Мартиросов Александр Леонидович
Martirosov Alexander Leonidovich
Доцент/ Associate professor
Кафедра «Начертательной геометрии и черчения» РГСУ Ростов-на-Дону
Department of «Descriptive Geometry and Drawing»RSBU Rostov-on-Don

Пашян Джульетта Араратовна
Pashyan Djlietta Araratovna
Кафедра «Начертательной геометрии и черчения» РГСУ Ростов-на-Дону
Department of «Descriptive Geometry and Drawing»RSBU Rostov-on-Don
Ассистент/Teaching assistant
E-Mail: PDA185ma@yandex.ru

Обобщенная задача изменения инсоляции внутренних объемов за счет применения дополнительных устройств

The generalized changes in insolation interior volume through the use of additional devices

Аннотация: В статье рассматриваются вопросы реорганизации пучка солнечных лучей в конгруэнцию посредством геометрических образований, ограниченных двумя поверхностями и составляющих тело, названное - "линза". Разработанная модель позволяет изменением параметров положения элементов, задающих внешние и внутренние поверхности, изучать характер реорганизации, т. е. вести исследования по преобразованию пучка на компьютере.

The Abstract: The article deals with the reorganization of the beam of sunlight through a congruence of geometric entities, limited by two surfaces and components of the body, called - "lens." Model allows to change the parameters of the position of elements that define the outer and inner surface, study the nature of the reorganization, that is, to conduct research on the transformation of the beam on the computer.

Ключевые слова: Инсоляция, Тело линзы, Отсек поверхности, Линейчатая образующая, Касательная плоскость, Точка касания, Направляющие косинусы.

Keywords: Insolation, Body lens, Compartment surface, Line generators, Tangent plane, Point of contact, The direction cosines.

***

Введение. Для освещенности внутренних пространств помещений весьма целесообразно применение таких устройств, которые позволили бы в большей степени охватить все пространство интерьера. В качестве таких устройств могут быть использованы светопреломляющие конструкции. Одна из таких конструкций предлагается в данной работе. При этом разработанное устройство задумано как преобразуемое либо на начальном этапе, либо в процессе изменения внешней инсоляции.

Предлагаемая конструкция линзы. Рассмотрим линзовое образование. При этом, в качестве ограничивающих тело линзы отсеков внутренней и внешней поверхностей в данном случае выберем:

- внешняя поверхность является отсеком однополостного гиперболоида вращения с уравнением [1]:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1; \qquad (1)$$

- внутренняя поверхность является отсеком однополостного гиперболоида общего вида с уравнением [1]:

$$\frac{x^2}{\bar{x}^2}+\frac{y^2}{\bar{b}^2}-\frac{z^2}{\bar{c}^2}=1. \qquad (2)$$

Пусть световой луч $\boldsymbol{S}$ с направляющими косинусами $\boldsymbol{l_S}$, $\boldsymbol{m_S}$, $\boldsymbol{n_S}$ попадает в точку $\boldsymbol{P}$ внешнего отсека. Если задаться величиной $\boldsymbol{y_p}$, то по соотношению (1) получим:

$x^2+z^2=a^2+y_P^2\,\frac{a^2}{c^2}$, то есть окружность радиуса $R=\frac{a}{c}\sqrt{c^2+y_P^2}$. Если теперь произвольно задать величину $x_P\sqrt{R^2-x_P^2}$ $\boldsymbol{x_P < R}$, то получим $z_P=\sqrt{R^2-x_P^2}$ (рис.1).

Как известно, однополостный гиперболоид имеет два семейства взаимно пересекающихся линейчатых каркасов, и через каждую точку (а следовательно, и через $\boldsymbol{P}$) проходят две пересекающиеся линейчатые образующие, которые и составляют касательную плоскость в точке. Для выделения прямых, проходящих через точку $\boldsymbol{P}$, воспользуемся новым приемом, который состоит в следующем. Спроецируем точку $\boldsymbol{P}$ ортогонально на плоскость $\boldsymbol{xOz}$ и получим $\boldsymbol{P_2}$ $\boldsymbol{(x_P,\ 0,\ z_P)}$. Горловое сечение поверхности, описываемой уравнением (1), получится подстановкой $\boldsymbol{y=0}$ и даст уравнение окружности:

