Мартиросов Александр Леонидович
Martirosov Alexander Leonidovich
Доцент/ Associate professor
Кафедра «Начертательной геометрии и черчения» РГСУ Ростов-на-Дону
Department of «Descriptive Geometry and Drawing»RSBU Rostov-on-Don

Пашян Джульетта Араратовна
Pashyan Djlietta Araratovna
Кафедра «Начертательной геометрии и черчения» РГСУ Ростов-на-Дону
Department of «Descriptive Geometry and Drawing»RSBU Rostov-on-Don
Ассистент/Teaching assistant
E-Mail: PDA185ma@yandex.ru

Аналитическое описание участков земных поверхностей, заданных набором горизонталей

Analytical description of the earth's surface, given a set of contour lines

Аннотация: В статье рассматривается оригинальная методика составления аналитического описания топографических поверхностей заданных набором геометрически определенных линий уровня (горизонталей).В качестве аппроксимирующих функций сечений выбраны полиномиальные кривые требуемого порядка. При этом, снижение порядка функции достигается использованием метода наименьших квадратов. Для коэффициентов получаемых уравнений сечений, также используются полиномы рассчитываемые по указанному методу.

The Abstract: In the article the original method of preparation of analytical description of topographic surfaces given a set of geometrically defined level curves (contours). As an approximation functions are selected sections required order polynomial curve. At the same time, reducing the order of a function is achieved by using the method of least squares. The coefficients derived equations sections also use polynomials calculated by this method.

Ключевые слова: Горизонталь, Точечный ряд, Кривая, Полином, Топографическая поверхность, Аппроксимация, Коэффициент.

Keywords: Horizontal, Spot series, Curve, Polynomial, Topographic surface, Approximation, Factor.

***

Участки земных поверхностей являются существенными составляющими в строительстве, в частности, в проектировании. Любое проектирование начинается с выяснения местности, на которой будет возводиться то или иное сооружение (здания, дороги, мосты, переходы и т.д.) Местность определяется так называемой топографической поверхностью, которая задается набором горизонталей, изображаемых графически. Поэтому все действия проектного характера приходится выполнять вручную, графическими приемами. Однако поставленная задача построения теней в экстерьере и просмотр зон освещенности (неосвещенности) прилагаемых к планируемым сооружениям территорий в режиме суточного наблюдения во все времена года мало применима и требует аналитического описания таких поверхностей.

В силу того, что составление горизонталей проводилось со значительными погрешностями, число точек отображения велико, точная аппроксимация их лишена смысла. В подобных случаях наиболее целесообразным методом аппроксимации считается метод наименьших квадратов полиномами сравнительно невысокого порядка.

В данной статье предлагается использовать оригинальную методику составления уравнений таких поверхностей.

Для выполнения аппроксимации на геодезическую карту накладываем прямоугольную сеть с выбранными направлениями осей декартовой системы координат. Геодезическая карта сканируется и по сечениям, параллельным одной из координатных плоскостей, считываются координаты по направлению выбранной оси, фиксируются точки пересечения с горизонталями, и высотные отметки в этих точках.

Полученная информация обрабатывается для каждого сечения, и вычисляются данные для ячеек матриц по расчету коэффициентов полиномов методом наименьших квадратов [1].

Задача проведения закономерной линии через множество точек, полученных (как это имеет место в данном случае) в результате эксперимента, называется аппроксимацией. Так как значения координат точек при топографической съемке определяется с ошибками, а количество точек в сечении весьма велико, то проводимая через них кривая не должна была бы иметь высокий порядок. Поэтому считают, что аппроксимирующая кривая должна проходить не точно через всю совокупность точек, но и проходить в максимальной близости от них. За счет этого порядок аппроксимирующей функции на основе визуальной оценки точечного ряда может быть выбран минимальный. (Например, если присутствуют 2 minimaxa, то целесообразно применять полином 3-го порядка и т.д.).

