

Дьяков Станислав Федорович
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Аспирант
Dyakov Stanislav Fedorovitch
Saint-Petersburg state polytechnic university
Post-graduate student
E-Mail: stass.f.dyakov@gmail.com

Лалин Владимир Владимирович
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Доктор технических наук, профессор
Lalin Vladimir Vladimirovitch
Saint-Petersburg state polytechnic university
Professor
E-Mail: lalin@cef.spbstu.ru

05.23.17 – строительная механика

Построение и анализ конечного элемента тонкостенного стержня с учетом деформаций сдвига для решения задач динамики

The construction and analysis of the thin-walled bar finite element with allowing for shearing for the dynamic problems

Аннотация: В настоящей работе исследованы вопросы применения МКЭ для решения задач динамики тонкостенных стержней. Рассмотрено построение матрицы масс пространственного тонкостенного стержня в рамках полусдвиговой теории В.И. Сливкера. На примере задачи о собственных колебаниях тонкостенных стержней, имеющей точное решение, проводится тестирование построенной матрицы масс.

Abstract: The article cover problems connected with finite-element modeling for the dynamic problems of the thin-walled bars. The mass matrix of the 3D thin-walled bar with allowing for shearing is constructed. The problem of finding eigen frequencies is used to test the constructed matrix.

Ключевые слова: Тонкостенный стержень; матрица масс; полусдвиговая теория; МКЭ; собственная частота.

Keywords: Thin-walled bar; mass matrix; semi-shear theory; FEM; eigen frequency.

В теории тонкостенных стержней открытого профиля Власова В. З. [1] в качестве основополагающего постулата выступает тезис об отсутствии сдвигов в срединной поверхности тонкостенного стержня. Сливкер В. И. в своей монографии [2] предлагает теорию, которая позволяет частично учесть деформацию сдвига. Главная его мысль заключается в том, что он предлагает представить касательные напряжения как сумму двух слагаемых: *касательных напряжений изгиба*, порожденных поперечными силами Q_x и Q_y и *касательных напряжений кручения*, вызываемых моментом стесненного кручения M_ω . Далее предлагается пренебречь касательными напряжениями изгиба, отнеся их в разряд второстепенных, в тоже время сохранив касательные напряжения кручения. Теория с таким

разделением получила название *полусдвиговой теории тонкостенных стержней*. Главным достоинством данной теории является то, что она применима как для стержней открытого профиля, так и для стержней замкнутого профиля.

Вопросы статики тонкостенных стержней в рамках полусдвиговой теории рассматривалось в ряде работ [3,4]. Теоретический анализ дисперсионных свойств крутильных волн в тонкостенных стержнях был произведен в работе [5]. В настоящее время большинство задач строительной механики решается методом конечных элементов (МКЭ) [6,7], поэтому в настоящей работе исследуются вопросы динамики тонкостенных стержней в рамках полусдвиговой теории с помощью МКЭ.

При решении задач динамики методом конечных элементов реальная стержневая система с бесконечным числом степеней свободы заменяется системой с конечным числом степеней свободы. Существует два варианта такой замены. Первый, это когда распределенная масса конструкции сосредотачивается в определенных узлах. В этом случае матрица масс всей системы получается диагональной и носит название, соответственно, *диагональная матрица масс*. Результат будет более точным, если использовать второй вариант. Он заключается в том, что для построения матрицы масс используются те же аппроксимирующие функции, что и при построении матрицы жесткости. Такая матрица называется *согласованная матрица масс*.

Вывод выражения кинетической энергии тонкостенного стержня для полусдвиговой теории

Полное выражение для потенциальной энергии деформаций согласно [2] имеет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA U_x'^2 + EI_y U_y''^2 + EI_z U_z''^2 + EI_\omega \beta'^2 + GI_x (\theta' - \beta)^2 \right] dx \quad (1)$$

где x – координата вдоль продольной оси стержня; L – длина стержня; U_x, U_y, U_z – компоненты вектора перемещений центра изгиба; $\beta(x)$ – функция меры деформации; $\theta(x)$ – угол закручивания; A – площадь поперечного сечения; E – модуль Юнга; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, ν – коэффициент Пуассона; I_y и I_z – моменты инерции относительно осей y и z ; I_ω – секториальный момент инерции; I_x – крутильный момент инерции; I_g – деформационный момент инерции.

