

Интернет-журнал «Науковедение» ISSN 2223-5167 <http://naukovedenie.ru/>

Том 8, №2 (2016) <http://naukovedenie.ru/index.php?p=vol8-2>

URL статьи: <http://naukovedenie.ru/PDF/96TVN216.pdf>

DOI: 10.15862/96TVN216 (<http://dx.doi.org/10.15862/96TVN216>)

Статья опубликована 15.04.2016.

**Ссылка для цитирования этой статьи:**

Кузнецова Д.А. Влияние продольной и сдвиговой жесткостей на устойчивость балок и колонн // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 8, №2 (2016) <http://naukovedenie.ru/PDF/96TVN216.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/96TVN216

**УДК 69.04**

**Кузнецова Дарья Александровна**

ФГАОУ ВО «Санкт – Петербургский политехнический университет Петра Великого», Россия, Санкт - Петербург<sup>1</sup>  
Аспирант

E-mail: [Dasha\\_kushova@mail.ru](mailto:Dasha_kushova@mail.ru)

РИНЦ: [http://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=644044](http://elibrary.ru/author_profile.asp?id=644044)

## **Влияние продольной и сдвиговой жесткостей на устойчивость балок и колонн**

**Аннотация.** В статье рассматривается геометрически нелинейная задача теории упругих стержней Коссера - Тимошенко в материальном (Лагранжевом) описании. Приведены постановки задач в виде системы дифференциальных уравнений и вариационные постановки в виде задачи о поиске точки стационарности функционала типа Лагранжа. Приведено выражение для второй вариации функционала Лагранжа, из которой получены дифференциальные уравнения задачи устойчивости. Уравнения устойчивости являются уравнениями Эйлера, вытекающими из условия равенства нулю первой вариации функционала устойчивости. Для основных типов граничных условий получено точное значение критической нагрузки с учетом деформаций изгиба, сдвига и растяжения-сжатия в задаче об устойчивости стержня, сжатого осевой силой. В статье исследована устойчивость упругих стержней, модель которых является упрощенной: теория стержней Тимошенко, в которой учитываются жесткости стержня на сдвиг и изгиб; теория стержней Бернулли – Эйлера, учитывающая только жесткость стержня на изгиб. Для этих моделей, как частных случаев общей теории, получены функционалы устойчивости, уравнения устойчивости и формулы для критической силы. Произведена оценка влияния жесткостей на растяжение – сжатие и сдвиг на значение критической силы.

**Ключевые слова:** большие перемещения и повороты; геометрическая нелинейность; вариационная постановка; функционал устойчивости; функционал Лагранжа; уравнения устойчивости; устойчивость сжатого стержня; критическая сила; жесткость стержня; теория стержней Тимошенко; теория стержней Бернулли – Эйлера; статический метод исследования устойчивости

---

<sup>1</sup> 195251, Россия, г. Санкт – Петербург, Политехническая ул., 29

## Введение

Стремление уменьшить материалоемкость конструкций приводит к использованию в современном строительстве более податливых элементов сооружений. При этом повышается возможность потери устойчивости этих элементов. Традиционные методы оценки устойчивости стержневых элементов конструкций, основанные на классической формуле Эйлера, дают для податливых элементов только приближенные значения критических сил. Это связано с тем, что в формуле Эйлера учитывается только изгибная жесткость стержней. В настоящей работе получены точные решения задач устойчивости стержневых элементов конструкций, учитывающие кроме жесткости на изгиб, также жесткости на сдвиг и растяжение – сжатие.

Для решения поставленной задачи используется аппарат классического вариационного исчисления. Традиционный подход в вариационной постановке задачи нелинейного деформирования стержней заключается в использовании вариационного уравнения в виде принципа возможных перемещений [1-18]. В настоящей работе показывается, что, с использованием энергетически сопряженных векторов усилий и деформаций [19], вариационную задачу можно сформулировать в виде задачи поиска точки стационарности функционала типа Лагранжа. При этом появляется возможность впервые получить точные уравнения устойчивости как уравнения Эйлера для второй вариации функционала Лагранжа. Из полученных функционала устойчивости и уравнений устойчивости можно в качестве следствий получить приближенный функционал и уравнения устойчивости, в которых рассматриваются только жесткости на изгиб (балка Бернулли-Эйлера) или только жесткости на изгиб и сдвиг (балка Тимошенко).

### Вариационная формулировка плоская задача устойчивости упругих стержней

Постановка геометрически нелинейной задачи для упругого стержня состоит из трех групп уравнений: уравнений равновесия, физических уравнений и геометрических уравнений.

