i)})^2 + \left(\frac{2k-1}{2} \pi \right)^4 \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^4 (a_0^{(i)})^2 + 2 \left(\frac{2k-1}{2} \pi \right)^2 \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 (a_0^{(i)})^2 - \left(\frac{R^{(i)} \omega}{c^{(i)}} \right)^2 + 2 \varepsilon^2 w B_0^{(i)}, \\
 a_{23}^{(i)} &= - \left(\frac{2k-1}{2} \pi \right)^2 \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 (2 - \mu_0^{(i)}) (a_0^{(i)})^2 - (1 + (a_0^{(i)})^2), \quad a_{13}^{(i)} = \left(\frac{2k-1}{2} \pi \right) \frac{2R^{(i)}}{l_2} \mu_0^{(i)}, \\
 a_{11}^{(i)} &= - \left(\frac{2k-1}{2} \pi \right)^2 \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 - \frac{1}{2} (1 - \mu_0^{(i)}) + \left(\frac{R^{(i)} \omega}{c^{(i)}} \right)^2, \quad a_{12}^{(i)} = \frac{1}{2} \left(\frac{2k-1}{2} \pi \right) \frac{2R^{(i)}}{l_2} (1 + \mu_0^{(i)}), \\
 a_{22}^{(i)} &= - \frac{1}{2} \left(\frac{2k-1}{2} \pi \right)^2 \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 (1 + 4(a_0^{(i)})^2) (1 - \mu_0^{(i)}) - (1 + (a_0^{(i)})^2) + \left(\frac{R^{(i)} \omega}{c^{(i)}} \right)^2, \\
 A_{a_3}^{(i)} &= 2 \frac{(-1)^{i-1}}{\left(\frac{2k-1}{2} \right) \pi} \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{(c^{(i)})^2} \left(\frac{\rho R_2}{\rho_0^{(i)} h_0^{(i)}} - (-1)^i \right) E_z \sin \varphi_{z_0}, \\
 A_{c_3}^{(i)} &= 2 \frac{(-1)^{i-1}}{\left(\frac{2k-1}{2} \right) \pi} \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{(c^{(i)})^2} \left(\frac{\rho R_2}{\rho_0^{(i)} h_0^{(i)}} - (-1)^i \right) E_z \cos \varphi_{z_0}, \\
 A_{b_3}^{(i)} &= 2 \frac{(-1)^{i-1}}{\left(\frac{2k-1}{2} \right) \pi} \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{(c^{(i)})^2} \left(\frac{\rho R_2}{\rho_0^{(i)} h_0^{(i)}} - (-1)^i \right) E_x \sin \varphi_{x_0}, \\
 A_{d_3}^{(i)} &= 2 \frac{(-1)^{i-1}}{\left(\frac{2k-1}{2} \right) \pi} \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{(c^{(i)})^2} \left(\frac{\rho R_2}{\rho_0^{(i)} h_0^{(i)}} - (-1)^i \right) E_x \cos \varphi_{x_0}, \\
 A_{c_2}^{(i)} &= \frac{2}{\left(\frac{2k-1}{2} \right) \pi} \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{(c^{(i)})^2} E_z \cos \varphi_{z_0}, \quad A_{a_2}^{(i)} = \frac{2}{\left(\frac{2k-1}{2} \right) \pi} \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{(c^{(i)})^2} E_z \sin \varphi_{z_0}, \\
 A_{d_2}^{(i)} &= - \frac{2}{\left(\frac{2k-1}{2} \right) \pi} \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{(c^{(i)})^2} E_x \cos \varphi_{x_0}, \quad A_{b_2}^{(i)} = - \frac{2}{\left(\frac{2k-1}{2} \right) \pi} \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{(c^{(i)})^2} E_x \sin \varphi_{x_0},
 \end{aligned}$$

$$F = \frac{1}{\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 \pi^2 + \sigma^2} \left(\sigma^3 + \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 \pi^2 \sigma + 2 \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 \pi^2 + \frac{2 \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 \pi^2}{ch \sigma^2 + sh \sigma ch \sigma - 1} \right)$$

