Литвинов Владимир Витальевич
Litvinov Vladimir Vitalyevich
ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный строительный университет»
Federal state budgetary educational institution of higher professional education «Rostov state University of construction»
Зав. лабораторией кафедры сопротивления материалов
Head of laboratory of the Department of resistance of materials
E-mail: v2635396@mail.ru

Чепурненко Антон Сергеевич
Chepurnenko Anton Sergeevich
ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный строительный университет»
Federal state budgetary educational institution of higher professional education «Rostov state University of construction»
Студент института ПГС, ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный строительный университет»

Бескопыльный Алексей Николаевич
Beskopylny Alexey Nikolaevich
ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный строительный университет»
Federal state budgetary educational institution of higher professional education «Rostov state University of construction»
Проректор по УР Ростовского государственного строительного университета, д.т.н., профессор.
E-mail: besk-an@yandex.ru

Соотношения между компонентами поверхностной нагрузки параболического свода при его безмоментном исходном напряженном состоянии

The ratio between the components of the surface of the load of a parabolic arch with his безмоментном the initial stress state

Аннотация: Потеря устойчивости оболочки возможна при наличии смежных форм равновесия. Такими формами равновесия могут быть: безмоментная начальная форма до потери оболочкой устойчивости и моментная – после потери устойчивости. При выделении безмоментного начального состояния оболочки всегда следует иметь в виду, что даже при надлежащих краевых условиях оно возможно не при любых нагрузках. В настоящей статье определяется некоторый класс поверхностных нагрузок, вызывающих в своде безмоментное напряженное состояние, симметричное относительно двух плоскостей симметрии свода. В качестве примера рассмотрен параболический свод длиной l, имеющий две плоскости симметрии

The Abstract: The loss of stability of the shell is possible in the presence of related forms of equilibrium. Such forms of equilibrium may be: a membrane initial form to the loss of membrane stability and momentary - after the loss of stability. When allocating the momentless initial state of the shell should always be kept in mind that even with appropriate boundary conditions it is not possible under all load conditions. In the present article shall be determined by one class of surface loads, causing the code безмоментное the state of stress, symmetric with two planes of symmetry of the code. As an example, we consider the parabolic code of length l, which has two symmetry plane

Ключевые слова. Оболочка, гиперболический свод, безмоментное состояние, компоненты поверхностной нагрузки.

Keywords: Shell, hyperbolic set, безмоментное status, components of the surface of the load.

***

Потеря устойчивости оболочки возможна при наличии смежных форм равновесия. Такими формами равновесия могут быть: безмоментная начальная форма до потери оболочкой устойчивости и моментная – после потери устойчивости. При выделении безмоментного начального состояния оболочки всегда следует иметь в виду, что даже при надлежащих краевых условиях оно возможно не при любых нагрузках.

В настоящей статье определяется некоторый класс поверхностных нагрузок, вызывающих в своде безмоментное напряженное состояние, симметричное относительно двух плоскостей симметрии свода. В качестве примера приведен параболический свод длиной l, имеющий две плоскости симметрии x_1Ox_3 и x_2Ox_3. Условно на рисунке показана половина свода, лежащая вправо от плоскости симметрии $x_1O\,x_3$.

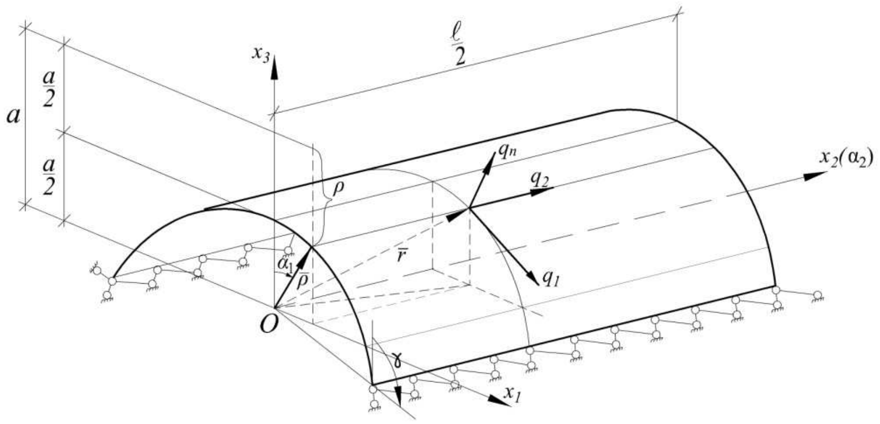

Рис.