Уравнения равновесия для плоской задачи имеют вид:

$$\begin{cases} (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' + q_x = 0; \\ (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' + q_y = 0; \\ M' + x'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + y'(Q \sin \varphi - N \cos \varphi) + m = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где:  $N$  – продольная сила;  $Q$  – поперечная сила;  $M$  – изгибающий момент;  $q_x, q_y$  – проекции распределенных сил на координатные оси  $X, Y$ , соответственно;  $m$  – распределенная моментная нагрузка. В плоской задаче геометрически нелинейного деформирования упругого стержня функции  $x(s), y(s)$  и  $\varphi(s)$  представляют собой три степени свободы, где  $x(s), y(s)$  – координаты точки стержня в деформированном положении,  $\varphi(s)$  – угол поворота вокруг оси  $Z$ , (...)’ – обозначает частную производную по координате  $s$ . В отсчетной конфигурации стержень занимает отрезок  $0 \leq s \leq L$ , где  $L$  – длина недеформированного стержня.

Геометрические уравнения для плоской задачи геометрически нелинейного деформирования стержня имеют вид:

$$\begin{cases} \varepsilon = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1; \\ \gamma = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi; \\ \psi = \varphi', \end{cases} \quad (2)$$

где  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$  – компоненты деформации растяжения – сжатия, сдвига и изгиба, соответственно, выраженные через функции  $x(s)$ ,  $y(s)$  и  $\varphi(s)$ .

Физические уравнения для физически линейного материала можно записать в следующем виде:

$$N = k_1\varepsilon; \quad Q = k_2\gamma; \quad M = k_3\psi, \quad (3)$$

где:  $k_1 = EA$  – жесткость на растяжение – сжатие;  $k_2 = GAk$  – жесткость на сдвиг;  $k_3 = EJ$  – жесткость на изгиб;  $E$  – модуль Юнга;  $A$  – площадь поперечного сечения;  $J$  – момент инерции сечения;  $G$  – модуль сдвига;  $k$  – коэффициент формы сечения.

Функционал Лагранжа  $\Pi$  может быть записан в виде:

$$\Pi(x, y, \varphi) = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} (k_1\varepsilon^2 + k_2\gamma^2 + k_3\psi^2 - q_x(x-s) - q_y y - m\varphi) \right] ds - F_{1вн}(x(L)-L) - F_{2вн}y(L) - M_{вн}\varphi(L), \quad (4)$$

где:  $F_{1вн}$  – «мертвая» нагрузка, параллельная оси  $X$ ;  $F_{2вн}$  – «мертвая» нагрузка, параллельная оси  $Y$ ;  $M_{вн}$  – внешний момент, приложенные на конце стержня при  $s=L$ .

В работах [20 – 23] доказано, что вариационная задача поиска точки стационарности функционала Лагранжа  $\Pi \rightarrow \text{СТАЦ}$  равносильна задаче (1) – (3).

Функционал устойчивости плоской задачи для физически линейных упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб, вытекающий из второй вариации исходного функционала Лагранжа, имеет следующий вид:

$$\Phi_{ст}(u, v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L [N_B\varepsilon_B + N\theta(2\gamma_B + \theta(\varepsilon+1)) + Q_B\gamma_B + Q(-2\varepsilon_B + \theta\gamma) + M_B\psi_B] ds, \quad (5)$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned} N_B &= k_1\varepsilon_B; & Q_B &= k_2\gamma_B; & M_B &= k_3\psi_B; \\ \varepsilon_B &= u' \cos \varphi - x'\theta \sin \varphi + v' \sin \varphi + y'\theta \cos \varphi; \\ \gamma_B &= -u' \sin \varphi - x'\theta \cos \varphi + v' \cos \varphi - y'\theta \sin \varphi; & \psi_B &= \theta'. \end{aligned} \quad (6)$$

Величины  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  обозначают характеристики напряженно – деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (1) – (3), а также граничным условиям. То есть, это величины того напряженно – деформированного состояния, устойчивость которого исследуется. Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации;  $u(s)$ ,  $v(s)$ ,  $\theta(s)$  – вариации координат  $x$ ,  $y$  и угла поворота  $\varphi$  соответственно.

Уравнения устойчивости являются уравнениями Эйлера вариационной задачи  $\Phi_{ст} \rightarrow \text{СТАЦ}$ . Уравнения, вытекающие из условия  $\delta\Phi_{ст} = 0$ , имеют следующий вид:

$$\begin{cases} (N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi)' - (\theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi))' = 0; \\ (N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi)' + (\theta(N \cos \varphi - Q \sin \varphi))' = 0; \\ M_B' + u'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + v'(Q \sin \varphi - N \cos \varphi) + x'(N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi + \\ + \theta(N \cos \varphi - Q \sin \varphi)) + y'(Q_B \sin \varphi - N_B \cos \varphi + \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi)) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) является системой уравнений относительно функций  $u$ ,  $v$  и  $\theta$ . Функции  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$ , а также  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  фиксированы и являются решениями задачи (1) – (3).

