

Интернет-журнал «Наукоедение» ISSN 2223-5167 <http://naukovedenie.ru/>

Том 9, №2 (2017) <http://naukovedenie.ru/vol9-2.php>

URL статьи: <http://naukovedenie.ru/PDF/91TVN217.pdf>

Статья опубликована 12.05.2017

Ссылка для цитирования этой статьи:

Попов В.С., Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование колебаний пластины, установленной на упругом основании Винклера и взаимодействующей со штампом через слой вязкой жидкости // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 9, №2 (2017) <http://naukovedenie.ru/PDF/91TVN217.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

Выполнено при поддержке гранта РФФИ 15-01-01604-а

УДК 532.517.2:539.3

Попов Виктор Сергеевич

ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Россия, Саратов¹

Профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ»

Доктор технических наук

E-mail: vic_p@bk.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9582-7195>

РИНЦ: http://elibrary.ru/author_items.asp?id=13615

SCOPUS: <http://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=55627876864>

Попова Анна Александровна

ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Россия, Саратов

Доцент кафедры «Прикладная математика и системный анализ»

Кандидат технических наук

E-mail: anay_p@bk.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7786-1680>

РИНЦ: http://elibrary.ru/author_items.asp?id=614859

SCOPUS: <http://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=55053629800>

Христофорова Алевтина Владимировна

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Россия, Саратов

Доцент кафедры «Математика»

Кандидат физико-математических наук

E-mail: alevtinahristoforova@yandex.ru

РИНЦ: http://elibrary.ru/author_items.asp?id=499356

**Математическое моделирование колебаний
пластины, установленной на упругом основании Винклера
и взаимодействующей со штампом через слой
вязкой жидкости**

Аннотация. В статье рассматривается механическая модель канала, стенки которого образованы упругой пластиной, установленной на основании Винклера и жестким штампом, имеющим упругий подвес. Между пластиной и штампом находится тонкий пульсирующий слой вязкой несжимаемой жидкости. Пульсация давления в жидкости обусловлена заданным

¹ 410054, Саратов, Саратовская обл., Политехническая ул., 77

законом пульсации давления жидкости на торцах. Используя метод приведенной массы, упругая пластина представляется одномассовой системой. В работе определены приведенная масса и коэффициент жесткости одномассовой системы. Разработана математическая модель рассматриваемой механической системы, которая представляет собой систему уравнений динамики вязкой жидкости и уравнение одномассовой модели, с соответствующими краевыми условиями. Введены в рассмотрение безразмерные переменные и характерные малые параметры задачи. Решение поставленной задачи гидроупругости производится методом возмущений. В качестве малых параметров задачи выбраны относительная толщина слоя вязкой несжимаемой жидкости, и относительная амплитуда колебаний штампа. Использование метода возмущений позволило линеаризовать задачу гидроупругости. Линеаризованная задача решена для режима установившихся гармонических колебаний. Построены амплитудно-частотные характеристики штампа и пластины, а также и давления в слое жидкости. Произведены численные расчеты поведения амплитудно-частотных характеристик и определены резонансные частоты колебаний.

Ключевые слова: гидроупругие колебания; вязкая жидкость; пластина; штамп; математическое моделирование; упругое основание Винклера; амплитудно-частотные характеристики