В этом случае принимаем, что аппроксимирующий многочлен (полином) имеет вид:

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 .$$

В связи с ранее изложенным может быть применен метод наименьших квадратов, который должен минимизировать сумму $S = \sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 - y_i \right)^2$.

Минимум будет достигнут, если все частные производные от S по a_0, a_1, a_2, a_3 – будут равны нулю.

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 - 1) 1 ;$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 - y) x ;$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial a_2} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 - y) x^2 ;$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial a_3} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 - y) x^3 \cdot$$

Тогда составится система

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^00 – до 18^00)
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

$$\begin{cases} \sum 1 + \sum x_i + \sum x_i^2 + \sum x_i^3 = \sum z_i; \\ \sum x + \sum x^2 + \sum x^3 + \sum x^4 = \sum z_i x; \\ \sum x^2 + \sum x^3 + \sum x^4 + \sum x^5 = \sum z_i x^2; \\ \sum x^3 + \sum x^4 + \sum x^5 + \sum x^6 = \sum z_i x^3. \end{cases} \tag{1}$$

Система уравнений (1) может быть решена по правилу Крамера:

$$a_i = \frac{\Delta i}{\Delta},$$

где Δ_i - определитель, в котором i-й столбец заменен столбцом свободных членов;

Δ - собственный определитель системы.

Подобным образом определяются все коэффициенты в каждом сечении $y_i = const$.

После этого составляется точечный ряд в нефизических системах координат по типу, представленному на рис.1, для каждого коэффициента аппроксимирующего полинома.

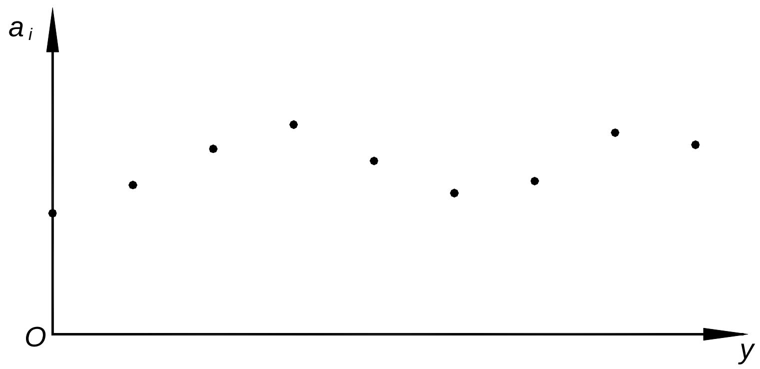

Рис. 1. *Точечный ряд коэффициента аппроксимирующего полинома*

По характеру распределения точечных рядов делается заключение о требуемом порядке аппроксимирующего полинома по соотношению:

(max + min) + 1. Выбрав порядок полинома, приступаем к выявлению коэффициентов полиномов $a_i = f_i(y)$.

Полученные точечные ряды аппроксимируются вновь полиномами по методу наименьших квадратов. Это приводит к нахождению коэффициентов указанных полиномов. В итоге будет получено уравнение топографической поверхности в явном виде:

$$z = f_0(y) + f_1(y)x + f_2(y)x^2 + \ \dots + f_n(y)x^n.$$

Полученное уравнение может быть использовано в практике аналитического расчета землеустроительных работ, а также для решения поставленной в работе задачи построения теней в хронологии. Пример использования методики приводится ниже.

Для аппроксимации выбран участок местности с наложенными сечениями плоскостями ***y = 0, 4, 8 , 12, 16, 20, 24***, представленный на рис.2.