В классической теории тонкостенных стержней Власова $\beta(x) = \theta'(x)$; в теории Сливкера $\beta(x)$ и $\theta(x)$ являются независимыми функциями.

Кинетическая энергия имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \underline{\dot{U}}^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho \underline{\dot{U}}^2 dA dx \quad (2)$$

где ρ – объемная плотность, \underline{U} – вектор перемещений, V – объем стержня.

В формулах (1) – (2) и далее, точкой обозначается производная по времени, штрихом – по координате.

Согласно работе [2], с учетом возникающей в стержне депланации, выражение для перемещения точек стержня будет иметь вид:

$$\underline{U}(x, s, t) = \underline{U}_0 + \underline{\theta} \times \underline{r} + \beta \omega \underline{e} \quad (3)$$

где $\underline{U}_0(x, t)$ – вектор перемещений центра изгиба; $\underline{\theta}(x, t)$ – вектор углов поворота; $\underline{r}(s)$ – радиус вектор, проведенный из центра изгиба в текущую точку и перпендикулярный оси стержня; $\beta(x, t)$ – мера депланации; $\omega(s)$ – секториальная площадь; \underline{e} – орт оси x .

Продифференцируем выражение (3) по времени, а затем возведем в квадрат:

$$\underline{U} = \dot{\underline{U}}_0^2 + (\dot{\underline{\theta}} \times \underline{r})^2 + (\dot{\beta} \omega \underline{e})^2 + 2\dot{\underline{U}}_0 \cdot (\dot{\underline{\theta}} \times \underline{r}) + 2\dot{\underline{U}}_0 \cdot \dot{\beta} \omega \underline{e} + 2(\dot{\underline{\theta}} \times \underline{r}) \cdot \dot{\beta} \omega \underline{e} \quad (4)$$

Подставим полученное выражение в (2) и проинтегрируем по площади поперечного сечения. При этом будем считать, что стержень выполнен из однородного материала:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho^* \dot{U}_{ox}^2 + \rho^* \dot{U}_{oy}^2 + \rho^* \dot{U}_{oz}^2 + \rho^* \dot{\theta}^2 (z_p^2 + y_p^2) + \right. \\ \left. + \rho \dot{\theta}^2 I_r + \rho \dot{\beta}^2 I_\omega + 2\rho^* z_p \dot{U}_{oy} \dot{\theta} - 2\rho^* y_p \dot{U}_{oz} \dot{\theta} \right] dx \quad (5)$$

где ρ^* – линейная плотность; $I_r = I_y + I_z$ – полярный момент инерции.

При получении выражения (5) было учтено, что оси y и z – главные центральные оси сечения, в качестве полюса был выбран главный полюс, а в качестве начальной точки – главная начальная точка сечения [2].

Кроме того, поскольку нас интересует кинетическая энергия движения стержня в рамках полусдвиговой теории, то, по определению, мы пренебрегли касательными напряжениями, вызываемыми поперечными силами Q_y и Q_z .

Получение матрицы масс конечного элемента

Так как в полусдвиговой теории функции $\beta(x)$ и $\theta(x)$ независимы, то в отличие от обычной теории стержней, каждый узел конечного элемента будет обладать, как минимум семью степенями свободы (три перемещения, три угла поворота и депланация), следовательно, минимальный порядок матриц жесткости и масс будет равен 14. Матрица жесткости 14x14 построена в работе [4]. Опишем процесс построения соответствующей ей матрицы масс.

Будем представлять матрицу масс как сумму четырех матриц:

$$M_{кг} = M^b + M^t + M^{s1} + M^{s2} \quad (6)$$

где M^b – матрица КЭ, соответствующая растяжению-сжатию-изгибу; M^t – матрица КЭ, соответствующая кручению; M^{s1} , M^{s2} – добавочные матрицы. Если сечение тонкостенного стержня таково, что его центр масс и центр изгиба совпадают, то $M^{s1} = M^{s2} = 0$.