Математическое моделирование гидроупругого поведения элементов современных конструкций и машин является важной теоретической и практической задачей [1-4]. Например, плоская задача о гидроупругих изгибных колебаниях прямоугольной пластины, погруженной в идеальную несжимаемую жидкость со свободной поверхностью исследована в [5]. Математическая модель для исследований хаотических гидроупругих колебаний пластины при ее взаимодействии с потоком идеальной несжимаемой жидкости разработана и исследована в [6]. Исследование колебаний круглой пластины на свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости выполнено в [7]. Аналогичное исследование проведено в [8] для круглой пластины, погруженной в воду со свободной поверхностью. В работе [9] предложена математическая модель изгибных колебаний балки-полоски, взаимодействующей с идеальной жидкостью, и на ее основе проведено исследование кавитационного ресурса гильзы двигателя внутреннего сгорания. С другой стороны, крайне важно производить учет вязкости жидкости при исследовании гидроупругих колебаний. Например, исследованию важности учета демпфирующих свойств слоя вязкой жидкости, на котором происходят гармонические колебания бесконечно длинной балки, посвящена работа [10]. В работах [11-18] рассмотрены задачи гидроупругости однородных, ребристых и трехслойных пластин, образующих стенки канала и взаимодействующих со слоем вязкой жидкости в условиях вибрации канала и пульсации давления в жидкости. Гидроупругие колебания стенки клиновидного канала с вязкой жидкостью исследованы в [19-20]. В работе [21] предложена математическая модель для исследований колебаний балки в потоке вязкой жидкости применительно к пьезопреобразователям. Гидроупругие колебания консольно закрепленной пластины, находящейся в потоке вязкой несжимаемой жидкости исследованы в [22]. Вместе с тем, представляет интерес исследование колебаний пластины-стенки канала, установленной на упругом основании и взаимодействующей с вязкой жидкостью.

Рассмотрим схему узкого щелевого канала (см. рис. 1), заполненного вязкой пульсирующей жидкостью 3. Стенки канала образованы штампом 1, имеющим упругий подвес и пластиной 2, установленной на упругом основании Винклера 4. Пластина совершает изгибные колебания, ее толщина h_0 , а ширина 2ℓ и длина b совпадают с длиной и шириной штампа. На торцах пластина шарнирно оперта. Ширина канала 2ℓ значительно меньше, его длины b , а амплитуды колебания штампа z_{1m} и прогибов пластины w_m значительно меньше

средней толщины слоя жидкости δ_0 в канале. Свяжем декартовую систему координат $Oxyz$ с центром пластины. Согласно указанному выше, будем исследовать плоскую задачу и полагать, что $b \gg \ell$, т.е. далее считаем размер канала в направлении оси y неограниченно большим. На торцах канала, слева и справа задан закон изменения давления $P_0 + p(\omega t)$. Далее будем исследовать режим установившихся гармонических колебаний, т.к. вследствие вязкости жидкости переходные процессы в рассматриваемой системе быстро затухают.

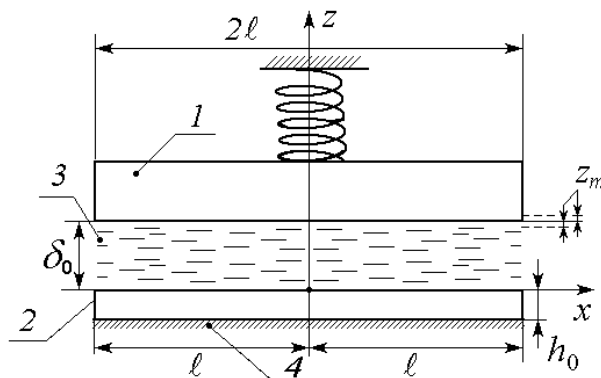


Рисунок 1. Расчетная схема щелевого канала с вязкой жидкостью (составлено авторами)

Закон изменения давления на торцах представим в виде:

$$p = p_0 + p_m \sin \omega t, \quad (1)$$

здесь: P_0 - статический уровень давления, p_m - амплитуда пульсации давления, ω - частота; t - время.

Прогибы пластины при ее изгибных колебаниях будем моделировать как перемещения одномассовой системы, в соответствии с подходом, предложенным в [23]. Согласно данному подходу, для моделирования изгибных колебаний пластины на основной моде, осуществляется переход к одномассовой модели на базе метода приведенной массы, т.е. рассматриваем пластину как жесткую, имеющую приведенную массу m^* , и подвешенную на пружине с приведенной жесткостью n^* . Приведенную массу m^* находим из условия равенства кинетической энергии распределенной системы и одномассовой системы

$$m^* = (w_a)^{-2} \int_{-\ell}^{\ell} m_c (w(x))^2 dx, \quad m_c = \rho_0 b h_0, \quad (2)$$

здесь: m_c - масса пластины, приходящаяся на единицу ее ширины 2ℓ , ρ_0 - плотность материала пластины, $w(x)$ - форма прогиба пластины, w_a - прогиб пластины в точке сосредоточения массы $x = a$.

