

Красий Надежда Павловна

Krasiy Nadejda Pavlovna

Ростовский Государственный строительный университет

Rostov State University of Civil Engineering

Доцент кафедры Прикладной математики и вычислительной техники

Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science

E-Mail: krasnad@yandex.ru

Расчёт справедливой цены опционов разных типов для обобщённой модели (B,S)-рынка в случае скупки акций

The fair option prices of different types for the generalized (B, S)-market in the case of buying shares

Аннотация: В этой статье представлен метод проведения финансовых расчётов для обобщённой модели (B,S)-рынка в случае скупки акций. Приводится краткое описание задач, связанных с вычислением стоимостей производных рыночных активов и сопутствующих расчётов. Излагается сущность и обоснование обобщённой модели (B,S)-рынка в случае скупки акций, а также принципы проведения хеджирования и вычисления справедливых цен опционов разного типа. Представлено описание работы программного модуля и возможных применений полученных результатов.

The Abstract: This article presents a method of financial transactions for the generalized (B, S)-market in the case of buying the shares. A brief description of the problems associated with the calculation of the market value of derivative assets and related calculations. Describes the essence and justification of the generalized model (B, S)-market in case of acquisition of shares, and the principles of hedging and fair calculation of option prices of different types. The description of the program module and the possible applications of the results.

Ключевые слова: Финансовый рынок, акция, опцион, модель, справедливая цена, полнота, арбитраж, хедж, стратегия, модель Кокса-Росса-Рубинштейна, финансовое обязательство, приложение, модуль

Keywords: Financial market, stock, options, model, fair price, completeness, arbitrage, hedge strategy, model Cox-Ross-Rubinstein, financial obligation, application, module.

Одним из ключевых вопросов в исследованиях финансовых рынков является определение стоимостей производных рыночных активов. В мировой практике получение формул, позволяющих проводить подобные вычисления для конкретных моделей финансовых рынков, оценивается очень высоко. Особенно, если расчёт по этим формулам прост и подлежит автоматизации. Принцип определения стоимостей всех разновидностей производных ценных бумаг традиционно разрабатывается на примере опциона.

Стандартный опцион на покупку (опцион-колл) Европейского типа даёт право его владельцу купить в фиксированный момент времени акции по заранее оговоренной контрактной цене K . Цена покупки опциона C_{2N} называется премией, которая выплачивается покупателем опциона продавцу при заключении сделки. Ясно, что в момент исполнения опциона фактиче-

ская (рыночная) стоимость акции может отличаться от контрактной. По возникающим при этом ситуациям опционы делят на следующие категории:

1. Опцион «в деньгах» (In-the-money option) – характеристическое состояние опциона, когда текущая рыночная цена акции выше контрактной, и владельцу опциона выгодно предъявить его к исполнению, так как, немедленно продав эти акции, он получает в этом случае доход, равный разнице между рыночной и контрактной ценами.

2. Опцион «при деньгах», или «на деньгах», (At-the-money option) – состояние опциона, когда текущая рыночная цена акции равна контрактной, и владелец опциона терпит убыток равный уплаченной премии.

3. Опцион «вне денег» (Out-of-the-money option) – характеристическое состояние опциона, когда текущая рыночная цена акции ниже контрактной, и опцион не предъявляется к исполнению, так как сделка становится невыгодной для владельца опциона, который может купить интересующие его акции на рынке по меньшей цене.

Очевидно, что продавец и покупатель опциона преследуют разные цели, назначая, соответственно, продажную C^* и покупную C_* цены опциона. При отсутствии полноты рынка [1], это приводит к появлению ненулевой разницы $C^* - C_*$, называемой спрэдом. Если же рынок полон, то возможно совмещение противоположных интересов продавца и покупателя, выражающееся в существовании справедливой цены опциона C_{2N} , когда $C_{2N} = C^* = C_*$.

Получив за проданный опцион премию C_{2N} , продавец опциона должен к моменту исполнения опциона $n = 2N$ иметь возможность выполнить взятые на себя обязательства f_{2N} , совпадающие с доходами владельца опциона, имея начальный капитал $X_0^\pi = C_{2N}$.