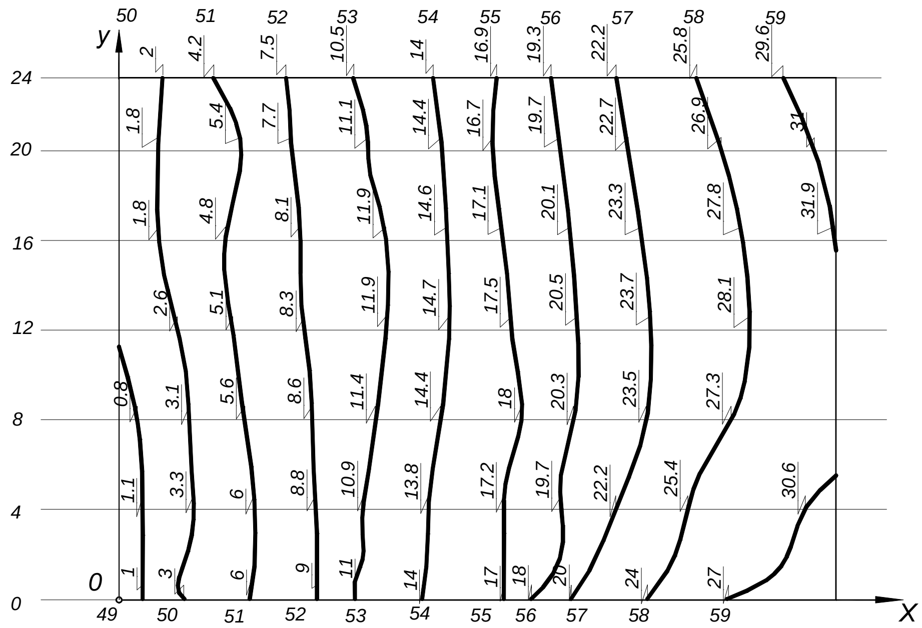

Рис. 2. *Набор горизонталей топографической поверхности*

Рассмотрев виды точечных рядов, делаем вывод, для аппроксимации сечений

y = const можно использовать полином третьей степени вида $\boldsymbol{z = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}$. Для выбранных сечений ***y = 0, 4,.., 24*** были проведены вычисления коэффициентов полинома и результаты расчета сведены в табл.1.

Таблица 1

Значения коэффициентов полиномов третьей степени

Сечение	a_0	a_1	a_2	a_3
0	0,859	0,292	0,0095	-0,000236
4	0,585	0,4041	5,66E-06	-6,40E-05
8	0,719377	0,415429	-0,00408	5,12E-05
12	1,37	0,268247	5,79E-03	-1,55E-04
16	1,63	0,23	0,00785	-0,000185
20	1,51	0,21	6,84E-03	-1,74E-04
24	1,51	0,306	0,00302	-8,34E-05

Для полученных коэффициентов $\boldsymbol{a_0}$, $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ были построены точечные ряды в функции ***y***.

Для аппроксимации этих кривых было определено, что для них достаточен полином четвертой степени, т. е. полином вида:

$$\boldsymbol{a_i = (b_{0i} + b_{1i}y + b_{2i}y^2 + b_{3i}y^3 + b_{4i}y^4)x^i},$$

где ***i = 0, 1, 2, 3.***

Результаты расчета коэффициентов $\boldsymbol{b_{0i}}$, $\boldsymbol{b_{1i}}$, $\boldsymbol{b_{2i}}$, $\boldsymbol{b_{3i}}$, $\boldsymbol{b_{4i}}$ сведены в табл.2.

Таблица 2

Значения коэффициентов полиномов третьей степени

i \ b	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
0	0,88	-2,55E-01	4,98E-02	-2,66E-03	4,47E-05
1	0,287	7,32E-02	-1,18E-02	5,81E-04	-9,01E-06
2	9,90E-03	-5,31E-03	7,13E-04	-3,10E-05	4,18E-07
3	-2,49E-04	9,82E-05	-1,22E-05	4,80E-07	5,46E-09

При расчете коэффициентов a_i, и b_{0i}, b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}, b_{4i} была использована стандартная программа Excel. Выборочная проверка точности аппроксимации, проведенная с использованием той же программы, показала, что погрешность аппроксимации находится в пределах от 0,1-0,03 м, что для топографической поверхности является вполне удовлетворительной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по высшей математике для инженеров и учащихся втузов. -М.: Наука, 1980.