Из формул (11) находим амплитудные частотные характеристики для внешней и внутренней оболочек и коэффициенты динамичности, определяющие величину прогиба в сравнении со статическим прогибом ($\omega = 0$)

$$A^{(i)}(\omega) = \sqrt{\frac{\text{num}^{(i)}}{\text{den}}}, \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

$$K^{(i)}(\omega) = A^{(i)}(\omega) / A^{(i)}(0)$$

Для дальнейшего исследования из (9), найдем окончательное выражение для гидродинамического давления в слое жидкость:

$$p = p_0 + \frac{\rho R_2 \omega^2}{\psi \text{Re}} K_\zeta \times \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \times \sqrt{(12\nu)^2 + (2\varepsilon^2 w)^2} \sqrt{(A^{(1)}(\omega))^2 + (A^{(2)}(\omega))^2 - 2A^{(1)}(\omega)A^{(2)}(\omega)\cos(\Psi - \Theta)} \times \\ & \times (E_x \omega^2 \sin \theta \sin(\tau + \varphi_{x_0} + \Gamma + X) + E_z \omega^2 \cos \theta \sin(\tau + \varphi_{z_0} + \Gamma + X)) - \\ & - \rho R_2 \omega^2 [E_z \sin(\tau + \varphi_{z_0}) \cos \theta + E_x \sin(\tau + \varphi_{x_0}) \sin \theta] \end{aligned}$$

$$\Gamma = \text{arctg} \left(-\frac{12\nu}{2\varepsilon^2 w} \right), \quad X = \text{arctg} \frac{A^{(2)}(\omega) \sin \eta^{(2)}(\omega) - A^{(1)}(\omega) \sin \eta^{(1)}(\omega)}{A^{(2)}(\omega) \cos \eta^{(2)}(\omega) - A^{(1)}(\omega) \cos \eta^{(1)}(\omega)},$$

где:

$$K_\zeta = \frac{\sigma^2 \cos\left(\frac{2k-1}{2} \pi \zeta\right)}{\sigma^2 + \left(\frac{2k-1}{2} \pi\right)^2}$$

Таким образом, из (13) можно выделить амплитудные частотные и фазовые частотные характеристики для давления

$$Ad(\omega) = \frac{\rho R_2 \omega^2}{\psi \text{Re}} K_\zeta \sqrt{(12\nu)^2 + (2\varepsilon^2 w)^2} \times \quad (14)$$

$$\times \sqrt{(A^{(1)}(\omega))^2 + (A^{(2)}(\omega))^2 - 2A^{(1)}(\omega)A^{(2)}(\omega)\cos(\Psi - \Theta)},$$

$$Fz(\omega) = \Gamma + X$$

Полученные амплитудные частотные характеристики оболочек и давления будем использовать для исследования резонансных явлений в оболочках.

Далее определим закон кавитационного износа оболочек на основе экспериментальных данных.

Для некоторых типов двигателей внутреннего сгорания с водяным охлаждением, которые можно описать представленной моделью, известен процесс износа внутренней и внешней оболочек [12, 13]. Кавитационный износ, который может возникать в процессе работы, является одной из причин износа поверхности оболочек. Кавитационный износ возникает из-за появления и схлопывание паровоздушных пузырьков. Появление паровоздушных пузырьков происходит из-за падения давления до уровня давления насыщенного пара [3]. В последствие при повышении давления паровоздушные пузырьки схлопываясь, вызывают износ поверхности. Кроме того, кавитационная коррозия вызывает истонщение стенки гильзы, что может приводить к образованию трещин и способствовать выходу из строя элемента конструкции, содержащей слой жидкости [3].

В [12, 13] для двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением, был описан эксперимент для определения кавитационного износа. Будем предполагать, что в предложенной математической модели внутренняя и внешняя оболочки изнашиваются одинаково по полученному закону. Кроме того, осуществим процесс моделирования поведения давления в слое жидкости.

Об интенсивности кавитационных разрушений гильз можно также судить по потерям массы. Для двигателей внутреннего сгорания известно о существовании критического значения потерянной массы для гильзы двигателя, вследствие кавитационной коррозии [12, 13]. При достижении данного критического значения у гильзы двигателя внутреннего сгорания может быть превышено максимально допустимое значение радиальной деформации, либо наступить разрушение.

Используя экспериментальные данные [12, 13] получим, что закон износа поверхности гильзы хорошо аппроксимируется линейным регрессионным уравнением, которое в общем виде можно записать в следующем виде:

$$h = h^0 - 2 \cdot 10^{-12} L_{np}, \quad (14)$$

где: h^0 – первоначальная толщина, м; L_{np} – пробег, м.