Приведенную жесткость n^* определим из условия совпадения статического прогиба пластины w_{\max} , при действии равномерно распределенной нагрузки эквивалентной силе $F^* = 1$ Н, со статическим перемещением одномассовой системы

$$n^* = F^* / w_{\max}. \quad (3)$$

Выбирая в качестве формы прогиба пластинки на основании Винклера ее прогиб под действием равномерно распределенной нагрузки и представляя его в виде тригонометрического ряда по продольной координате, а затем, ограничиваясь первым членом

данного ряда и сосредотачивая массу в середине пластины, т.е. при $x = 0$, получим следующие выражения для приведенной массы и жесткости:

$$m^* = \rho_0 b h_0 \ell, \quad n^* = \frac{\pi^5 D}{32 b \ell^3} \left(1 + \frac{\varepsilon}{D} \left(\frac{2\ell}{\pi} \right)^4 \right), \quad D = \frac{E h_0^3}{12(1 - \mu_0^2)}, \quad (4)$$

здесь: μ_0 - коэффициент Пуассона материала пластины, ε - коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели), E - модуль Юнга материала пластины.

В результате, в предложенном подходе, колебания стенок канала будут описываться следующей системой уравнений:

$$m_1 \ddot{z}_1 + n_1 z_1 = N_1, \quad m^* \ddot{z}_2 + n^* z_2 = N_2, \quad (5)$$

здесь: m_1 - масса штампа; n_1 - жесткости упругого подвеса штампа; $z_1 = z_{1m} f_1(\omega t)$ - закон движения штампа, $z_2 = z_{2m} f_2(\omega t)$ - закон движения пластины как одномассовой системы, z_{1m} , z_{2m} - амплитуды колебаний штампа и пластины, n_1, n_2 - силы, действующие со стороны вязкого слоя жидкости на стенки штамп и пластину.

Выражения для сил n_1, n_2 запишутся как

$$N_2 = b \int_{-\ell}^{\ell} q_{zz} dx \quad \text{при } z = z_{2m} f_2(\omega t); \quad N_1 = -b \int_{-\ell}^{\ell} q_{zz} dx \quad \text{при } z = \delta_0 + z_{1m} f_1(\omega t), \quad (6)$$

здесь $q_{zz} = -p + 2\rho\nu(\partial u_z / \partial z)$ - нормальное напряжение в слое вязкой жидкости [1-4].

Движение вязкой жидкости, находящейся в узком канале может рассматриваться как ползущее [19-20]. Данное движение описывается системой уравнений Навье-Стокса и уравнением неразрывности из которой исключены инерционные члены:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

где: u_x, u_z - проекции вектора скорости жидкости на оси координат, p - давление, ρ, ν - плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Краевые условия - условия прилипания жидкости к стенкам и условия свободного истечения на левом и правом торце [1-4]:

$$u_x = 0, \quad u_z = \dot{z}_1 \quad \text{при } z = \delta_0 + z_{1m} f_1(\omega t); \quad u_x = 0, \quad u_z = \dot{z}_2 \quad \text{при } z = z_{2m} f_2(\omega t), \quad (8)$$

$$p = p_0 + p(\omega t) \quad \text{при } x = -\ell, \quad p = p_0 + p(\omega t) \quad \text{при } x = \ell, \quad (9)$$

Введем безразмерные переменные

$$\psi = \delta_0 / \ell \ll 1, \quad \lambda = z_{1m} / \delta_0 \ll 1, \quad \tau = \omega t, \quad \xi = x / \ell, \quad \zeta = z / \delta_0; \quad (10)$$

$$u_z = z_{1m} \omega U_\zeta; \quad u_x = z_{1m} \omega U_\xi / \psi; \quad p = p_0 + p(\tau) + \rho v z_{1m} \omega (\delta_0 \psi^2)^{-1} P.$$

Здесь ψ, λ - параметры, характеризующие задачу.