В связи с этим, весьма актуальны задачи о вычислении справедливой цены опциона C_{2N} в сочетании с построением стратегии продавца опциона, хеджирующей его финансовое обязательство.

В работах [1;2] была разработана и исследована обобщённая модель финансового рынка типа Кокса-Росса-Рубинштейна в случае скупки акций, описывающая ситуацию, когда рынок подвержен целенаправленной скупке, то есть на нём действует агрессивный скупщик, желающий завладеть определённым количеством акций, например, контрольным пакетом. Такая ситуация вполне адекватно отражает состояние современных финансовых рынков, особенно российских, и впервые попытка исследовать рынок в случае скупки акций была предпринята в работах [5;6], где была разработана и исследована модель в случае жёсткой скупки акций. Дальнейшее развитие исследование этого состояния финансового рынка было успешно продолжено в работах [7;8]

В обобщённой модели (B,S)-рынка разделены моменты объявления новых цен на рыночные активы и моменты действий на рынке. Предполагается, что на фондовой бирже новые цены на акции объявляются в чётные моменты времени $0,2,4,6,\dots$, в то время, как скупка акций может происходить в «промежуточные» нечётные времена $1,3,5,\dots$, то есть в промежутках времени между объявлением цен на акции. Причём, если акция не была скуплена и продолжает эволюционировать на рынке, то изменение её стоимости имеет двойственный характер – относительное повышение, либо понижение, что соответствует концепции рынка типа Кокса-Росса-Рубинштейна. В случае, когда акция приобретает скупщиком, на рынок она больше не попадает и цена её, начиная с этого момента, эволюционирует как банковский счёт. Фи-

нальный момент исследований этой модели и, в частности, момент исполнения опциона, всегда чётный $n = 2N$.

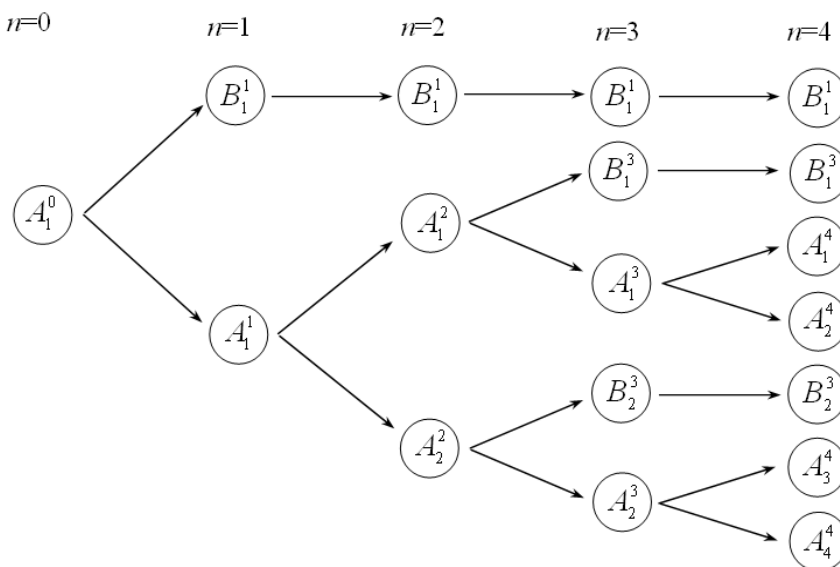


Рис. 1. – Информационное дерево обобщённой модели (B,S)-рынка в случае скупки акций

Процесс формирования возрастающего потока σ -алгебр можно проследить на рис.1. Здесь атомы $B_k^i, i = \overline{1, n}$ рассматриваются как события, состоящие в том, что в момент времени i акция скуплена и «заморожена», а атомы A_k^n соответствуют событию, что на момент времени n акция ещё не скуплена и продолжает эволюционировать на рынке.

Дискретная составляющая этой модели позволила получить реальные формулы для расчётов. Возможность хеджирования в обстоятельствах обобщённой модели (B,S)-рынка и формулы для расчёта компонентов хеджирующего портфеля на полном и безарбитражном рынке в рамках данной модели были получены в работах [3;4].

