

Интернет-журнал «Наукоедение» ISSN 2223-5167 <http://naukovedenie.ru/>

Том 8, №6 (2016) <http://naukovedenie.ru/vol8-6.php>

URL статьи: <http://naukovedenie.ru/PDF/99TVN616.pdf>

Статья опубликована 16.01.2017

**Ссылка для цитирования этой статьи:**

Гриднев С.Ю., Кирсанов М.Н., Овчинников И.Г. Статический расчет двухраскосной балочной фермы // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 8, №6 (2016) <http://naukovedenie.ru/PDF/99TVN616.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

**УДК 624.04**

**Гриднев Сергей Юрьевич**

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», Россия, Воронеж  
Доктор технических наук, профессор  
E-mail: [gridnev\\_s\\_y@rambler.ru](mailto:gridnev_s_y@rambler.ru)

**Кирсанов Михаил Николаевич**

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»  
Доктор физико-математических наук, профессор  
E-mail: [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru)

**Овчинников Игорь Георгиевич**

ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства», Россия, Пенза  
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Россия, Саратов<sup>1</sup>  
ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Россия, Пермь  
Доктор технических наук, профессор  
E-mail: [bridgesar@mail.ru](mailto:bridgesar@mail.ru)

## Статический расчет двухраскосной балочной фермы

**Аннотация.** Получена формула для вычисления прогиба статически определимой плоской балочной фермы со сложной решеткой от действия равномерно распределенной на узлы верхнего пояса нагрузки при произвольном числе панелей и геометрических размерах фермы. Направление раскосов в панелях симметричной фермы чередуется. В системе компьютерной математики Maple определяются усилия в стержнях. Прогибы определяются по формуле Максвелла - Мора. Учитываются разные жесткости стержней поясов и решетки. Обобщение результатов на произвольное число панелей выполнено методом индукции. Рекуррентные уравнения составлены и решены с помощью стандартных операторов системы Maple. Выявлены асимптотические свойства решения.

**Ключевые слова:** ферма; чередующиеся раскосы; прогиб; аналитическое решение; Maple; метод индукции

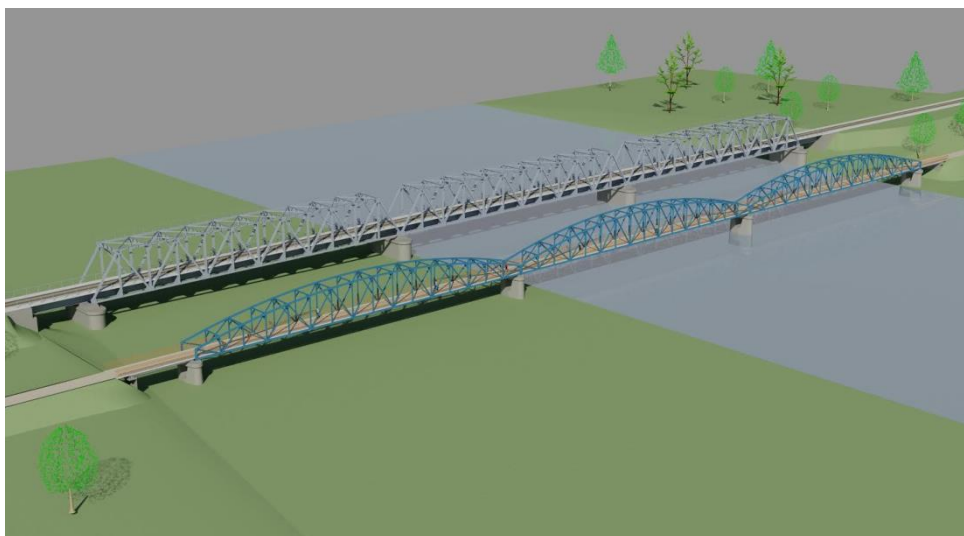
### Введение

Широко используемые в практике строительства фермы, перекрывающие значительные пролеты инженерных сооружений, особенно распространены при строительстве автодорожных и железнодорожных мостов. При этом, как правило, они имеют простую решетку. Однако фермы со сложной решеткой, особенно в условиях городской застройки,

---

<sup>1</sup> 410054, Саратов, Политехническая 77

имеют эстетически более выразительный облик за счет создания определенного ритма (рис. 1).