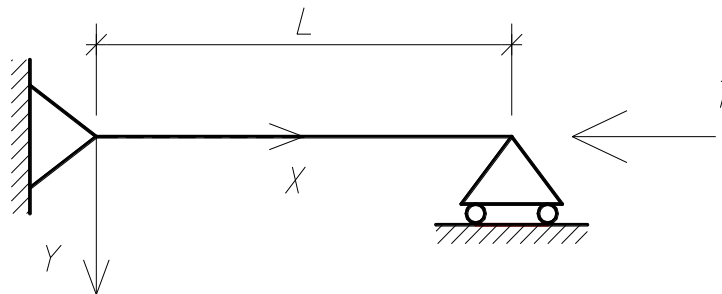
Уравнения (7) являются точными уравнениями устойчивости упругого физически линейного стержня для плоской задачи. При их выводе не делалось никаких упрощающих предположений о величинах перемещений и углов поворота, а также о характере напряженно-деформированного состояния стержня. Полученные функционал (5) и уравнения (7) записаны в общем виде и применимы для любого вида нагрузки и граничных условий.

В работах [20 – 23] уравнения устойчивости (7) были также получены вторым способом, как уравнения в вариациях уравнений равновесия (1).

### Примеры решения задач устойчивости равновесия

В качестве примера рассмотрим решение нескольких задач.

Рассмотрим классическую задачу Эйлера - шарнирно закрепленный стержень, сжимаемый осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 1. Исходная равновесная конфигурация - прямолинейная.



**Рисунок 1.** Расчетная схема стержня (составлено автором)

Граничные условия, соответствующие рассматриваемой задаче, могут быть записаны в виде:

$$\begin{array}{ll} s = 0: & s = L: \\ x(0) = 0; & (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)|_{s=L} + T = 0; \\ y(0) = 0; & y(L) = 0; \\ M(0) = 0; & M(L) = 0. \end{array} \quad (8)$$

Точное решение нелинейной задачи (1) – (3) и (8) описывается формулами:

$$y = 0; \quad \varphi = 0; \quad \varepsilon = \frac{N}{k_1} = -\frac{T}{k_1}; \quad \gamma = 0; \quad \psi = 0;$$

$$N = -T; \quad Q = 0; \quad M = 0. \tag{9}$$

$$x' = \varepsilon + 1 = \frac{N}{k_1} + 1 = 1 - \frac{T}{k_1}.$$

Подставив (9) в функционал устойчивости (5) и используя выражения (6), получим функционал устойчивости для рассматриваемой задачи:

$$\Phi_{ст}^*(u, v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ k_1 u'^2 + k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right)^2 + k_3 \theta'^2 + \theta^2 T \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) - 2T v' \theta \right] ds.$$

Компоненты функционала, содержащие  $u$ , описывают продольные деформации, не связанные с нагрузкой  $T$ , и могут быть опущены при исследовании устойчивости. Окончательно, функционал устойчивости примет вид:

$$\Phi(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right)^2 + k_3 \theta'^2 + T \theta \left( \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta - 2v' \right) \right] ds. \tag{10}$$

Уравнения устойчивости, являющиеся уравнениями Эйлера вариационной задачи  $\Phi \rightarrow \text{СТАЦ}$  и вытекающие из условия  $\delta\Phi = 0$ , имеют следующий вид:

$$\begin{cases} k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right)' - T\theta' = 0; \\ k_3 \theta'' + k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right) \left( 1 + T \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Общее решение системы (11), содержащее четыре произвольных постоянных  $C_1 - C_4$ , можно записать в виде:

$$\begin{cases} v(s) = -C_1 \frac{B}{\lambda} \cos \lambda s + C_2 \frac{B}{\lambda} \sin \lambda s + C_3 \left( 1 - \frac{k_2 B}{T} \right) s + C_4; \\ \theta(s) = C_1 \sin \lambda s + C_2 \cos \lambda s - C_3 \frac{k_2}{T}, \end{cases} \tag{12}$$

где использованы следующие обозначения

$$B = 1 + T \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right), \quad \lambda^2 = \frac{TB}{k_3}.$$

Граничные условия для задачи устойчивости шарнирно опертого стержня, полученные из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости, могут быть записаны в виде:

$$\begin{array}{ll}
 s = 0: & s = L: \\
 v(0) = 0; & v(L) = 0; \\
 M_B(0) = 0; & M_B(L) = 0.
 \end{array} \quad (13)$$

Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации. Подставив точное решение (9) в граничные условия (13) и используя выражения (6), граничные условия для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{array}{ll}
 s = 0: & s = L: \\
 v(0) = 0; & v(L) = 0; \\
 k_3\theta'(0) = 0; & k_3\theta'(L) = 0.
 \end{array} \quad (14)$$

Окончательно граничные условия (13) могут быть записаны в виде:

$$v(0) = v(L) = 0; \quad \theta'(0) = \theta'(L) = 0. \quad (15)$$

Подставляя общее решение системы (12) в граничные условия (15), получаем систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases}
 -C_1 \frac{B}{\lambda} + C_4 = 0; \\
 -C_1 \frac{B}{\lambda} \cos \lambda L + C_2 \frac{B}{\lambda} \sin \lambda L + C_3 \left(1 - \frac{k_2 B}{T}\right) L + C_4 = 0; \\
 C_1 \lambda = 0; \\
 C_1 \lambda \cos \lambda L - C_2 \lambda \sin \lambda L = 0.
 \end{cases} \quad (16)$$

Отсюда, постоянные интегрирования  $C_1, C_3, C_4$  равны 0, и мы получаем уравнение  $C_2 \sin \lambda L = 0$ .

Таким образом, нетривиальное решение уравнений (16) существует при  $\lambda L = \pi n$ , где  $n=1,2,3\dots$

Критическое (наименьшее) значение силы  $T$  достигается при  $n=1$  и находится из квадратного уравнения [20 - 23]:

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 = 0, \quad (17)$$

где  $T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{L^2}$  – сила Эйлера для шарнирно опертого стержня [24].

Несложно показать, что единственным положительным значением критической силы, вытекающим из уравнения (17) является:

$$T_{кр} = \frac{\sqrt{1 + 4T_3 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}, \quad (18)$$

Решение (18) представляет собой точное решение задачи устойчивости шарнирно опертого стержня с учетом жесткостей на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб.

Определим форму потери устойчивости из системы (12), подставляя найденные константы  $C_1, C_3, C_4$  и полученное значение  $\lambda L = \pi n$ .

$$\begin{cases} v(s) = C_2 \frac{B}{\lambda} \sin \frac{\pi n}{L} s; \\ \theta(s) = C_2 \cos \frac{\pi n}{L} s, \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{где } \lambda = \sqrt{\frac{T_{кр} B}{k_3}}.$$

В рассматриваемой задаче для определения критической силы соответствующая форма потери устойчивости получена для случая  $n=1$  ( $\lambda L = \pi$ ) и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} v(s) = C_2 \frac{B}{\lambda} \sin \frac{\pi}{L} s; \\ \theta(s) = C_2 \cos \frac{\pi}{L} s. \end{cases}$$

Аналогичным образом были получены точные решения задач устойчивости для консольного стержня; стержня с заделкой и скользящей заделкой, допускающей перемещения вдоль оси стержня; стержня с заделкой и скользящей заделкой, допускающей поперечные перемещения; шарнирно опертого стержня со скользящей заделкой, допускающей поперечные перемещения. Для каждого примера были получены квадратное уравнение и значение критической силы, полностью совпадающие по виду с уравнением (17) и решением

(18), и отличающиеся только значением силы Эйлера  $T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{(\mu L)^2}$  ( $\mu$  – коэффициент,

зависящий от условий закрепления стержня), изменяющимся в зависимости от типа граничных условий. Таким образом, можно сделать вывод, что формула (18) для определения значения критической силы является универсальным решением задачи устойчивости стержня, учитывающим жесткости на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб.

Полученная формула (18) является справедливой в пределах упругих деформаций, когда напряжения не превосходят предела пропорциональности  $\sigma_{пц}$ , то есть когда гибкость

стержня  $\lambda_{ст} = \frac{\mu L}{i}$  больше или равна предельной гибкости  $\lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$ , где  $E$  – модуль

Юнга,  $i$  – радиус инерции сечения стержня.