Используемый в экспериментальных данных «пробег автомобиля» нетрудно преобразовать в более подходящее понятие «время работы». Коэффициент пересчета из пробега в часы работы получим равной $1/60$ час/км, учитывая, что средняя скорость движения автомобиля составляет 60 км/час. Тогда предложенный закон износа может применяться для любых математических моделей подобного типа.

Кроме того, будем учитывать, что для исследуемой механической системы износ происходит по-разному. Так уменьшение толщины для внутренней оболочки происходит с внешней стороны, а для внешней оболочки – с внутренней.

Расчет массы потерь (потери объема), амплитудных и фазовых частотных характеристик прогибов и давления в слое жидкости (табл. 1, 2) производились для модели имеющей следующие параметры: $R_1=7,8 \cdot 10^{-2}$ м, $R_2=6,2 \cdot 10^{-2}$ м, $l_2=2,5 \cdot 10^{-1}$ м, $h_0^{(1)}=8 \cdot 10^{-3}$ м, $h_0^{(2)}=2 \cdot 10^{-3}$ м, $E^{(1)}=E^{(2)}=1011$ Па, $\mu_0^{(1)}=\mu_0^{(2)}=0,25$, $\rho_0^{(1)}=\rho_0^{(2)}=6,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho=103$ кг/м³, $\nu=10^{-4}$ м²/с, $\delta=10^{-2}$ м, $k=1$.

Математическое моделирование уменьшения объема оболочек с использованием закона кавитационного износа (14) показали (табл. 1), что наблюдается значительная потеря объема как внутренней, так и внешней оболочки. Относительная потеря объема (масса

потерь) внутренней оболочки больше, чем относительная потеря объема внешней оболочки, что можно объяснить меньшей толщиной внутренней оболочки.

Так как происходит истончение оболочек, следовательно, в процессе работы меняются размеры механической системы, и происходит сдвиг резонансных частот и изменение соответствующих им амплитуд.

Таблица 1

Износ внешней и внутренней оболочки в зависимости от пробега (составлено авторами)

Пробег, тыс. км	Часы работы, час	Потеря объема внутренней оболочки, м ³	Относительная потеря объема внутренней оболочки, %	Потеря объема внешней оболочки, м ³	Относительная потеря объема внешней оболочки, %
0	0	0	0	0	0
50	833	9,73E-06	5,08	1,23E-05	1,19
70	1167	1,36E-05	7,11	1,72E-05	1,67
158	2633	3,07E-05	16,02	3,88E-05	3,76
200	3333	3,88E-05	20,26	4,91E-05	4,77
450	7500	8,70E-05	45,41	1,11E-04	10,76

Таблица 2

Значения резонансных частот и соответствующих им амплитуд, коэффициентов динамичности, амплитудных и фазовых частотных характеристик давления в зависимости от пробега или времени работы (составлено авторами)

0 тыс. км (0 часов работы)

450 тыс. км (7500 часов работы)

Частота ω , рад/с	0 тыс. км (0 часов работы)					450 тыс. км (7500 часов работы)				
	$A^{(2)}(\omega)$, с ²	$K^{(2)}(\omega)$	$Ad(\omega)$, Па·с ² /м	$Fz(\omega)$, ед. π		$A^{(2)}(\omega)$, с ²	$K^{(2)}(\omega)$	$Ad(\omega)$, Па·с ² /м	$Fz(\omega)$, ед. π	
2451	5,85E-07	9,15E+01	2,33E+01	-8,81E-03		1,07E-06	7,15E+01	2,97E+01	-3,01E-02	
18153	4,91E-03	7,68E+05	2,18E+02	-4,56E-04		1,06E-02	7,07E+05	1,40E+02	2,51E-04	
47704	5,32E-07	8,32E+01	3,18E+01	-6,67E-04		1,24E-06	8,27E+01	3,98E+01	4,11E-04	
55520	5,98E-06	9,34E+02	9,29E+00	9,47E-05		7,42E-06	4,97E+02	5,64E+01	9,81E-06	
76102	1,62E-06	2,53E+02	1,42E+02	-3,87E-04		4,12E-06	2,76E+02	8,91E+00	2,15E-04	
89184	1,80E-06	2,82E+02	2,04E+02	6,17E-05		2,16E-06	1,45E+02	4,78E+00	4,71E-06	

0 тыс. км (0 часов работы)

450 тыс. км (7500 часов работы)