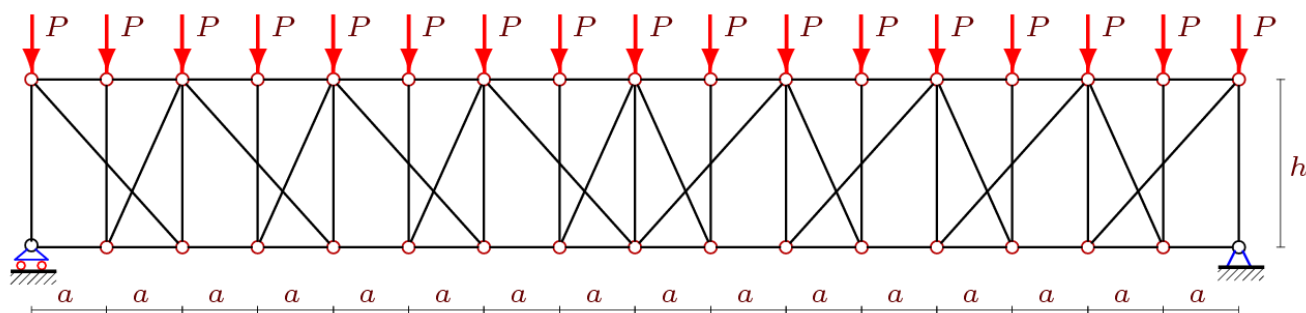
**Рисунок 1.** Железнодорожный и пешеходный мосты с пролетами из многоэлементных ферм (источник: 05.MVF Iceland 2014)

Применение таких ферм является вполне оправданным, несмотря на некоторое усложнение расчета и технологические сложности при их сооружении [2]. Фермы, состоящие из значительного числа элементов можно рассчитывать как численно, используя различные специализированные программные комплексы, так и аналитически. Простые точные формулы всегда предпочтительней для инженерных расчетов, однако, они получены только для ограниченного по типу решетки числа ферм. Индуктивные методы с применением системы компьютерной математики, разработанные в [1] и развитые в [3-18] для решения задач расчета плоских и пространственных ферм, стали основой для получения точных формул для достаточно широкого класса регулярных (периодических) ферм. Вопросы оптимизации стержневых многоэлементных конструкций рассмотрены в работах [19-28].

В настоящей статье получена формула для определения прогиба фермы с чередующимися по направлению раскосами. Отметим, что определение вертикальных прогибов фермы является необходимым условием при проектировании пролетных строений автодорожных и железнодорожных мостов. Обзор работ, использующих индуктивный метод в задачах расчета ферм с различной решеткой, содержится в [29-31].

### Описание исследуемой фермы

Нестандартная решетка рассматриваемой фермы состоит из чередующихся по наклону нисходящих по длине двух панелей и восходящих в одной панели раскосов в левой части и симметрично в правой (рис. 2).



**Рисунок 2.** Ферма при  $k=4$  (составлен авторами)

Выберем четное число панелей в половине пролета  $n=2k$ . В этом случае прогиб можно оценивать, например, по вертикальному смещению среднего шарнира нижнего пояса. Ферма содержит  $4n+2$  шарнирных узлов и  $m=8n+4$  стержней, включая три опорных стержня. Это обеспечивает статическую определимость конструкции. Нагрузка равномерно распределена по узлам верхнего пояса.

### Алгоритм получения решения

Для определения усилий в стержнях фермы используем метод вырезания узлов и алгоритм составления уравнений равновесия и заполнения матрицы косинусов направляющих углов, разработанный в [32] на языке системы аналитических вычислений Maple. Ввод в вычислительную программу данных о геометрии фермы начинается с задания координат узлов. Нумеруются нижние узлы фермы, затем - узлы верхнего пояса (рис. 2). Начало координат располагается в левой неподвижной опоре.