Параметрические уравнения свода имеют вид:

$x_1 = \rho \sin \alpha_1;\ x_2 = \alpha_2; x_3 = \rho \cos \alpha_1.$

При этом $\rho = \frac{a}{2\cos^2\frac{\alpha_1}{2}}$, где a – параметр параболы в плоскости x_1Ox_3.

Все последующие выкладки построены на основе допущений теории Кирхгофа-Лява для тонких оболочек [1]. В качестве исходных принимаются уравнения равновесия элемента оболочки по безмоментной теории и уравнения неразрывности срединной поверхности оболочки также для случая безмоментной работы последней [2; 3].

Уравнения равновесия:

$$B\frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}T_1+A\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}+2\frac{\partial A}{\partial \alpha_2}S-\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}T_2+ABq_1=0;$$

$$A\frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial A}{\partial \alpha_2}T_2+B\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}+2\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}S-\frac{\partial A}{\partial \alpha_2}T_1+ABq_2=0; \qquad (1)$$

$$\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}-q_n=0.$$

Уравнения неразрывности срединной поверхности:

$$\frac{1}{R_1}[B\frac{\partial T_2}{\partial \alpha_1}-\mu B\frac{\partial T_1}{d\alpha_1}+(1+\mu)\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}T_2-(1+\mu)\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}T_1-$$

$$-2(1+\mu)\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{\partial A}{\partial \alpha_2}S-2(1+\mu)A\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}]=0;$$

$$\frac{1}{R_2}[A\frac{\partial T_1}{\partial \alpha_2}-\mu A\frac{\partial T_2}{d\alpha_2}+(1+\mu)\frac{\partial A}{\partial \alpha_2}T_1-(1+\mu)\frac{\partial A}{\partial \alpha_2}T_2-$$

$$-2(1+\mu)\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}S-2(1+\mu)B\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}]=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\{\frac{1}{A}[B\frac{\partial T_2}{\partial \alpha_1}-\mu B\frac{\partial T_1}{d\alpha_1}+(1+\mu)\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}T_2-(1+\mu)\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}T_1-2(1+\mu)\frac{\partial A}{\partial \alpha_2}S$$

$$-(1+\mu)A\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}]\}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left\{\frac{1}{B}\left[A\frac{\partial T_1}{\partial \alpha_2}-\mu A\frac{\partial T_2}{d\alpha_2}+(1+\mu)\frac{\partial A}{\partial \alpha_2}T_1-(1+\mu)\frac{\partial A}{\partial \alpha_2}T_2-2(1+\mu)\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}S\right.\right.$$

$$-(1+\mu)B\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}]\}=0. \qquad (2)$$

С учетом того, что параметры Ляме A и B и главные радиусы кривизны R_1 и R_2 срединной поверхности свода имеет вид $A=A(\alpha_1)$, $B=1$, $R_1=R_1(\alpha_1)$, $R_2=\infty$, а напряженное состояние свода - безмоментное, указанные шесть уравнений (1) и (2) приводятся к системе пяти дифференциальных уравнений (исчезает второе уравнение неразрывности, обращающееся в тождество):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} + A\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} + Aq_1 = 0;\\
&A\frac{\partial T_2}{d\alpha_2} + \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} + Aq_2 = 0;\\
&\frac{T_1}{R_1} - q_n = 0;\\
&\frac{\partial T_2}{\partial \alpha_1} - \mu\frac{\partial T_1}{d\alpha_1} - 2(1+\mu)A\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = 0;\\
&\frac{\partial^2 T_1}{\partial \alpha_2^2} - \mu\frac{\partial^2 T_2}{\partial \alpha_2^2} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\alpha_1\ и\ \alpha_2$ - криволинейные координаты точек срединной поверхности свода;

T_1, T_2- погонные усилия растяжения-сжатия элемента срединной поверхности свода в направлении соответствующих координатных линий;

S – погонное сдвигающее усилие, возникающее в срединной поверхности свода в направлении координатных линий;

μ - коэффициент Пуассона;

q_1, q_2, q_n– компоненты нагрузки, распределенной по поверхности свода.