Частота ω , рад/с	0 тыс. км (0 часов работы)					450 тыс. км (7500 часов работы)				
	$A^{(1)}(\omega)$, с ²	$K^{(1)}(\omega)$	$Ad(\omega)$, Па·с ² /м	$Fz(\omega)$, ед. π		$A^{(1)}(\omega)$, с ²	$K^{(1)}(\omega)$	$Ad(\omega)$, Па·с ² /м	$Fz(\omega)$, ед. π	
2450	1,35E-07	2,17E+01	2,33E+01	-8,81E-03		1,53E-07	2,35E+01	2,96E+01	-3,00E-02	
18153	4,93E-03	7,92E+05	2,18E+02	-4,56E-04		1,06E-02	1,63E+06	1,40E+02	2,51E-04	
47704	5,72E-07	9,19E+01	3,18E+01	-6,67E-04		1,30E-06	2,00E+02	3,98E+01	4,11E-04	
55520	5,82E-06	9,35E+02	9,29E+00	9,47E-05		7,25E-06	1,11E+03	5,64E+01	9,81E-06	
76102	1,67E-06	2,68E+02	1,42E+02	-3,87E-04		4,20E-06	6,46E+02	8,91E+00	2,15E-04	
89184	1,76E-06	2,83E+02	2,04E+02	6,17E-05		2,11E-06	3,25E+02	4,78E+00	4,71E-06	

Расчеты амплитудных частотных характеристик давления (табл. 2) при различных временах работы (пробегах) на резонансных частотах показывают, что в зависимости от месторасположения точки измерения давления, начального давления и величин перепада давления действительно давление в слое жидкости может достигать уровня 0,2 атмосферы, а, следовательно, действительно возможно возникновение кавитации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башта Т.М. Машиностроительная гидравлика. М.: Машгиз, 1963. 696 с.
2. Могилевич Л.И., Попов В.С. Прикладная гидроупругость в машино- и приборостроении. Саратов: ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ», 2003. 156 с.
3. Иванченко Н.Н., Скуридин А.А., Никитин М.Д. Кавитационные разрушения в дизелях. Л.: Машиностроение, 1970. 152 с.
4. Amabili M., Pellicano F., Pandoussis M.P. Non-Linear Dynamics and Stability of Circular Cylindrical Shells Conveying Flowing Fluid // *Computers & Structures*. 2002. Vol. 80. P. 899-906.
5. Curling, L.R., Pandoussis M.P. Analyses of Random Flow-Induced Vibration of Cylindrical Structures Subjected to Turbulent Axial Flow // *Journal of Sound and Vibration*. 2003. Vol. 264. P. 795-833.
6. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Могилевич Л.И. Математическое моделирование ламинарного движения жидкости в упругой цилиндрической трубе кольцевого профиля со свободным опиранием по торцам // *Вестник Саратовского государственного технического университета*. 2009. Т. 1. №1 (37). С. 33-40.
7. Плаксина И.В., Кондратов Д.В., Кузнецова Е.Л. Гидроупругость геометрически нерегулярной оболочки, содержащей слой вязкой жидкости и упругий цилиндр, в условиях гармонического давления // *Научные труды SWorld*. 2013. Т. 6. №4. С. 17-20.
8. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Упругогидродинамика машин и приборов на транспорте. М.: РГОТУПС, 2007. 168 с.
9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 2003. 840 с.
10. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
11. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости: пер. с англ. М.: Мир, 1967. 310 с.
12. Симдянкин А.А. Контактное-силовое взаимодействие деталей цилиндро-поршневой группы. Саратов: ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ», 2003. 144 с.
13. Симдянкин А.А. Моделирование динамического взаимодействия деталей цилиндро-поршневой группы двигателя внутреннего сгорания // *Математическое моделирование и управление в технических системах*. – Саратов: Изд-во Сарат. гос. ун-та, 1998. Вып. 2. С. 87-106.