Значение матрицы M^b общеизвестно [8] и приводится здесь для справочных целей (сверху над матрицей подписаны номера степеней свободы в общей матрице масс; т.к. все

матрицы, используемые в данной работе симметричны, то во всех формулах приводится только верхняя треугольная часть матрицы):

$$M^b = l\rho^* \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 & 12 & 13 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{13}{35} & 0 & 0 & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & -\frac{13l}{420} \\ & & \frac{13}{35} & -\frac{11l}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13l}{420} & 0 \\ & & & \frac{l^2}{105} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13l}{420} & \frac{l^2}{140} & 0 \\ & & & & \frac{l^2}{105} & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & 0 & -\frac{l^2}{140} \\ & & & & & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{13}{35} & 0 & 0 & -\frac{11l}{210} \\ & & & & & & & \frac{13}{35} & -\frac{11l}{210} & 0 \\ & & & & & & & & \frac{l^2}{105} & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{l^2}{105} \end{pmatrix} \quad (7)$$

где l – длина конечного элемента; не показанные нулевые строки и столбцы с номерами 4,7,11,14, которые соответствуют крутильной (4,11) и депланационной (7,14) степеням свободы.

Как было показано в [4] функцию меры депланации $\beta(x)$ удобно аппроксимировать линейным полиномом, в то время как для функции $\theta(x)$ лучше использовать квадратичный многочлен:

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= a_1(t)H_1 + a_3(t)H_2 + a_5(t)H_3 & \beta(x,t) &= a_2(t)N_1 + a_4(t)N_2 \\ H_1 &= 1 - \frac{3x}{l} + \frac{2x^2}{l^2} & H_2 &= -\frac{x}{l} + \frac{2x^2}{l^2} & H_3 &= \frac{4x}{l} - \frac{4x^2}{l^2} \\ N_1 &= -\frac{x}{l} + 1 & N_2 &= \frac{x}{l} \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (8) в (5) и выполняя интегрирование, получаем следующее выражение для матрицы масс, где строки и столбцы упорядочены в соответствии с номерами a_i :

$$M = \frac{l\rho}{30} \cdot \begin{pmatrix} 4I_r & 0 & -I_r & 0 & 2I_r \\ & 10I_\omega & 0 & 5I_\omega & 0 \\ & & 4I_r & 0 & 2I_r \\ & & & 10I_\omega & 0 \\ & & & & 16I_r \end{pmatrix} \quad (9)$$

Соответствующая ей матрица жесткости [4]:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \frac{G(I_x+I_g)}{l} & \frac{5}{6} GI_g & \frac{1}{3} \frac{G(I_x+I_g)}{l} & \frac{1}{6} GI_g & -\frac{8}{3} \frac{G(I_x+I_g)}{l} \\ & \frac{1}{3} \frac{l^2 GI_g + 3EI_\omega}{l} & -\frac{1}{6} GI_g & \frac{1}{6} \frac{l^2 GI_g - 6EI_\omega}{l} & -\frac{2}{3} GI_g \\ & & \frac{7}{3} \frac{G(I_x+I_g)}{l} & -\frac{5}{6} GI_g & -\frac{8}{3} \frac{G(I_x+I_g)}{l} \\ & & & \frac{1}{3} \frac{l^2 GI_g + 3EI_\omega}{l} & \frac{2}{3} GI_g \\ & & & & \frac{16}{3} \frac{G(I_x+I_g)}{l} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Полученная матрица масс имеет размерность 5×5 , в то время как матрица жесткости, в результате проведенных над ней операций в [4] имеет размерность 4×4 . Так как для решения проблемы собственных значений порядки матрицы жесткости и матрицы масс должны быть одинаковыми, путем преобразований придадим матрице масс размерность 4×4 . Поскольку в инженерной практике представляют интерес начальные частоты спектра, то вместо точного выражения для матрицы масс будем использовать приближенное, полученное отбрасыванием слагаемых со степенями ϖ^4 и выше.

Матричное уравнение метода конечных элементов в перемещениях для задачи свободных колебаний имеет вид [9]:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \varpi^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}, \text{ где} \quad (11)$$

\mathbf{K} – матрица жесткости (10); \mathbf{U} – столбец неизвестных узловых перемещений; ϖ^2 – квадрат собственной частоты; \mathbf{M} – матрица масс (9).

В любой задаче для стержневых систем, независимо от общего количества конечных элементов, нагрузка в середине конечного элемента будет определяться только внешней нагрузкой на данный конечный элемент. Поэтому в статических задачах можно уменьшить количество степеней свободы элемента на единицу, исключив из системы уравнений обобщенное перемещение a_5 , соответствующее углу поворота в середине конечного элемента. В динамических задачах приближенно исключим a_5 следующим образом.