Хеджирующая стратегия – самофинансируемый портфель $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n=1}^{2N}$, где β_n – количество единиц банковского счёта, а γ_n – количество акций в момент времени n , дающий возможность в точности достичь к моменту $n = 2N$ платёжного обязательства f_{2N} .

Наиболее согласованным с концепцией модели является специальный канонический хедж, финансовый смысл которого заключается в том, что у держателя портфеля все деньги, начиная с момента скупки, остаются на банковском счете, то есть все акции проданы скупщику.

Чтобы произвести численный расчёт хеджирующей стратегии нужно задать конкретное платёжное обязательство. Для стандартного опциона купли Европейского типа платёжное обязательство вычисляется по формуле $f_{2N} = (S_{2N} - K)^+$, где K — контрактная цена. Опционы с последствием допускают зависимость платёжного обязательства от всех «прошлых» значений цен акций. Так для Азиатского арифметического опциона купли $f_{2N} = (\bar{S}_{2N} - K)^+$, где $\bar{S}_{2N} = \frac{1}{1+2N} \sum_{k=0}^{2N} S_k$, а для стандартного опциона купли с последствием $f_{2N} = (S_{2N} - K_{2N})^+$, где $K_{2N} = \min(S_0, S_1, \dots, S_{2N})$. При этом справедливую цену C_{2N} опционов можно вычислять по

формуле: $C_{2N} = X_0^\pi$, которая означает, что продавец опциона в начальный момент времени имеет в качестве стартового капитала только деньги, полученные от продажи опциона.

Итак, задавая в формулах для расчёта хеджирующей стратегии [3;4] платёжное обязательство определённого вида, мы получаем канонический портфель для всех перечисленных видов опционов купли. Соответствующие формулы имеют рекуррентный характер и удобны для применения вычислительных процедур, что имеет несомненное преимущество, т.к. далеко не во всех исследованиях удастся получить такие формулы для хеджа, чтобы можно было производить реальные компьютерные расчёты.

В среде VBA разработано приложение, предназначенное для вычисления справедливой цены опционов 3 типов (Европейский, Азиатский и стандартный опцион с последствием) в рамках обобщенной модели (B,S)-рынка в случае скупки акций и расчета компонентов хеджирующей стратегии продавца опционов-колл. Преимущества этого приложения в том, что оно доступно каждому пользователю и не требует установки специального программного обеспечения или особых навыков в финансовых расчётах. Простые и наглядные формы этого приложения позволяют легко его использовать. Впервые появилась возможность одновременных расчётов по всем видам опционов.

Входными данными являются:

1. доходность акции при падении в цене (a);
2. доходность акции при росте в цене (b);
3. доходность акции после скупки (процентная ставка r);
4. значение конечного момента – момента исполнения опциона, одновременно определяющего количество просчитываемых шагов хеджирующей стратегии;
5. начальная (текущая) цена акции;
6. контрактная цена акции.

Приложение предполагает применение двух вариантов ввода данных: автоматический ввод данных, использующий диапазон значений или ручной.

При автоматическом вводе данных (рис. 2) устанавливаются диапазон значений переменных a , b и r , где они генерируются случайным образом, причем отслеживается выполнение условия полноты и безарбитражности $-1 < a_i < r_i < b_i$ [2].

Рис. 2. – Форма ввода данных при помощи диапазона значений

При внесении данных вручную, значения переменных a , b и r заносятся в форму самостоятельно. Выполнение процесса ввода данных происходит пошагово. Количество шагов зависит от значения конечного момента. Если все значения проходят проверку, то они заносятся в массивы. После полного заполнения массивы передаются как параметры в процедуру расчета справедливой цены опциона и хеджирующей стратегии. В результате на экране генерируется таблица (таб. 1), которая показывает хеджирующую стратегию продавца для каждого момента (шага) и справедливую цену опциона