$$x^2+z^2=a^2 \qquad (3)$$

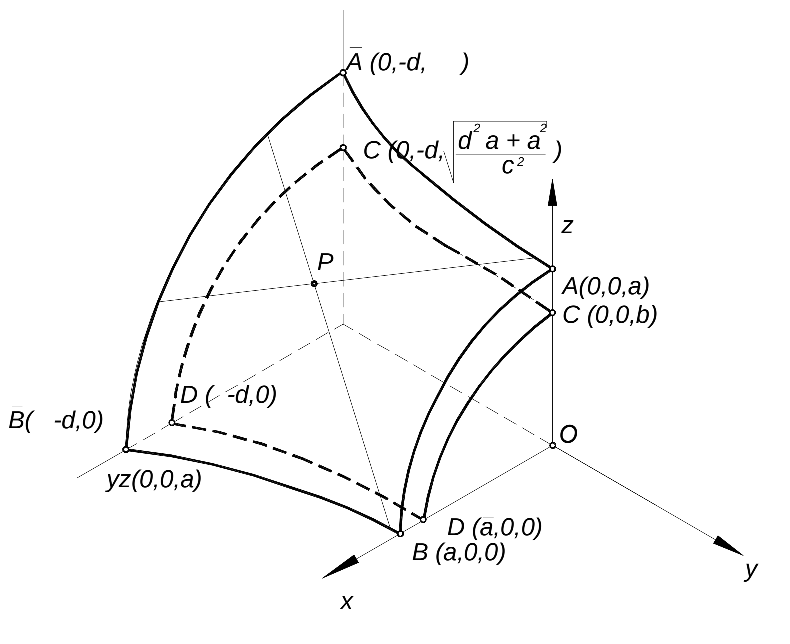

Рис. 1. *Аксонометрическое изображение ограждающих поверхностей*

Прямые, проходящие через $\boldsymbol{P}$ могут быть определены уравнением пучка

$$z - z_p = k(x - x_p) \tag{4}$$

Совместное решение (3) и (4) приведет к квадратному уравнению вида:

$$(1+k^2)x^2 + 2k(z_P - kx_P)x + \left[(z_P - kx_P)^2 - a^2\right] = 0.$$

Решением квадратного уравнения будет:

$$x_{12K} = \frac{-k(z_P - kx_P) \pm \sqrt{k^2(z_P - kx_P)^2 - (1+k^2)\left[(z_P - kx_P)^2 - a^2\right]}}{1+k^2}. \tag{5}$$

Если прямая из пучка (4) будет касательной к кривой (3), то подкорневое выражение в уравнении (5) должно равняться нулю.

Приравняв это выражение нулю, найдем, что

$$k_{12} = \frac{-x_P z_P \pm a\sqrt{x_P^2 + z_P^2 - a^2}}{a^2 - x_P^2}. \quad (6)$$

Так как имеем два значения k, то получим и пару точек касания $K_1(x_{1K}, 0, z_{1K})$ и $K_2(x_{2K}, 0, z_{2K})$. Эти точки определят совместно с точкой P уравнения образующих однополостного гиперболоида с уравнениями: $\frac{x - x_P}{x_{1K} - x_P} = \frac{y - y_P}{-y_P} = \frac{z - z_P}{z_{1K} - z_P}$ и $\frac{x - x_P}{x_{2K} - x_P} = \frac{y - y_P}{-y_P} = \frac{z - z_P}{z_{2K} - z_P}$.

Прямые PK_1 и PK_2 составляют касательную плоскость. Множители при x, y, z определяют направляющие коэффициенты нормали, с помощью которых можно определить направляющие косинусы нормали этой плоскости. Уравнение плоскости в матричном виде имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_p & y - y_p & z - z_p \\ l_{1K} & m_{1K} & n_{1K} \\ l_{2K} & m_{2K} & n_{2K} \end{vmatrix} = 0$$

Вычисление комплексного преобразования светового луча при прохождении через выбранную систему. Вектор светового луча с направляющими косинусами меняется в зависимости от времени суток и заданного дня (l_s, m_s, n_s).

На векторах нормали и луча отметим единичные отрезки, на которых отметятся точки $S(x_p + l_s, y_p + m_s, z_p + n_s)$ и $N(x_p + l_n, y_p + m_n, z_p + n_n)$.

Используем приближенный метод замены дуг хордой. На прямой, соединяющей точки ***S*** и ***N***, отметим точку ***G***, которая разделяет отрезок, уменьшая ***SN*** на коэффициент преломления ***n*** от точки N (рис.2).

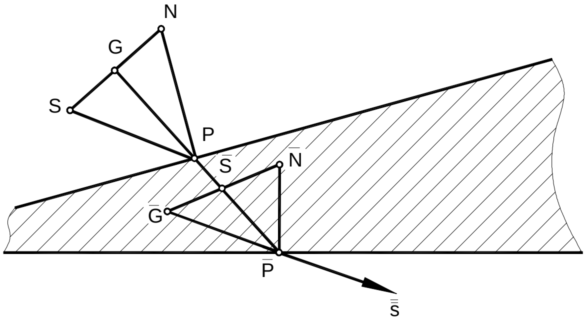

Рис. 2. *Схема преломления луча в теле линзы*

Координаты этой точки:

$$x_G = \frac{(l_n - l_s) + nx_p}{n};\ y_G = \frac{(m_n - m_s) + ny_p}{n};\ z_G = \frac{(n_n - n_s) + nz_p}{n}.$$

Для сокращения записей обозначим:

$$l_n - l_S = L,\quad m_n - m_S = M,\quad n_n - n_S = N.$$

Преломленный луч ***GP*** будет иметь уравнение:

$$\frac{x - \dfrac{L + nx_p}{n}}{x_p - \dfrac{L + nx_p}{n}} = \frac{y - \dfrac{M + ny_p}{n}}{y_p - \dfrac{M + ny_p}{n}} = \frac{z - \dfrac{N + nz_p}{n}}{z_p - \dfrac{N + nz_p}{n}}.$$

Взяв первую и вторую дроби, выразим y через x $y = \dfrac{Mx - Mx_p + Ly_p}{Ln}$.