Выпишем последнее уравнение из системы (11):

$$K_{51}a_1 + K_{52}a_2 + K_{53}a_3 + K_{54}a_4 + K_{55}a_5 - \varpi^2 (M_{51}a_1 + M_{52}a_2 + M_{53}a_3 + M_{54}a_4 + M_{55}a_5) = 0 \quad (12)$$

Выразим из него нужное нам перемещение a_5 :

$$a_5 = \frac{-K_{51}a_1 - K_{52}a_2 - K_{53}a_3 - K_{54}a_4}{K_{55} - \varpi^2 M_{55}} + \frac{\varpi^2 (M_{51}a_1 + M_{52}a_2 + M_{53}a_3 + M_{54}a_4)}{K_{55} - \varpi^2 M_{55}} \quad (13)$$

Для того чтобы собственной частоты ϖ не было в знаменателе, разложим знаменатель в ряд Маклорена:

$$\frac{1}{K_{55} - \varpi^2 M_{55}} \approx \frac{1}{K_{55}} + \frac{M_{55}}{K_{55}^2} \varpi^2 + O(\varpi^4) \quad (14)$$

Отбросив члены порядка малости ϖ^4 , получим:

$$a_5 = \left[\frac{1}{K_{55}} + \frac{M_{55}}{K_{55}^2} \varpi^2 \right] (-K_{51}a_1 - K_{52}a_2 - K_{53}a_3 - K_{54}a_4 + \\ + \varpi^2 (M_{51}a_1 + M_{52}a_2 + M_{53}a_3 + M_{54}a_4)) \quad (15)$$

После раскрытия скобок и отбрасывания членов порядка малости ϖ^4 выражение для a_5 будет иметь вид:

$$a_5 = \left(\frac{M_{51}}{K_{55}} a_1 + \frac{M_{52}}{K_{55}} a_2 + \frac{M_{53}}{K_{55}} a_3 + \frac{M_{54}}{K_{55}} a_4 - \right. \\ \left. - \frac{M_{55}K_{51}}{K_{55}^2} a_1 - \frac{M_{55}K_{52}}{K_{55}^2} a_2 - \frac{M_{55}K_{53}}{K_{55}^2} a_3 - \frac{M_{55}K_{54}}{K_{55}^2} a_4 \right) \varpi^2 - \\ - \frac{K_{51}}{K_{55}} a_1 - \frac{K_{52}}{K_{55}} a_2 - \frac{K_{53}}{K_{55}} a_3 - \frac{K_{54}}{K_{55}} a_4 \quad (16)$$

Далее следует найденное перемещение a_5 подставить в первые четыре уравнения системы, и тогда уравнение (11) примет вид:

$$(\varpi^2 \mathbf{K}^* + \mathbf{K}_{кв}) \mathbf{U} = \varpi^2 \mathbf{M}^* \cdot \mathbf{U}, \text{ где} \quad (17)$$

$\mathbf{K}_{кв}$ – матрица жесткости, полностью совпавшая с матрицей [4]; \mathbf{K}^* – матрица, содержащая в себе добавочные элементы для матрицы масс; \mathbf{M}^* – предварительная матрица масс.

После перегруппировки из (17) получим:

$$\mathbf{K}_{кв} \cdot \mathbf{U} = \varpi^2 \underbrace{(\mathbf{M}^* - \mathbf{K}^*)}_{\mathbf{M}_{кв}} \mathbf{U} \quad (18)$$

где $\mathbf{M}_{кв}$ – окончательная матрица масс при квадратичной аппроксимации, которая содержит все ненулевые элементы матриц \mathbf{M}^t , \mathbf{M}^{s1} , \mathbf{M}^{s2} , приведенные в формулах (19) – (21)

$$M^t = \frac{l\rho}{120\psi^2} \begin{vmatrix} 4 & 7 & 11 & 14 \\ 40I_r\psi^2 & 5I_rl\psi & 20I_r\psi^2 & -5I_rl\psi \\ & I_rl^2 + 40I_\omega\psi^2 & 5I_rl\psi & -I_rl^2 + 20I_\omega\psi^2 \\ & & 40I_r\psi^2 & -5I_rl\psi \\ & & & I_rl^2 + 40I_\omega\psi^2 \end{vmatrix} \quad (19)$$