## Устойчивость упругих стержней по упрощенным моделям с точки зрения общей теории

### 1. Стержень Тимошенко

В качестве примера приведем классическую задачу Эйлера - шарнирно опертый стержень, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 1. При анализе устойчивости стержня Тимошенко принимается допущение, заключающееся в том, что изменение геометрических размеров стержня при докритических деформациях считается

пренебрежимо малым; в частности, в процессе нагружения длина стержня является неизменной. Таким образом, стержень напряжен, но не деформирован. То есть:

$$N = k_1 \varepsilon = -T; \quad \varepsilon = 0; \quad \Rightarrow \quad k_1 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k_1} = 0.$$

Функционал устойчивости для стержня Тимошенко вытекает из функционала устойчивости (10), в котором принимаем  $\frac{1}{k_1} = 0$ :

$$\Phi_{ст} (v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ k_3 \theta'^2 + k_2 (v' - \theta)^2 + T \theta (\theta - 2v') \right] ds. \quad (20)$$

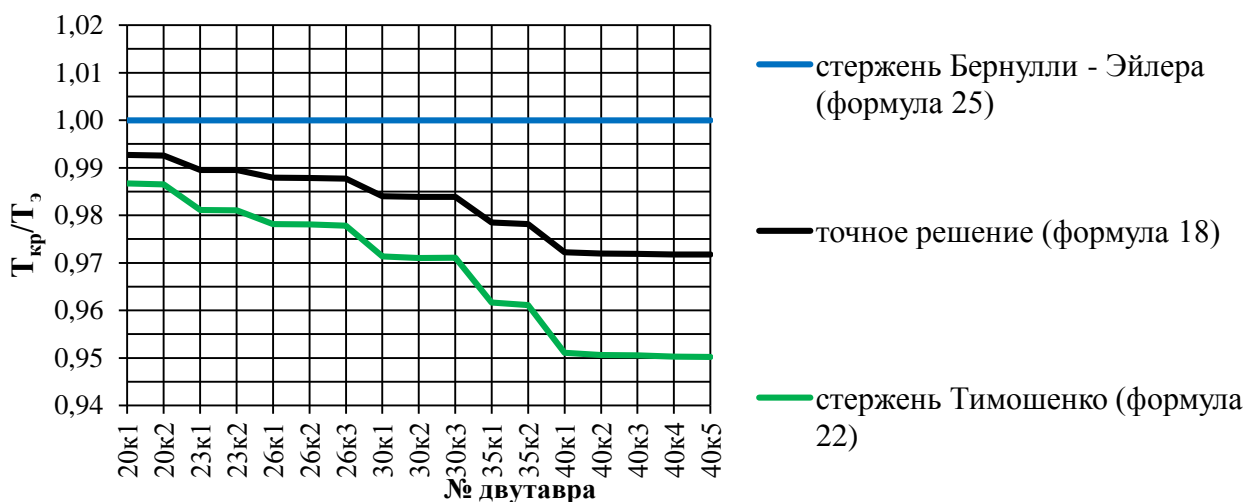
Уравнения устойчивости в задаче устойчивости равновесия стержня Тимошенко, вытекающие из функционала устойчивости (20) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} k_2 (v' - \theta)' - T \theta' = 0; \\ k_3 \theta'' + k_2 (v' - \theta) \left( 1 + \frac{T}{k_2} \right) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Решение системы уравнений (21), представляющее собой точное решение задачи устойчивости для стержня Тимошенко с учетом жесткостей на сдвиг и изгиб, имеет вид:

$$T_{кр} = \frac{k_2}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4T_3}{k_2}} - 1 \right). \quad (22)$$

Для оценки влияния жесткости на растяжение – сжатие первоначально прямолинейного стержня, сжимаемого «мертвой» осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 1, проведем сравнение значений критической силы, вычисленных по точной формуле (18), учитывающей жесткости на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб, со значениями, вычисленными по формуле (22) для стержня Тимошенко, учитывающей только жесткости стержня на сдвиг и изгиб. В качестве примера, как показано на рисунке 2, приведем графики для стоек, выполненных из колонных двутавров.



**Рисунок 2.** Оценка влияния жесткостей стержня на растяжение – сжатие и сдвиг на значение критической силы (разработано автором)



Проанализировав полученные результаты, можно прийти к выводу, что учет жесткости на растяжение – сжатие приводит к увеличению критической силы. Таким образом, принимая во внимание жесткость на растяжение – сжатие, мы учитываем внутренние «резервы» стержня под действием «мертвой» осевой нагрузки.

## 2. Стержень Бернулли - Эйлера

Рассмотрим устойчивость стержня Бернулли - Эйлера, в котором не учитывается влияние деформации сдвига на напряженно – деформированное состояние стержня, а также принимается гипотеза о недеформируемости стержня в докритическом состоянии. Как и для стержня Тимошенко в качестве примера приведем классическую задачу Эйлера - шарнирно опертый стержень, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 1.