Имеем следующие значения координат шарниров:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i+2n+1} = ia - a, \\ y_i &= 0, y_{i+2n+1} = h, \quad i = 1, \dots, 2n+1. \end{aligned}$$

Структуру решетки фермы представим векторами  $\bar{N}_i, i = 1, \dots, m$ , соответствующими стержням. Компоненты этих векторов являются номерами шарниров по концам соответствующих стержней. Направления условных векторов произвольны и не связаны со знаками усилий в стержнях. Для стержней поясов имеем следующие векторы:

$$\begin{aligned} \bar{N}_i &= [i, i+1], \\ \bar{N}_{i+2n} &= [i+2n+1, i+2n+2], \quad i = 1, \dots, 2n. \end{aligned}$$

Для векторов стержней решетки:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{i+4n} &= [2i, 2i+2n+2], \\ \bar{N}_{i+4n+k} &= [2i+n, 2i+3n], \\ \bar{N}_{i+4n+2k} &= [2i+1, 2n+2i], \\ \bar{N}_{i+4n+3k} &= [2i+n-1, 2i+3n+2], \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

Стойки кодируются векторами:

$$\bar{N}_{i+6n} = [i, i+2n+1], \quad i = 1, \dots, 2n+1.$$

Для вычисления направляющих косинусов, входящих в уравнения узлов фермы, потребуются длины стержней и проекции их векторных представлений на оси координат

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, \quad l_{1,i} = x_{N_{2,i}} - x_{N_{1,i}}, \\ l_{2,i} = y_{N_{2,i}} - y_{N_{1,i}}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Индекс  $j$  в номере  $N_{j,i}$  соответствует номеру компоненты вектора,  $j=1$  - начало,  $j=2$  - конец условного вектора  $\bar{N}_i$ ,  $i$  - номер стержня. Направляющие косинусы являются компонентами матрицы системы уравнений равновесия узлов в проекциях на оси координат:

$$G_{r,i} = -l_{j,i} / l_i, \quad r = 2N_{2,i} - 2 + j, \quad r \leq m, \quad j = 1, 2, \quad G_{r,i} = l_{j,i} / l_i, \quad r = 2N_{1,i} - 2 + j, \quad r \leq m, \quad j = 1, 2.$$

где  $i = 1, \dots, m$ . Из решения системы линейных уравнений  $G\bar{S} = \bar{B}$  находим в символьной форме усилия в стержнях фермы. Здесь  $\bar{S}$  - вектор неизвестных усилий в стержнях,  $\bar{B}$  - вектор нагрузок. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу  $i$ , записываются в нечетные элементы  $B_{2i-1}$ , вертикальные - в четные  $B_{2i}$ .

Прогиб определяется по формуле Максвелла - Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i N_i l_i / (EF_i),$$

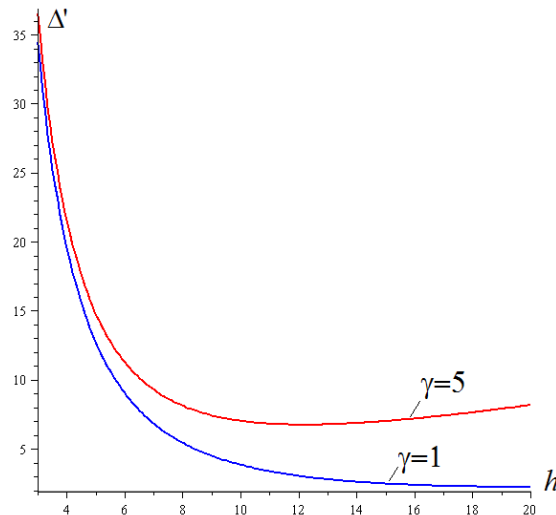
где использованы следующие обозначения:  $S_i$  - усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки,  $N_i$  - усилия в стержнях от действия единичной силы, приложенной к середине пролета,  $l_i$  - длины стержней,  $EF$  - жесткость стержней поясов и  $EF_i = EF / \gamma$  - жесткость стержней решетки,  $i = 4n + 1, \dots, m - 3$ . Три жестких опорных стержня в сумму не входят, поэтому верхний предел суммирования  $m - 3$ . Последовательный расчет серии ферм с увеличивающимся числом панелей (от 2 до 14) приводит всякий раз к результату одного и того же вида:

$$EF\Delta = P \frac{A_k a^3 + C_k c^3 \gamma + H_k h^3 \gamma}{2h^2},$$

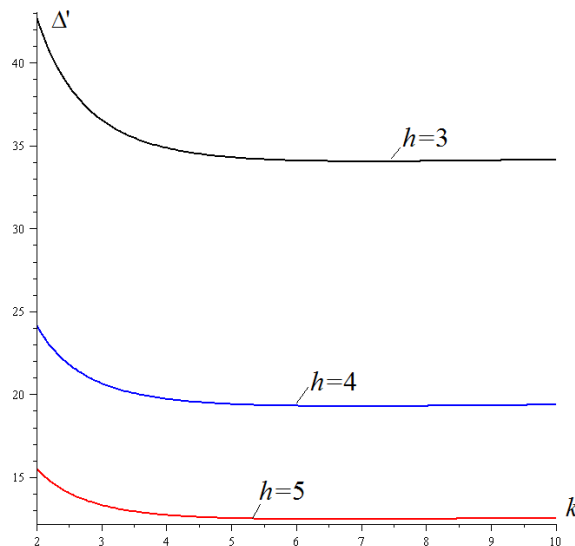
где  $c = \sqrt{4a^2 + h^2}$ . Последовательности коэффициентов в этой формуле имеют следующие общие члены:  $A_k = 2k[(20k^2 + 7)k / 3 + 6]$ ,  $C_k = k(2k + 1)$ ,  $H_k = 2k^2 + 5k - 2$ . Коэффициенты  $A_k$ ,  $C_k$  и  $H_k$  найдены в результате решения рекуррентных уравнений. Оператор **rgf\_findrecur** системы Maple по найденной в результате решения последовательности коэффициентов дает уравнение для коэффициентов, а оператор **rsolve** находит решение. Для случая нагружения фермы сосредоточенной силой в середине пролета решение будет иметь тот же вид, но с более простыми коэффициентами  $A_k = 8k(2k^2 + 1) / 3$ ,  $C_k = H_k = k$ .

### Анализ решения

С использованием описанного алгоритма выполнен ряд численных исследований. Ниже приводятся некоторые результаты. Зафиксируем длину половины пролета  $L = 2an$  и общую нагрузку на ферму  $P_s = 2(n + 1)P$ . Графики относительного прогиба  $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$  при  $L = 100$  м,  $\gamma = 1$  в зависимости от числа панелей фермы построены на рисунке 3 и различных высотах  $h$  фермы (в метрах) на рисунке 4.



**Рисунок 3.** Прогиб в зависимости от числа панелей,  $L=110$  м,  $\gamma=1$   
(рисунки составлены авторами)



**Рисунок 4.** Прогиб в зависимости от высоты, при  $L=110$  м,  $k=15$   
(рисунки составлены авторами)

Кривые имеют неявно выраженные наклонные асимптоты, наклон которых можно найти, вычислив предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k = h\gamma / (2L)$ .

### Заключение

Получены аналитические выражения для прогиба середины пролета фермы в зависимости от ее размеров, соотношения жесткостей стержней и числа панелей. Линейная комбинация этих решений позволит получить решения для достаточно широкого круга задач. Формулы могут найти применение при оценке напряженно-деформированного состояния проектируемых сооружений с пролетами в виде ферм со сложной решеткой и оптимизации принятия проектных решений, а сам алгоритм можно использовать для получения аналогичных формул для вычисления прогибов и усилий других регулярных стержневых конструкций.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. №5 (31). С. 38-42.
2. Клячин А.З. Металлические решетчатые пространственные конструкции регулярной структуры. Екатеринбург: Диамант. 1994. 276 с.
3. Реутов Д.О. Индуктивный анализ прогиба фермы регулярной структуры в системе Maple // Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа "Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики" // Материалы конференции и труды семинара. Казань: Изд-во ООО "Фолиант", 2014. С. 256-261.
4. Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. 2015. М.: Инфра-М. Т. 1. С. 4-8.
5. Заборская Н.В. О горизонтальном смещении опоры плоской балочной фермы // Перспективы развития науки и образования: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 28 февраля 2015 г.: Часть 9. Тамбов, 2015. С. 58-60.
6. Тиньков Д.В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. 2015. М.: Инфра-М. Т. 1. С. 52-56.
7. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 1. №12. С. 19-24.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. №3 (266). С. 16-19.
9. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа "butterfly" // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. №4. С. 2-5.
10. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. 5 (268). С. 19-22.
11. Кирсанов М.Н. О влиянии наклона подвижной опоры на жесткость балочной фермы // Вестник МГСУ. 2016. №10. С. 35-44.
12. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2016. №5 (39). С. 61-68.
13. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка деформативности мачты // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2016. 10 (889). С. 7-9.
14. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. №1 (29). С. 84-105.
15. Voropai R.A., Kirsanov M.N. On the deformation of spatial cantilever trusses under the action of lateral loads // Science Almanac. 2016. N9-2(23). pp. 17-20.
16. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. Architecture and Engineering. 2016. No. 3. Vol. 1. Pp. 14-17.

17. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. №1 (41). С. 93-100.
18. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой // Инженерно-строительный журнал. 2016. 4 (64). С. 52-58.
19. Kirsch U., Benardout, D. Optimal Design Of Elastic Trusses By Approximate Equilibrium // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1980. Vol. 22. Pp. 347-359.
20. Afonso S.M., Horowitz B., Silva M.F. Performance of a physical surrogate in the sequential approximate optimization of space trusses // Engineering Computations. 2011. Vol. 28. №7. Pp. 912-938.
21. Rajan S.D. Sizing, Shape, and Topology Design Optimization of Trusses Using Genetic Algorithm // Journal of Structural Engineering. 1995. Vol. 121. №10. Pp. 1480-1487.
22. Xu T., Zuo W., Xu T., Song G., Li R. An adaptive reanalysis method for genetic algorithm with application to fast truss optimization // Acta Mechanica Sinica. 2010. Vol. 26. №2. Pp. 225-234.
23. Серпик И.Н., Алексейцев А.В., Левкович Ф.Н., Тютюнников А.И. Структурно-параметрическая оптимизация стержневых металлических конструкций на основе эволюционного моделирования // Известия вузов. Строительство. 2005. №8. С. 16-24.
24. Пелешко И.Д., Юрченко В.В. Использование генетических алгоритмов для поиска оптимальных проектных решений металлических конструкций // VIII Украинская научно-техническая конференция “Металлические конструкции: взгляд в прошлое и будущее” (18-22 октября 2004 г., Киев, Украина) / Сборник докладов, часть 1. К.: Сталь, 2004. С. 250-260.
25. Ghasemi M.R., Hinton E., Wood R.D. Optimization of trusses using genetic algorithms for discrete and continuous variables // Engineering Computations. 1999. Vol. 16. №3. Pp. 272-303.
26. Astudillo N.C., Vera R., Ruiz G.H., Cardenas R.A., Viramontes F.J. A long span bridge and a greenhouse roof truss structure optimized by means of a consistent genetic algorithm with a natural crossover // Engineering Computations. 2013. Vol. 30. №1. Pp. 49-73.
27. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
28. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5 (57). С. 66-73.
29. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. №1 (7). С. 247-254.
30. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.



**Gridnev Sergey Yurievich**

Voronezh state technical university, Russia, Voronezh  
E-mail: gridnev\_s\_y@rambler.ru

**Kirsanov Michail Nikolaevich**

National research university Moscow power engineering institute, Russia, Moscow  
E-mail: c216@ya.ru

**Ovchinnikov Igor Georgievich**

Penza state university of architecture and construction, Russia, Penza  
Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov  
Perm national research polytechnic university, Russia, Perm  
E-mail: bridgesar@mail.ru

## **Static calculation of the two braces trussed joist**

**Abstract.** The formula for calculation of a deflection of statically definable flat bridge truss with a difficult lattice under of the loading which is evenly distributed on knots of the top belt at any number of panels and the geometrical sizes of a truss is received. The direction of braces in panels of a symmetric truss alternates. The forces in truss cores are defined using computer mathematics Maple. Deflections are determined by Maxwell - Moor formula. Different rigidity of cores of truss belts and truss lattice are considered. Generalization of results on any number of panels is executed by an induction method. The recurrent equations are worked out and solved by means of standard operators of the Maple system. Asymptotic properties of the decision are revealed.

**Keywords:** truss; the alternating brace; deflection; the analytical decision; Maple; induction method