$$M^{s1} = \frac{l\rho^*}{120\psi^2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 & 10 & 11 & 12 & 14 \\ 0 & -42\psi^2 y_p^2 & 0 & -5y_pl\psi & 0 & -18\psi^2 y_p & 0 & 5y_pl\psi \\ & 40\psi^2 y_p^2 & 6y_pl\psi^2 & 5y_p^2 l\psi & -18\psi^2 y_p & 20\psi^2 y_p^2 & 4y_pl\psi^2 & -5y_p^2 l\psi \\ & & 0 & y_p l^2 \psi & 0 & 4y_pl\psi^2 & 0 & -y_p l^2 \psi \\ & & & y_p^2 l^2 & -5y_pl\psi & 5y_p^2 l\psi & y_p l^2 \psi & -y_p^2 l^2 \\ & & & & 0 & -42\psi^2 y_p & 0 & 5y_pl\psi \\ & & & & & 40\psi^2 y_p^2 & 6y_pl\psi^2 & -5y_p^2 l\psi \\ & & & & & & 0 & -y_p l^2 \psi \\ & & & & & & & y_p^2 l^2 \end{vmatrix} \quad (20)$$

$$M^{s2} = \frac{l\rho^2}{120\psi^2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 & 9 & 11 & 13 & 14 \\ 0 & 42\psi^2 z_p^2 & 0 & 5z_pl\psi & 0 & 18\psi^2 z_p & 0 & 5z_pl\psi \\ & 40\psi^2 z_p^2 & 6z_pl\psi^2 & 5z_p^2 l\psi & -18\psi^2 z_p & 20\psi^2 z_p^2 & -4z_pl\psi^2 & -5z_p^2 l\psi \\ & & 0 & z_p l^2 \psi & 0 & 4z_pl\psi^2 & 0 & -z_p l^2 \psi \\ & & & z_p^2 l^2 & 5z_pl\psi & 5z_p^2 l\psi & -z_p l^2 \psi & -z_p^2 l^2 \\ & & & & 0 & 42\psi^2 z_p & 0 & 5z_pl\psi \\ & & & & & 40\psi^2 z_p^2 & 6z_pl\psi^2 & -5z_p^2 l\psi \\ & & & & & & 0 & -z_p l^2 \psi \\ & & & & & & & z_p^2 l^2 \end{vmatrix} \quad (21)$$

где ψ – безразмерный геометрический параметр [2].

Исследование матрицы масс

Для тестирования полученной матрицы масс решим задачу о нахождении спектра собственных частот крутильно-депланационных колебаний для однопролетной балки со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \theta(0) &= 0, & \theta(L) &= 0, \\ \beta'(0) &= 0, & \beta'(L) &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Будем сравнивать между собой частоты собственных колебаний, полученные следующим образом:

1. Аналитическое решение [10] без учета деформаций сдвига (по теории Власова):

$$\varpi = \eta^2 \sqrt{\frac{EI_\omega}{\rho I_r} \left[1 + \frac{GI_x}{EI_\omega} \left(\frac{1}{\eta} \right)^2 \right]} \quad \eta = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (23)$$

2. Аналитическое решение с учетом деформации сдвига:

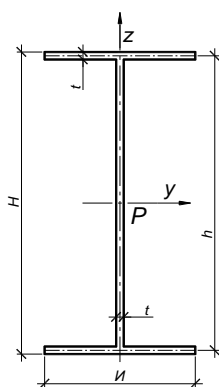
$$\varpi = \sqrt{\frac{\zeta_2 \pm \sqrt{\zeta_2^2 - 4\zeta_1\zeta_3}}{2\zeta_1}} \quad \eta = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (24)$$

где, $\zeta_1 = \frac{\rho^2 I_r}{\psi G I_g E}$ $\zeta_2 = \frac{\rho \eta^2}{E} + \frac{\rho I_r \eta^2}{\psi G I_g} + \frac{\rho I_r}{\psi E I_\omega}$ $\zeta_3 = \frac{G I_x \eta^2}{\psi E I_\omega} + \eta^4$

Знак «±» под корнем в (24) свидетельствует о том, что присутствуют две дисперсионные ветви. При этом знак минус соответствует акустической, а знак плюс — оптической ветви дисперсии [5].