Функционал устойчивости для стержня Бернулли - Эйлера вытекает из функционала устойчивости (10), в котором принимаем  $k_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k_1} = 0$ ,  $k_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k_2} = 0$

$$\Phi_{ст} (v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L [k_3 v''^2 - T v'^2] ds. \quad (23)$$

Уравнением Эйлера, вытекающим из условия  $\delta\Phi_{ст}=0$ , являются следующее уравнение:

$$k_3 v^{IV} + T v'' = 0. \quad (24)$$

Решением уравнения устойчивости (24) является классическая общепринятая формула Эйлера для определения критической силой без учета жесткостей на растяжение – сжатие и сдвиг:

$$T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{L^2} \quad (25)$$

Для оценки влияния жесткостей на растяжение – сжатие и сдвиг первоначально прямолинейного стержня, сжимаемого «мертвой» осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 1, проведем сравнение значений критической силы, вычисленных по точной формуле (18), учитывающей жесткости на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб, со значениями, вычисленными по формуле (25) для стержня Бернулли – Эйлера, учитывающей только жесткость на изгиб. В качестве примера, как показано на рисунке 2, приведем графики для стоек, выполненных из колонных двутавров. Для наглядности на графике также приведены график значений критической силы для стержня Тимошенко, вычисленных по формуле (22).

Проанализировав полученные результаты, можно прийти к выводу, что учет жесткостей на растяжение – сжатие и сдвиг приводит к существенному уменьшению критической силы. Таким образом, использование общепринятой формулы Эйлера (25) приводит к риску, потери устойчивости стержнем еще до достижения критической силы, вычисленной по формуле (18).

### Выводы:

1. Приведены постановки задач в виде системы дифференциальных уравнений и вариационные постановки в виде задачи о поиске точки стационарности функционала типа Лагранжа.

2. Для плоских задач получены уравнения задач устойчивости равновесия как уравнения Эйлера для второй вариации функционала Лагранжа.
3. В задаче об устойчивости стержня, сжатого осевой силой, получено универсальное решение (18) с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие, дающее точное значение критической силы для основных типов граничных условий.
4. Показано, что учет жесткости на растяжение – сжатие приводит к увеличению критической силы. Следовательно, принимая во внимание жесткость на растяжение – сжатие, мы учитываем внутренние «резервы» стержня под действием «мертвой» осевой нагрузки.
5. Показано, что полученное точное значение критической сжимающей силы с учетом всех жесткостей имеет меньшее значение, чем значение критической силы, вычисленное по классической формуле Эйлера. Поскольку обе формулы одинаково просты для ручного расчета, то полученная точная формула может быть рекомендована для использования во всех случаях, в которых ранее использовалась формула Эйлера.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Голоскоков, Д.П. Общая нелинейная теория упругих стержней с приложением к описанию эффекта Пойнтинга / Д.П. Голоскоков, П.А. Жилин // Депонировано ВИНТИ №1912-В87 Деп., 20 с.
2. Елисеев, В.В. Механика упругих стержней / В.В. Елисеев. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 1994. – 88 с.
3. Жилин, П.А. Равновесие и устойчивость тонкого стержня, нагруженного консервативным моментом / П.А. Жилин, А.Д. Сергеев // Труды СПбГТУ. №448 (Механика и процессы управления). СПб.: Изд-во СПбГПУ, – 1994. – С. 47-56.
4. Жилин, П.А. Нелинейная теория стержней и ее приложения / П.А. Жилин, А.Д. Сергеев, Т.П. Товстик // Труды XXIV летней школы «Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем», Санкт-Петербург, 1997. – С. 313 – 337.
5. Жилин, П.А. Прикладная механика. Теория упругих тонких стержней / П.А. Жилин. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2007. – 102 с.
6. Елисеев, В.В. Механика тонкостенных конструкций. Теория стержней / В.В. Елисеев, Т.В. Зиновьева. – СПб.: Изд-во СПбГПУ. – 2008. – 96 с.
7. Jelenic, G. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain – invariant finite element for static and dynamics / G. Jelenic, M.A. Crisfield // Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. – 1999. – №171. – Pp. 141–171.
8. Shabana, A.A. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: theory / A.A. Shabana and R.Y. Yakoub // ASME Journal of Mechanical Design, 2001. – №123 (4). – Pp. 606–613.
9. Reddy, J.N. An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis / J.N. Reddy. – Oxford University Press, – 2004. – 482 p.