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	атом	n	0	1	2	3	4	капитал
2		акция	10	9	10.4399997	11.06639908	13.27967943	
3	B^1_1	гамма	0	1.000000477	0	0	0	
4		бета	16.23072052	-3.8147E-06	8.181818008	8.181818008	8.181818008	13.27968025
5		акция	10	12	9.840000153	8.659199715	10.39104007	
6	B^3_1	гамма	0	1.000000477	1.276729345	1.000000477	0	
7		бета	16.23072052	-5.26031E-06	-2.134025962	-2.86102E-06	6.402081966	10.39103985
8		акция	10	12	14.39999962	12.67199993	15.20640052	
9	B^3_2	гамма	0	1.000000477	1.276729345	0.999999523	0	
10		бета	16.23072052	-5.26031E-06	-3.122963564	4.76837E-06	9.368901253	15.20640182
11		акция	10	12	9.840000153	11.31599998	7.921199799	
12	A^4_1	гамма	0	1.000000477	1.276729345	1.000000477	1.000000238	
13		бета	16.23072052	-5.26031E-06	-2.134025962	-3.04996E-06	-1.10939E-06	7.921199905
14		акция	10	12	9.840000153	11.31599998	14.71080017	
15	A^4_2	гамма	0	1.000000477	1.276729345	1.000000477	1.000000238	
16		бета	16.23072052	-5.26031E-06	-2.134025962	-3.04996E-06	-2.01546E-06	14.71080071
17		акция	10	12	14.39999962	16.55999947	11.59199905	
18	A^4_3	гамма	0	1.000000477	1.276729345	0.999999523	1.000000119	
19		бета	16.23072052	-5.26031E-06	-3.122963564	6.53072E-06	-1.29928E-06	11.59199979
20		акция	10	12	14.39999962	16.55999947	21.52799988	
21	A^4_4	гамма	0	1.000000477	1.276729345	0.999999523	1.000000119	
22		бета	16.23072052	-5.26031E-06	-3.122963564	6.53072E-06	-2.29526E-06	21.52799806
23								
24								
25	справедливая цена опциона			16.23072				

Таб. 1. – Результат вычислений для четырёх шагов

Как можно пользоваться полученными результатами? Для продавца опциона построенная хеджирующая стратегия является своего рода инструкцией: отслеживая изменения цены акции, он имеет в каждый момент времени схему действий, приводящих в финале к достижению им платёжного обязательства. Результаты хеджирования представляют не меньший интерес и для покупателя опциона, чистая прибыль которого от сделки выражается формулой $f_{2N} - C_{2N}$. Анализируя полученные результаты, покупатель опциона может оценить вероятность получения прибыли и её предполагаемые размеры. Также, сравнивая результаты, полученные для опционов различных типов при одинаковых состояниях рынка, можно выбрать наиболее выгодный вид финансовой сделки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красий Н.П., Павлов И.В. Модели (B,S)-рынков типа Кокса–Росса–Рубинштейна в случае скупки акций // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки 2001. №1. С.7-11.
2. Красий Н.П., Павлов И.В. Обобщённая модель эволюции цен акций в случае их скупки // Изв. РГСУ, 2000. №5. С.165-173.
3. Красий Н.П., Павлов И.В. Построение хеджирующих стратегий для одной модели (B,S)-рынка // Обзорение прикладной и промышленной математики. М: ТВП. 2000, Т.7. №2. С.501-503.
4. Красий Н.П., Павлов И.В. Construction of the hedging strategies for one model of (B,S)-market // Probabilistic Methods in Discrete Math. (Proceedings of the 5-th Intern. Petrozavodsk Conf.), Petr., Russia, Jun, 2000. Utrecht, the Netherlands, 2002 г.
5. Белявский Г.И., Мисюра В.В., Павлов И.В. Ранговый критерий полноты одного финансового рынка при допущении арбитража // Обзорение прикладной и промышленной математики. Т.6, вып.1, 1999 г.
6. Мисюра В.В. Расчет хеджирующих стратегий для опционов европейского типа в случае (B,S)-рынка относительно специальной хааровской фильтрации // Сборник научных трудов III Всероссийского симпозиума «Математическое моделирование и компьютерные технологии». Т.4., 1999 г.
7. Богачёва М.Н. Расчет цен и хеджирование опционов американского типа относительно специальной хааровской фильтрации // Обзорение прикладной и промышленной математики, Москва, ТВП. 2000, т.7, вып.2, с.477-478.
8. Богачёва М.Н., Павлов И.В. О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных // Успехи матем. наук, 2002, т.57, в.3, с.143-144.