Подставляя (10) в (6)-(9) получаем задачу упругогидродинамики в безразмерном виде, включающую в себя уравнения динамики жидкости

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \psi^2 \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \psi^2 \left[\psi^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} \right]; \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \quad (11)$$

и уравнения движения стенок канала

$$m_1 \ddot{z}_1 + n_1 z_1 = 2b\ell(p_0 + p(\tau)) + \frac{b\ell\rho v z_{1m} \omega}{\delta_0 \psi^2} \int_{-1}^1 \left(P - 2\psi^2 \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) d\xi, \quad (12)$$

$$m^* \ddot{z}_2 + n^* z_2 = -2b\ell(p_0 + p(\tau)) - \frac{b\ell\rho v z_{1m} \omega}{\delta_0 \psi^2} \int_{-1}^1 \left(P - 2\psi^2 \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) d\xi.$$

При этом граничные условия (8), (9) запишутся в виде

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df_1}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1 + \lambda f_1(\tau); \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = 0 \text{ при } \zeta = \lambda(z_{2m}/z_{1m})f_2(\tau); \quad (13)$$

$$P = 0 \text{ при } \xi = \pm 1.$$

Учитывая, что $\psi \ll 1$, в нулевом приближении по ψ уравнения (11) и (12) упрощаются, так как в них можно пренебречь членами при ψ^2 . Принимая во внимание, что $\lambda = o(1)$, а колебания стенок канала значительно меньше толщины слоя жидкости, можно утверждать, что $z_{2m}/z_{1m} = O(1)$. Тогда в нулевом приближении по ψ и λ получим:

- задачу динамики вязкой жидкости в виде уравнений

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \quad (14)$$

и граничных условий

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df_1}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1; \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df_2}{d\tau} \text{ при } \zeta = 0; \quad (15)$$

$$P = 0 \text{ при } \xi = \pm 1,$$

- уравнения движения стенок канала (штампа и пластины)

$$m_1 \ddot{z}_1 + n_1 z_1 = 2b\ell(p_0 + p(\tau)) + \frac{b\ell\rho v z_{1m} \omega}{\delta_0 \psi^2} \int_{-1}^1 P d\xi, \quad (16)$$

$$m^* \ddot{z}_2 + n^* z_2 = -2b\ell(p_0 + p(\tau)) - \frac{b\ell\rho v z_{1m} \omega}{\delta_0 \psi^2} \int_{-1}^1 P d\xi.$$

Решение уравнений динамики вязкой жидкости (14) с учетом граничных условий (15) позволяет записать давление жидкости в виде

$$P = 6(\xi^2 - 1) \left[\frac{df_1}{d\tau} - \frac{z_{2m}}{z_{1m}} \frac{df_2}{d\tau} \right] \quad (17)$$

Уравнения (16) с учетом решения (17) принимают вид

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + n_1 \dot{z}_1 + K \dot{z}_1 - K \dot{z}_2 &= 2b\ell(p_0 + p(\tau)), \\ m^* \ddot{z}_2 + n^* \dot{z}_2 + K \dot{z}_2 - K \dot{z}_1 &= -2b\ell(p_0 + p(\tau)) \end{aligned} \quad (18)$$

здесь введены обозначения $K = 8lb\rho\nu(\delta_0\psi^2)^{-1}$.

Решение уравнений (18) при гармоническом законе пульсации давления на торцах (1) имеет вид

$$z_1 = \frac{2b\ell p_0}{n_1} + \frac{2b\ell p_m}{n_1} A_1(\omega) \exp i[\omega t + \varphi_1(\omega)] \quad (19)$$

$$z_2 = -\frac{2b\ell p_0}{n^*} - \frac{2b\ell p_m}{n^*} A_2(\omega) \exp i[\omega t + \varphi_2(\omega)] \quad (20)$$