Первые четыре уравнения системы (3) получены в результате не сложных преобразований и не требуют дополнительных пояснений. Дадим лишь пояснение к пятому уравнению, которое получено преобразованием последнего уравнения неразрывности срединной поверхности из (2). В данном случае это уравнение неразрывности можно записать проще

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial T_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\mu}{A}\frac{\partial T_1}{d\alpha_1} - (1+\mu)\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(A\frac{\partial T_1}{\partial \alpha_2} - \mu A\frac{\partial T_2}{d\alpha_2} - (1+\mu)\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}\right) = 0,$$

или взяв указанные производные от выражений в круглых скобках

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha_1}\frac{\partial T_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A}\frac{\partial^2 T_2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\mu}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha_1}\frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\mu}{A}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \alpha_1^2} - (1+\mu)\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1\, d\alpha_2} + A\frac{\partial^2 T_1}{\partial \alpha_2^2} - \mu A\frac{\partial^2 T_2}{\partial \alpha_2^2}\\
- (1+\mu)\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1\, d\alpha_2} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

В соответствии же с четвертым уравнением той же системы (3) имеем

$$2(1+\mu)\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{A}\frac{\partial T_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\mu}{A}\frac{\partial T_1}{d\alpha_1}$$

или после дифференцирования по α_1

$$2(1+\mu)\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_1\, d\alpha_2} = -\frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial\alpha_1}\frac{\partial T_2}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A}\frac{\partial^2 T_2}{\partial\alpha_1^2} + \frac{\mu}{A^2}\frac{\partial A}{\partial\alpha_1}\frac{\partial T_1}{\partial\alpha_1} - \frac{\mu}{A}\frac{\partial^2 T_1}{\partial\alpha_1^2}.$$

Подставляя последнее выражение в (4), получаем окончательный вид пятого уравнения системы (3)

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial\alpha_2^2} - \mu\frac{\partial^2 T_2}{\partial\alpha_2^2} = 0.$$

Исключим теперь из системы уравнений (3) усилия $T_1, T_2\ и\ S$.

Из третьего уравнения системы (3) получим, что

$$T_1 = R_1 q_n\,. \tag{5}$$

T_2 нетрудно теперь найти из последнего уравнения системы (3), которое после деления на μ и с учетом (5) можно записано иначе

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}\left(\frac{R_1}{\mu}q_n - T_2\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{R_1}{\mu}q_n - T_2 = C_1(\alpha_1)\cdot\alpha_2 + C_2(\alpha_1). \tag{6}$$

Здесь $C_1(\alpha_1)\ и\ C_2(\alpha_1)$ –произвольные функции интегрирования, которые найдем, используя условия симметрии напряженного состояния свода и считая при этом, что свод не сжат по торцам, т.е.

$$T_2 = \Big|_{\alpha_2=\pm\frac{l}{2}} = 0.$$

С учетом последнего уравнение (6) запишется в виде двух выражений

при $\alpha_2 = \frac{l}{2}$: $\frac{R_1}{\mu}q_n\Big|_{\alpha_2=\pm\frac{l}{2}} = C_1(\alpha_1)\cdot\left(+\frac{l}{2}\right) + C_2(\alpha_1),$

при $\alpha_2 = -\frac{l}{2}$: $\frac{R_1}{\mu}q_n\Big|_{\alpha_2=\pm\frac{l}{2}} = C_1(\alpha_1)\cdot\left(-\frac{l}{2}\right) + C_2(\alpha_1)$

или после сложения этих выражений получим

$$2\frac{R_1}{\mu}q_n\Big|_{\alpha_2=\pm\frac{l}{2}} = 2C_2(\alpha_1),$$

откуда

$$C_2(\alpha_1) = \frac{R_1}{\mu}q_n\Big|_{\alpha_2=\pm\frac{l}{2}},$$

а $$C_1(\alpha_1) = 0.$$

Таким образом, получается, что

$$T_2 = \frac{R_1}{\mu}q_n - \frac{R_1}{\mu}q_n\Big|_{\alpha_2=\pm\frac{l}{2}}. \tag{7}$$

Для исключения S из системы (3) возьмем первое уравнение этой системы, из которого следует, что

$$A\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\left[\frac{\partial T_1}{d\alpha_1} + Aq_1\right]$$

или

$$S(\alpha_1,\alpha_2) = -\int_0^{\alpha_2}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial(R_1q_n)}{\partial\alpha_1} + q_1\right]\partial\alpha_2 \tag{8}$$

и тогда четвертое уравнение системы (3) может быть записано как

$$\frac{\partial T_2}{\partial\alpha_1} - \mu\frac{\partial T_1}{d\alpha_1} + 2(1+\mu)\left[\frac{\partial T_1}{d\alpha_1} + Aq_1\right] = 0$$

или

$$\frac{\partial T_2}{\partial\alpha_1} + (2+\mu)\frac{\partial T_1}{d\alpha_1} + 2(1+\mu)Aq_1 = 0,$$

а с учетом (7) и (5)