Kondratov Dmitry Vyacheslavovich

The Russian presidential academy of national economy and public administration
Saratov branch, Russia, Saratov
E-mail: kondratovdv@yandex.ru

Kondratova Yulia Nikolaevna

Saratov state university, Russia, Saratov
E-mail: kondratovaun@mail.ru

Mogilevich Lev Ilich

Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov
E-mail: mogilevich@sgu.ru

Hristoforova Alevtina Vladimirovna

Saratov state university
Balashov branch, Russia, Balashov
E-mail: alevtinahristoforova@yandex.ru

Mathematical modeling of the two coaxial cylindrical shells interaction under vibration and shells wear consideration, the liquid layer existing between them

Abstract. The article discusses a mechanical model of the pipe, formed by the two elastic coaxial cylindrical shells with free leaning at the ends and comprising a layer of a viscous incompressible liquid between them. The presented mechanical model is under harmonic in time vibroacceleration. In accordance with the mechanical model, a mathematical model of the tube, which presents a coherent system of fluid dynamics equations and the equations of inner and outer cylindrical shells dynamics, based on Kirchhoff-Love hypotheses, and possessing corresponding boundary conditions. The solution of this coupled system is carried out by the perturbations method in a dimensionless variables. The relative width viscous incompressible liquid layer and the relative deflections of the outer and inner shells are chosen as small parameters in the perturbations method. The application of the perturbations method allows to linearize liquid dynamics equations. The problem solution resulted in defining amplitude frequency characteristics expressions for the inner and outer pipe shells, as well as for the pressure in the liquid layer. The amplitude and frequency characteristics values for the inner and outer shells at resonance frequencies are shown. Numerical modeling of the amplitude frequency characteristics behavior for inner and outer shells, depending on working time (mileage), according to shells wear well known law is made.

Keywords: hydroelasticity; coaxial cylindrical shell; viscous incompressible liquid; vibration; cavitation wear; mathematical model; free leaning at the ends; amplitude frequency characteristics

REFERENCES

1. Bashta T.M. Mashinostroitelnaya gidravlika. M.: Mashgiz, 1963. 696 s.
2. Mogilevich L.I., Popov V.S. Prikladnaya gidrouprugost' v mashino- i priborostroenii. Saratov: FGOU VPO «Saratovskiy GAU», 2003. 156 s.
3. Ivanchenko N.N., Skuridin A.A., Nikitin M.D. Kavitatsionnye razrusheniya v dizelyakh. L.: Mashinostroenie, 1970. 152 s.
4. Amabili M., Pellicano F., Pandoussis M.P. Non-Linear Dynamics and Stability of Circular Cylindrical Shells Conveying Flowing Fluid // Computers & Structures. 2002. Vol. 80. P. 899-906.
5. Curling, L.R., Pandoussis M.P. Analyses of Random Flow-Induced Vibration of Cylindrical Structures Subjected to Turbulent Axial Flow // Journal of Sound and Vibration. 2003. Vol. 264. P. 795-833.
6. Kondratov D.V., Kondratova Yu.N., Mogilevich L.I. Matematicheskoe modelirovanie laminarnogo dvizheniya zhidkosti v uprugoy tsilindricheskoy trube kol'tseвого profilya so svobodnym opiraniem po tortsam // Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2009. T. 1. №1 (37). S. 33-40.
7. Plaksina I.V., Kondratov D.V., Kuznetsova E.L. Gidrouprugost' geometricheski neregulyarnoy obolochki, sodержashchey sloy vyazkoy zhidkosti i uprugiy tsilindr, v usloviyakh garmonicheskogo davleniya // Nauchnye trudy SWorld. 2013. T. 6. №4. S. 17-20.
8. Kondratov D.V., Mogilevich L.I. Uprugogidrodinamika mashin i priborov na transporte. M.: RGOTUPS, 2007. 168 s.
9. Loytsyanskiy L.G. Mekhanika zhidkosti i gaza. M.: Nauka, 2003. 840 s.
10. Biderman V.L. Mekhanika tonkostennykh konstruktsiy. M.: Mashinostroenie, 1977. 488 s.
11. Van-Dayk M. Metody vozmushcheniy v mekhanike zhidkosti: per. s angl. M.: Mir, 1967. 310 s.
12. Simdyankin A.A. Kontaktno-silovoe vzaimodeystvie detaley tsilindro-porshnevoy gruppy. Saratov: FGOU VPO «Saratovskiy GAU», 2003. 144 s.
13. Simdyankin A.A. Modelirovanie dinamicheskogo vzaimodeystviya detaley tsilindro-porshnevoy gruppy dvigatelya vnutrennego sgoraniya // Matematicheskoe modelirovanie i upravlenie v tekhnicheskikh sistemakh. – Saratov: Izd-vo Sarat. gos. un-ta, 1998. Vyp. 2. S. 87-106.