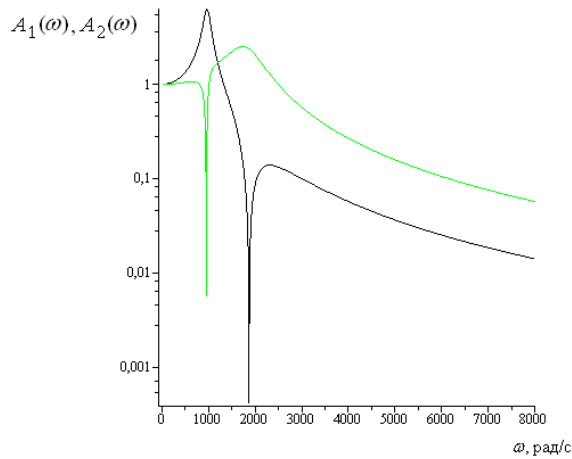
$$\varphi_1(\omega) = \varphi_2(\omega) = \text{arctg} \left(\frac{K\omega(\omega^2(m_1 + m^*) - (n_1 + n^*))}{(n_1 - m_1\omega^2)(n^* - m^*\omega^2)} \right)$$

где $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$ - амплитудные частотные характеристики (АЧХ) стенок канала, определяемые следующими выражениями

$$\begin{aligned} A_1(\omega) &= \frac{n_1}{\sqrt{(n_1 - m_1\omega^2)^2 + K^2\omega^2(n_1 + n^* - \omega^2(m_1 + m^*))^2(n^* - m^*\omega^2)^{-2}}}, \\ A_2(\omega) &= \frac{n^*}{\sqrt{(n^* - m^*\omega^2)^2 + K^2\omega^2(n_1 + n^* - \omega^2(m_1 + m^*))^2(n_1 - m_1\omega^2)^{-2}}}. \end{aligned}$$

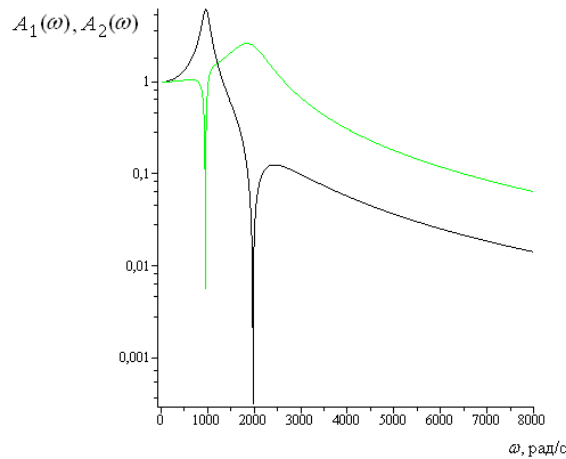
Таким образом, выражения (19), (20) определяют закон гидроупругих перемещений стенок канала. Можно заметить, что при $\omega \rightarrow 0$ мы получаем $A_1(\omega) = 1$, $A_2(\omega) = 1$, а при $\omega \rightarrow \infty$ имеем $A_1(\omega) = 0$, $A_2(\omega) = 0$.

Для иллюстрации построенной модели приведем пример расчета полученных амплитудных частотных характеристик, которые позволяют определить резонансные частоты колебаний стенок. При расчетах была рассмотрена модель со следующими параметрами: $\ell = 10^{-1}$ м, $\delta_0/\ell = 1/15$, $b/\ell = 5$, $h_0/\ell = 2 \cdot 10^{-2}$, $\rho = 1,84 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu = 2,5 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\rho_0 = 7,87 \cdot 10^3$ кг/м³, $\mu_0 = 0,3$, $n_1 = 3,6 \cdot 10^6$ кг/с², $m_1 = 4$ кг, $E = 1,96 \cdot 10^{11}$ Па. Результаты расчетов представлены на рис. 2-4 (на рис. 2 представлены АЧХ при $\varepsilon = 0$ МПа/м, на рис. 2 - при $\varepsilon = 1$ МПа/м, на рис. 3 - при $\varepsilon = 10$ МПа/м).