Взяв первую и третью дроби, выразим z через x $z = \dfrac{Nx - Nx_p + Lz_p}{Ln}$

Подставив данные выражения в уравнение (2) и решив это выражение относительно x, получим координаты точки $\overline{P}$.

Определив координаты точки $\overline{P}(x_{\overline{P}}, y_{\overline{P}}, z_{\overline{P}})$ и построив ортогональную проекцию ее на ***xOz,*** проведем касательные к горловому сечению однополостного гиперболоида общего вида по уравнению (2). Сечение имеет уравнение: $\dfrac{x^2}{\overline{a}^2} + \dfrac{z^2}{\overline{b}^2} = 1$. Уравнение же пучка прямых с центром в точке $\overline{P}_2$ имеет вид: $z = \overline{k}(x - x_{\overline{P}}) + z_{\overline{P}}$. Решая совместно эти два уравнения аналогично предыдущему, выявляем точки касания $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$.

Прямые $\overline{P}\overline{K}_1$ и $\overline{P}\overline{K}_2$ составляют касательную плоскость. Множители при ***x, y, z*** определяют направляющие косинусы нормали $\overline{n}$ этой плоскости. Уравнение плоскости в матричном виде имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_{\bar{P}} & y - y_{\bar{P}} & z - z_{\bar{P}} \\ l_{1K} & m_{1K} & n_{1K} \\ l_{2K} & m_{2K} & n_{2K} \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая, получим

$$(x - x_{\bar{P}})(m_{1K}n_{2K} - m_{2K}n_{1K}) - (y - y_{\bar{P}})(l_{1K}n_{2K} - l_{2K}n_{1K}) + (z - z_{\bar{P}})(l_{1K}m_{2K} - l_{2K}m_{1K}) = 0$$

Отсюда направляющие косинусы $\bar{n}$ нормали:

$$l_{\bar{n}} = m_{1K}n_{2K} - m_{2K}n_{1K}; \; m_{\bar{n}} = -(l_{1K}n_{2K} - l_{2K}n_{1K});$$
$$n_{\bar{n}} = l_{1K}m_{2K} - l_{2K}m_{1к}.$$

На новой нормали и преломленном луче отметим отрезки единичной длины, координаты которых

$\bar{S}(x_{\bar{p}} + l_{\bar{s}}; y_{\bar{p}} + m_{\bar{s}}; z_p + n_s); \; \bar{N}(x_{\bar{p}} + l_{\bar{n}}; y_{\bar{p}} + m_{\bar{n}}; z_p + n_{\bar{n}}).$ Направляющие косинусы прямой $\bar{G}\bar{P}$:

$$l_{\bar{G}\bar{P}} = -\frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}; m_{\bar{G}\bar{P}} = -\frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}; n_{\bar{G}\bar{P}} = -\frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

Если материал нижней поверхности другой , то отрезок $\bar{S}\bar{N}$ нужно увеличить на $\bar{\bar{n}}$. Точка на этой прямой $\bar{G}$ имеет координаты

$$x_{\bar{G}} = (l_{\bar{n}} - l_{\bar{s}})\bar{\bar{n}} + x_{\bar{p}}; \; y_{\bar{G}} = (m_{\bar{n}} - m_{\bar{s}})\bar{\bar{n}} + y_{\bar{p}}; \; z_{\bar{G}} = (n_{\bar{n}} - n_{\bar{s}})\bar{\bar{n}} + z_{\bar{p}}.$$

Тогда исходящий луч будет иметь уравнение

$$\frac{x - x_{\bar{p}}}{(l_{\bar{n}} - l_{\bar{s}})\bar{\bar{n}}} = \frac{y - y_{\bar{p}}}{(m_{\bar{n}} - m_{\bar{s}})\bar{\bar{n}}} = \frac{z - z_{\bar{p}}}{(n_{\bar{n}} - n_{\bar{s}})\bar{\bar{n}}}.$$

Уравнение исходящей прямой может решаться с любой ограждающей поверхностью пола, стен и пр.

Заключение. Созданная модель линзового тела дает возможность проводить исследования по измененной инсоляции внутреннего пространства помещения с большим количеством изменяемых величин в ее конструкции. Такого рода модели линз могут быть своими отсеками состыкованы с отсеками линзовых тел, ограниченных гипарами, так как однополостные гиперболоиды, как и гипары, имеют гиперболические сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бронштейн, И.Н., Семендяев К.А. Справочник по высшей математике для инженеров и учащихся втузов/ И.Н.Бронштейн, К.А.Семенцов -Москва: Наука, 1980.