10. Antman, S.S. Nonlinear problems of elasticity / S.S. Antman. – Springer, Berlin Heidelberg New York, 2005. – 835 p.
11. Gerstmayr, J. Analysis of thin beams and cables using the absolute nodal coordinate formulation / J. Gerstmayr, A.A. Shabana // Nonlinear Dyn. – 2006. – №45 (1–2). – Pp. 109–130.
12. Shabana, A.A. Computational continuum mechanics // A.A. Shabana. – Cambridge University Press, 2008. – 349 p.
13. Wriggers, P. Nonlinear finite element methods / P. Wriggers. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. – 566 p.
14. Krenk, S. Non-linear modelling and analysis of solids and structures / S. Krenk. – Cambridge University Press. 2009. 361p.
15. Ibrahimbegovic, A. Nonlinear Solid Mechanics / A. Ibrahimbegovic. – Springer Science+Business Media B.V., 2009. – 585 p.
16. Bigoni, D. Nonlinear solid mechanics: bifurcation theory and material instability / D. Bigoni. – Cambridge University Press, 2012. – 550 p.
17. Coskun, S. Elastic Stability Analysis of Euler Columns Using Analytical Approximate Techniques / S. Coskun, B. Öztürk // Advances in Computational Stability Analysis, Dr. Safa Bozkurt Coşkun (Ed.), ISBN: 978-953-51-0673-9, InTech, DOI: 10.5772/45940.
18. Багмутов, В.П. Элементы расчетов на устойчивость: учеб. пособие / В.П. Багмутов, А.А. Белов, А.С. Столярчук. – Волгоград: ИУНЛ ВолгГТУ, 2010. – 56 с.
19. Лалин, В.В. Различные формы уравнений нелинейной динамики упругих стержней / В.В. Лалин // Труды СПбГПУ. №489. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004. С. 121-128.
20. Лалин, В.В. Вариационная постановка плоской задачи геометрически нелинейного деформирования и устойчивости упругих стержней / В.В. Лалин, Л.А. Розин, Д.А. Кушова // Инженерно – строительный журнал. – 2013. – №1 (36). – С. 87 – 96.
21. Лалин, В.В. Вариационные постановки нелинейных задач с независимыми вращательными степенями свободы / В.В. Лалин, Е.В. Зданчук, Д.А. Кушова, Л.А. Розин // Инженерно – строительный журнал. – 2015. – №4. – С. 54 – 80.
22. Лалин, В.В. Геометрически нелинейное деформирование и устойчивость плоских упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб / В.В. Лалин, Д.А. Кушова // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2013. Volume 9, Issue 4. – С. 178-185.
23. Лалин, В.В. Решение задачи устойчивости сжатого стержня динамическим методом с учетом жесткостей на сдвиг и растяжение / В.В. Лалин, Д.А. Кушова // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. – №5 (256). – С. 49-54.
24. Перельмутер, А.В. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Т.1 / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010. – 704 с.

**Kuznetcova Daria Alexandrovna**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia, St. Petersburg  
E-mail: [Dasha\\_kushova@mail.ru](mailto:Dasha_kushova@mail.ru)

## **Influence of longitudinal and shear stiffness on beams and columns equilibrium**

**Abstract.** This article is about the nonlinear problems of the theory of elastic Cosserat – Timoshenko’s rods in the material (Lagrangian) description. The variational problem as the search for the stationary point of the Lagrangian functional and differential formulation of static problems were given. The differential equations of the plane stability problems were obtained from the second variation of the Lagrangian functional. Stability equations are the Euler equations of the variational problem, arising from the condition of vanishing of the first variation of the stability functional. Exact solutions of some stability problems with the deformations of bending, shear and tension-compression taken into account were obtained for the main types of boundary values of compressed rod. In this article stability of elastic rods, whose model is simplified (Timoshenko beam theory, in which the shear and bending stiffness are taking into account; Bernoulli's theory of rods - Euler, in which the bending stiffness are taking into account) are examined. The stability functional, the stability equations and formulas of the critical force were obtained for these models, as a special case of the general theory. An assessment of the impact of tension - compression and shear stiffness on the critical load were given.

**Keywords:** large displacements and rotations; geometrically nonlinearity; variational formulation; stability functional; Lagrangian functional; the stability equations; stability problems of a compressed rod; critical load; Timoshenko beam theory; Euler–Bernoulli beam theory; static approach to study the stability problem

### **REFERENCES**

1. Goloskokov, D.P. Obshchaya nelineynaya teoriya uprugikh sterzhney s prilozheniem k opisaniyu effekta Poyntinga / D.P. Goloskokov, P.A. Zhilin // Deponirovano VINITI №1912-V87 Dep., 20 s.
2. Eliseev, V.V. Mekhanika uprugikh sterzhney / V.V. Eliseev. – SPb.: Izd-vo SPbGPU, 1994. – 88 s.
3. Zhilin, P.A. Ravnovesie i ustoychivost' tonkogo sterzhnya, nagruzhennogo konservativnym momentom / P.A. Zhilin, A.D. Sergeev // Trudy SPbGTU. №448 (Mekhanika i protsessy upravleniya). Spb.: Izd-vo SPGPU, – 1994. – S. 47-56.
4. Zhilin, P.A. Nelineynaya teoriya sterzhney i ee prilozheniya / P.A. Zhilin, A.D. Sergeev, T.P. Tovstik // Trudy XXIV letney shkoly «Analiz i sintez nelineynykh mekhanicheskikh kolebatel'nykh sistem», Sankt-Peterburg, 1997. – S. 313 – 337.
5. Zhilin, P.A. Prikladnaya mekhanika. Teoriya uprugikh tonkikh sterzhney / P.A. Zhilin. – SPb.: Izd-vo SPbGPU, 2007. – 102 s.
6. Eliseev, V.V. Mekhanika tonkostennykh konstruktsiy. Teoriya sterzhney / V.V. Eliseev, T.V. Zinov'eva. – SPb.: Izd-vo SPbGPU. – 2008. – 96 s.
7. Jelenic, G. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain – invariant finite element for static and dynamics / G. Jelenic, M.A. Crisfield // Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. – 1999. – №171. – Pp. 141–171.