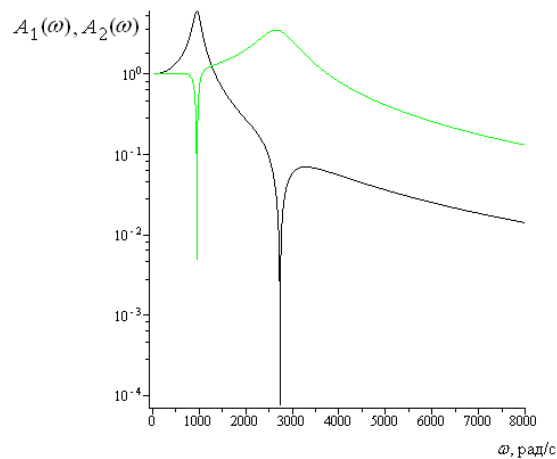
$A_1(\omega)$ - черная линия, $A_2(\omega)$ - зеленая линия

Рисунок 2. Зависимость амплитудных частотных характеристик от ω
(составлено авторами)



$A_1(\omega)$ - черная линия, $A_2(\omega)$ - зеленая линия

Рисунок 3. Зависимость амплитудных частотных характеристик от ω
(составлено авторами)



$A_1(\omega)$ - черная линия, $A_2(\omega)$ - зеленая линия

Рисунок 4. Зависимость амплитудных частотных характеристик от ω
(составлено авторами)

Построенная математическая модель и проведенные расчеты показали важность учета наличия упругого основания при рассмотрении гидроупругого взаимодействия пластины со штампом через слой вязкой жидкости. В частности, расчеты показывают существенное влияние упругого основания на резонансные частоты колебаний пластины и штампа (данным частотам соответствуют максимумы АЧХ, см. рис. 3-4). Предложенная в работе модель может быть использована для развития неразрушающих технологий диагностирования упругих элементов конструкций, установленных на основания Винклера, а также для определения свойств упругого основания по параметрам вынужденных колебаний упругих конструкций, базирующихся на них.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 591 с.
2. Морозов В.И., Пономарев А.Т., Рысев О.В. Математическое моделирование сложных аэроупругих систем. М.: Физматлит, 1995. 736 с.
3. Могилевич Л.И., Попов В.С. Прикладная гидроупругость в машино- и приборостроении. Саратов: Саратовский ГАУ, 2003. 156 с.
4. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Упругогидродинамика машин и приборов на транспорте. М.: РГОТУПС, 2007. 169 с.
5. Haddara M.R. and Cao S. A Study of the Dynamic Response of Submerged Rectangular Flat Plates // *Marine Structures*. Vol. 9. №10. 1996. P. 913-933.
6. Аврамов К.В., Стрельникова Е.А. Хаотические колебания пластинок при их двустороннем взаимодействии с потоком движущейся жидкости // *Прикладная механика*. 2014. Т. 50. №3. С. 86-93.
7. Amabili M. Vibrations of Circular Plates Resting on a Sloshing Liquid: Solution of the Fully Coupled Problem // *Journal of Sound and Vibration*. 2001. Vol. 245. № 2. P. 261-283.
8. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M., Hydroelastic Vibration of Circular Plates Immersed in a Liquid-filled Container with Free Surface // *Journal of Sound and Vibration*. 2013. Vol. 332. №12. P. 3064-3085.
9. Индейцев Д.А., Полипанов И.С., Соколов С.К. Расчет кавитационного ресурса втулки судовых двигателей // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 1994. №4. С. 59-64.
10. Önsay T. Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system // *Journal of Sound and Vibration*. 1993. Vol. 163. №2. P. 231-259.
11. Попова А.А. Математическое моделирование динамических процессов в виброопоре с упругими элементами конструкции // *Вестник Саратовского государственного технического университета*. 2007. Т. 1. №4. С. 25-31.
12. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругих элементов вибромашины со сдвливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2010. №4. С. 23-32.
13. Попова А.А. Математическое моделирование процессов взаимодействия вязкой жидкости с тонкостенными ребристыми элементами гидродинамических