3. Расчет с учетом деформаций сдвига с использованием линейной и квадратичной аппроксимации – матрица $\mathbf{M}_{кв}$.

Рассмотрим стержень с поперечным сечением в виде двутавра, обладающего следующими характеристиками:



$H = 0,40\text{м}; \quad E = 206,01\text{ГПа};$
 $t = 0,022\text{м}; \quad \nu = 0,3; \quad \rho = 7800\text{кг/м}^3;$
 $B = 0,2\text{м}; \quad G = 79,3\text{ГПа}$

Геометрические характеристики стержня:

$$I_x = \frac{t^3(2B+h)}{3} = 276,0\text{см}^4; \quad I_\omega = \frac{B^3 \cdot h^2 \cdot t}{24} = 1,048 \cdot 10^6\text{см}^6;$$

$$I_g = \frac{480 \cdot I_\omega^2}{t \cdot h^2 \cdot B^5} = 52391\text{см}^4; \quad I_r = I_z + I_y = 42706\text{см}^4.$$

Результаты расчетов для разного количества конечных элементов приведены в таблице.

Таблица

Крутильно-депланационные частоты собственных колебаний

	N	Формула (24)	2 эл	4 эл	8 эл	16 эл	32 эл	Формула (23)
Акустическая ветвь	1	43.03487	43.512	43.08	43.048	43.046	43.045	43.05414
	2	121.38369	140.59	122.13	121.45	121.4	121.39	121.53296
	3	245.88412	314.85	251.47	246.35	245.93	245.89	246.61039
	4	418.13754	545.13	471.3	420.34	418.36	418.17	420.44151
	5	637.90203		729.9	645.42	638.67	638.02	643.52372
	6	904.39704		1140.6	924.8	906.55	904.72	916.00899
	7	1216.58333		1694.3	1262.2	1221.8	1217.4	1237.95477
	N	Формула (24)	2 эл	4 эл	8 эл	16 эл	32 эл	Формула (23)
Оптическая ветвь	1	71031.21863						
	2	71110.97216						
	3	71243.52611						
	4	71428.33581						
	5	71664.65484						
	6	71951.55012						
	7	72287.92015						

Из таблицы видно, что полученная матрица, будучи достаточно простой, обеспечивает хорошую сходимость. Кроме того следует отметить, что полученная матрица масс не позволяет получить частоты, отвечающие за оптическую ветвь дисперсии. Связано это с тем, что при получении матрицы масс использовалась приближенная методика, связанная с отбрасыванием слагаемых порядка ϖ^4 и более. Однако, поскольку при проведении практических расчетов реальный интерес представляют собой низшие частоты, это не может служить большим недостатком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. – М.: Физматгиз, 1959. – 568 с.
2. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. Учебное пособие. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2005. – 736 с.
3. Рыбаков В.А. Лалин В.В. Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем // Инженерно-строительный журнал. – 2012. - №1. – с.53-73
4. Дьяков С.Ф. Лалин В.В. Построение и анализ конечных элементов тонкостенного стержня открытого профиля с учетом деформаций сдвига при кручении // Вестник Пермского государственного технического университета.- 2011. - №2. – с.130-140
5. Дьяков С.Ф. Лалин В.В. Дисперсия крутильной волны, распространяющейся в тонкостенном стержне//Интернет-журнал «Науковедение». – 2013. – №5 [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/PDF/24tvn513.pdf>, свободный
6. Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е. Конечно-элементное моделирование процессов разрушения и оценка ресурса элементов автодорожного моста с учетом коррозионных повреждений // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – №7. – с.32-42.
7. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Киев: Изд-во «Сталь», 2002. 600 с.
8. Дьяков И.Ф. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем: учебное пособие /И.Ф.Дьяков, С.А.Чернов, А.Н.Черный. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – 133с.
9. Ильин, В. П. Численные методы решения задач строительной механики / В. П. Ильин, В. В. Карпов, А. М. Масленников. — М.: Изд-во АСВ; СПбГАСУ, 2005. — 425 с.
10. Карякин, Н. И. Основы расчета тонкостенных конструкций / Н. И. Карякин. — М.: Высшая Школа, 1960. — 239 с.