8. Shabana, A.A. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: theory / A.A. Shabana and R.Y. Yakoub // ASME Journal of Mechanical Design, 2001. – №123 (4). – Pp. 606–613.
9. Reddy, J.N. An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis / J.N. Reddy. – Oxford University Press, – 2004. – 482 p.
10. Antman, S.S. Nonlinear problems of elasticity / S.S Antman. – Springer, Berlin Heidelberg New York, 2005. – 835 p.
11. Gerstmayr, J. Analysis of thin beams and cables using the absolute nodal coordinate formulation / J. Gerstmayr, A.A. Shabana // Nonlinear Dyn. – 2006. – №45 (1–2). – Pp. 109–130.
12. Shabana, A.A. Computational continuum mechanics // A.A. Shabana. – Cambridge University Press, 2008. – 349 p.
13. Wriggers, P. Nonlinear finite element methods / P. Wriggers. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. – 566 p.
14. Krenk, S. Non-linear modelling and analysis of solids and structures / S. Krenk. – Cambridge University Press. 2009. 361r.
15. Ibrahimbegovic, A. Nonlinear Solid Mechanics / A. Ibrahimbegovic. – Springer Science+Business Media B.V., 2009. – 585 p.
16. Bigoni, D. Nonlinear solid mechanics: bifurcation theory and material instability / D. Bigoni. – Cambridge University Press, 2012. – 550 p.
17. Coskun, S. Elastic Stability Analysis of Euler Columns Using Analytical Approximate Techniques / S. Coskun, B. Öztürk // Advances in Computational Stability Analysis, Dr. Safa Bozkurt Coşkun (Ed.), ISBN: 978-953-51-0673-9, InTech, DOI: 10.5772/45940.
18. Bagmutov, V.P. Elementy raschetov na ustoychivost': ucheb. posobie / V.P. Bagmutov, A.A. Belov, A.S. Stolyarchuk. – Volgograd: IUNL VolgGTU, 2010. – 56 s.
19. Lalin, V.V. Razlichnye formy uravneniy nelineynoy dinamiki uprugikh sterzhney / V.V. Lalin // Trudy SPbGPU. №489. SPb.: Izd-vo SPbGPU, 2004. S. 121-128.
20. Lalin, V.V. Variatsionnaya postanovka ploskoy zadachi geometricheski nelineynogo deformirovaniya i ustoychivosti uprugikh sterzhney / V.V. Lalin, L.A. Rozin, D.A. Kushova // Inzhenerno – stroitel'nyy zhurnal. – 2013. – №1 (36). – S. 87 – 96.
21. Lalin, V.V. Variatsionnye postanovki nelineynykh zadach s nezavisimymi vrashchatel'nymi stepenyami svobody / V.V. Lalin, E.V. Zdanchuk, D.A. Kushova, L.A. Rozin // Inzhenerno – stroitel'nyy zhurnal. – 2015. – №4. – S. 54 – 80.
22. Lalin, V.V. Geometricheski nelineynoe deformirovanie i ustoychivost' ploskikh uprugikh sterzhney s uchetom zhestkostey na rastyazhenie-szhatie, sdvig i izgib / V.V. Lalin, D.A. Kushova // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2013. Volume 9, Issue 4. – S. 178-185.
23. Lalin, V.V. Reshenie zadachi ustoychivosti szhatogo sterzhnya dinamicheskim metodom s uchetom zhestkostey na sdvig i rastyazhenie / V.V. Lalin, D.A. Kushova // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. – 2014. – №5 (256). – S. 49-54.
24. Perel'muter, A.V. Ustoychivost' ravnovesiya konstruktsiy i rodstvennye problemy. T.1 / A.V. Perel'muter, V.I. Slivker. – M.: Izd-vo SKAD SOFT, 2010. – 704 s.