- демпферов и трубопроводов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Саратовский государственный технический университет. Саратов, 2008. 174 с.
14. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. № 78.
 15. Агеев Р.В., Кузнецова Е.Л., Куликов Н.И., Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическая модель движения пульсирующего слоя вязкой жидкости в канале с упругой стенкой // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. №3. С. 17-35.
 16. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. №1. С. 3-11.
 17. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N., Kuznetsova E.L. Mathematical model of three-layer plate interaction with viscous incompressible liquid layer under foundation vibration // Applied Mathematical Sciences. 2015. Т. 9. №112. С. 5551-5559.
 18. Могилевич Л.И., Попов В.С. Исследование взаимодействия слоя вязкой несжимаемой жидкости со стенками канала, образованного соосными вибрирующими дисками // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2011. №3. С. 42-55.
 19. Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N. Mathematical modeling of elastically fixed wall longitudinal oscillations of wedge-shaped channel under foundation vibration // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2016. Т. 12. №4. С. 9-17.
 20. Popov V.S., Popova A.A., Sokolova D.L. Mathematical modeling of longitudinal oscillations tapered narrow channel wall under pulsating pressure of highly viscous liquid // Applied Mathematical Sciences. 2016. Т. 10. №53. С. 2627-2635.
 21. Akcabay D.T., Young Y.L. Hydroelastic Response and Energy Harvesting Potential of Flexible Piezoelectric Beams in Viscous Flow // Physics of Fluids. 2012, Vol.24. №5.
 22. Faria Cassio T., Inman Daniel J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler-Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // Mechanical Systems and Signal Processing. Vol. 45. №2. 2014. P. 317-329.
 23. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругого цилиндра со слоем вязкой несжимаемой жидкости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2004. №5. С. 179-190.

Popov Victor Sergeevich

Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov
E-mail: vic_p@bk.ru

Popova Anna Aleksandrovna

Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov
E-mail: anay_p@bk.ru

Christoforova Alevtina Vladimirovna

Saratov state university, Russia, Saratov
E-mail: alevtinahristoforova@yandex.ru

Mathematical modeling of oscillations of a plate resting on Winkler foundation and interacting with a stamp through the viscous liquid layer

Abstract. The article considers a mechanical model of the narrow channel which formed by elastic plate resting on Winkler foundation and a rigid stamp with spring suspension. The channel filled a pulsating viscous incompressible fluid. The pulsation of fluid in channel caused by specified pressure pulsation law at the channel edges. The plate resting on elastic is modeled as spring-mass system. Equivalent mass and stiffness of spring were defined. The mathematical model of the narrow channel was built. It consist of fluid dynamics equation and equation of spring-mass system, as well as appropriate boundary conditions. We suggested the dimensionless variables and small parameters for the considered hydroelastic problem. The relative thickness of liquid in the channel and relative amplitude of stamp oscillations are taken as small parameters. The elastic plate is modeled as spring-mass system by equivalent mass method. The hydroelastic problem is linearized by perturbations method. We solved the linearized problem for the regime of steady-state harmonic oscillations. The stamp amplitude-frequency characteristic and the plate one are received. The calculations of amplitude-frequency characteristic behavior for stamp and plate were done, as well as, resonance frequencies were found.

Keywords: hydroelastic oscillations; viscous fluid; plate; stamp; mathematical modeling; Winkler foundation; amplitude-frequency characteristics

REFERENCES

1. Gorshkov, A.G., Morozov, V.I., Ponomarev, A.T., Shklyarchuk F.N. Aerohydroelasticity of Structures, Moscow: Fizmatlit, 2000.
2. Morozov V.I., Ponomarev A.T., Rysev O.V., Mathematical Modeling of Complex Aeroelastic Systems, Fizmatlit, Moscow, 1995.
3. Mogilevich L.I., Popov V.S. Applied Hydroelasticity of Mashino-and Instrument Making: Saratov: Saratov State Agrarian University, 2003.
4. Kondratov D.V., Mogilevich L.I. Elasto-hydrodynamic of Machines and Devices on Transport, Moscow: RGOTUPS, 2007.
5. Haddara M.R. and Cao S. A Study of the Dynamic Response of Submerged Rectangular Flat Plates // Marine Structures. 1996. Vol. 9. No 10. P. 913-933.
6. Avramov K.V., Strel'nikova E.A. Chaotic Oscillations of Plates Interacting on Both Sides with a Fluid Flow // International Applied Mechanics. 2014. 50 (3). P. 303-309.
7. Amabili M. Vibrations of Circular Plates Resting on a Sloshing Liquid: Solution of the Fully Coupled Problem // Journal of Sound and Vibration. 2001. Vol. 245. No 2. P. 261-283.

8. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M., Hydroelastic Vibration of Circular Plates Immersed in a Liquid-filled Container with Free Surface // *Journal of Sound and Vibration*. 2013. Vol. 332. No 12. P. 3064-3085.
9. Indeitsev D.A., Polipanov I.S., Sokolov S.K. Calculation of Cavitation Life-time of Ship Engine Liner // *Problemy Mashinostraniya i Nadezhnos'ti Mashin*. 1994. No.4. P. 59-64.
10. Önsay T. Effects of Layer Thickness on the Vibration Response of a Plate-fluid Layer System // *Journal of Sound and Vibration*. 1993. Vol. 163. No 2. P. 231-259.
11. Popova A.A. Mathematical Modeling of Dynamic Processes in Vibration Support with Elastic Parts of Construction // *Bulletin of Saratov State Technical University*. 2007. Vol. 1. No. 4. P. 25-31.
12. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Dynamics of Interaction of Elastic Elements of a Vibrating Machine with the Compressed Liquid Layer Lying between Them // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2010. Vol. 39. No 4. P. 322-331.
13. Popova A.A. Mathematical Modeling of the Interaction of a Viscous Liquid with Thin-walled Ribbed Elements of Hydrodynamic Dampers and Pipelines. The dissertation on competition of a scientific degree of candidate of technical Sciences, Saratov state technical University. Saratov, 2008.
14. Ageev, R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Viscous Liquid Movement in a Flat Channel, Formed by a Vibrating Stamp and Simply Supported Plate // *Journal "Trudy MAI" Moscow Aviation institute (National Research University)*. 2014. No 78.
15. Ageev R.V., Kuznetsova E.L., Kulikov N.I., Mogilevich L.I., Popov V.S. Mathematical Model of Movement of a Pulsing Layer of Viscous Liquid in the Channel with an Elastic Wall // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. No 3. P. 17-35.
16. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. Vibrations of the Walls of a Slot Channel with a Viscous Fluid Formed by Three-layer and Solid Disks // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014. Vol. 43. No 1. P. 1-8.
17. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N., Kuznetsova E.L. Mathematical Model of Three-layer Plate Interaction with Viscous Incompressible Liquid Layer under Foundation Vibration // *Applied Mathematical Sciences*. 2015. Vol. 9. No 112. P. 5551-5559.
18. Mogilevich L.I., Popov V.S. Investigation of the Interaction between a Viscous Incompressible Fluid Layer and Walls of a Channel Formed by Coaxial Vibrating Discs // *Fluid Dynamics*. 2011. Vol. 46. No 3, P. 375-388.
19. Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N. Mathematical Modeling of Elastically Fixed Wall Longitudinal Oscillations of Wedge-shaped Channel under Foundation Vibration // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2016. Vol. 12. No 4. P. 9-17.
20. Popov V.S., Popova A.A., Sokolova D.L. Mathematical Modeling of Longitudinal Oscillations Tapered Narrow Channel wall under Pulsating Pressure of Highly Viscous Liquid // *Applied Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 10. No 53. P. 2627-2635.
21. Akcabay D.T., Young Y.L. Hydroelastic Response and Energy Harvesting Potential of Flexible Piezoelectric Beams in Viscous Flow // *Physics of Fluids*. 2012. Vol.24. No 5.
22. Faria Cassio T., Inman Daniel J. Modeling Energy Transport in a Cantilevered Euler-Bernoulli Beam Actively Vibrating in Newtonian Fluid // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2014. Vol. 45. No 2. P. 317-329.
23. Mogilevich L.I., Popov V.S. Dynamics of Interaction of an Elastic Cylinder with a Layer of Viscous Incompressible Fluid // *Mechanics of Solids*. 2004. Vol. 39 No 5. P. 146-155.