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(R_1q_n) - \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(R_1q_n\Big|_{\alpha_2=\pm\frac{l}{2}}\right) + (2+\mu)\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(R_1q_n) + 2(1+\mu)Aq_1 = 0,$$

откуда получаем

$$q_1 = \frac{1}{A}\left\{\frac{1}{2\mu(1+\mu)}\frac{\partial(R_1q_n)}{\partial\alpha_1}\Big|_{\alpha_2=\pm\frac{l}{2}} - \frac{1}{2(1+\mu)}\left[\frac{1}{\mu} + (2+\mu)\right]\frac{\partial(R_1q_n)}{\partial\alpha_1}\right\}$$

или окончательно

$$q_1 = \frac{1}{2\mu(1+\mu)}\frac{1}{A}\frac{\partial(R_1 q_n)}{\partial\alpha_1}\Big|_{\alpha_2=\pm\frac{l}{2}} - \frac{1+\mu}{2\mu}\frac{1}{A}\frac{\partial(R_1 q_n)}{\partial\alpha_1}. \qquad (9)$$

Выражение для q_2 получим из второго уравнения системы (3), а именно

$$q_2 = -\frac{1}{A}\frac{\partial S}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial T_2}{d\alpha_2}$$

или с учетом (7) и (8)

$$q_2 = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left\{-\int_0^{\alpha_2}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial(R_1 q_n)}{\partial\alpha_1} + q_1\right]\partial\alpha_2\right\} - \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{R_1}{\mu}q_n - \frac{R_1}{\mu}q_n\Big|_{\alpha_2=\pm\frac{l}{2}}\right)$$

или

$$q_2 = \frac{1}{A}\int_0^{\alpha_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial(R_1 q_n)}{\partial\alpha_1} + q_1\right]\partial\alpha_2 - \left(\frac{R_1}{\mu}\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_2} + 0\right).$$

В этом выражении выполним еще одну подстановку вместо q_1 в соответствии с (9), разбивая при этом интеграл на сумму двух интегралов. Тогда получим

$$q_2 = \frac{1}{A}\int_0^{\alpha_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial(R_1 q_n)}{\partial\alpha_1}\right]\partial\alpha_2 + \frac{1}{A}\int_0^{\alpha_2}\left\{\left\{\frac{1}{2\mu(1+\mu)}\right\}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial(R_1 q_n)}{\partial\alpha_1}\Big|_{\alpha_2=\pm\frac{l}{2}}\right] - \frac{1+\mu}{2\mu}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial(R_1 q_n)}{\partial\alpha_1}\right]\right\}\partial\alpha_2 - \frac{R_1}{\mu}\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_2}.$$

И после перегруппировки слагаемых получаем окончательное выражение для q_2:

$$q_2 = \frac{1}{A}\int_0^{\alpha_2}\left\{\frac{1}{2\mu(1+\mu)}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial(R_1 q_n)}{\partial\alpha_1}\Big|_{\alpha_2=\pm\frac{l}{2}}\right] - \frac{1-\mu}{2\mu}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial(R_1 q_n)}{\partial\alpha_1}\right]\right\} - \frac{R_1}{\mu}\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_2}.$$

Присоединяя полученное выражение для q_2 к выражению (9) для q_1,

запишем искомое соотношение между компонентами поверхностной нагрузки, при которых свод будет находиться в безмоментном напряженном состоянии, имеющем две плоскости симметрии.

$$q_1 = \frac{1}{A}\left\{\frac{1}{2\mu(1+\mu)}\frac{\partial(R_1 q_n)}{\partial\alpha_1}\Big|_{\alpha_2=\pm\frac{l}{2}} - \frac{1}{2(1+\mu)}\left[\frac{1}{\mu}+(2+\mu)\right]\frac{\partial(R_1 q_n)}{\partial\alpha_1}\right\};$$

$$q_2 = \frac{1}{A}\int_0^{\alpha_2}\left\{\frac{1}{2\mu(1+\mu)}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial(R_1 q_n)}{\partial\alpha_1}\Big|_{\alpha_2=\pm\frac{l}{2}}\right]\right.$$
$$\left. - \frac{1-\mu}{2\mu}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial(R_1 q_n)}{\partial\alpha_1}\right]\right\} - \frac{R_1}{\mu}\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_2}. \qquad (10)$$

Система уравнений (10) содержит три неизвестных ($q_1, q_2,\ q_n$), из которых как угодно можно распоряжаться одним из неизвестных и по уравнениям (10) находить ему в соответствие два других неизвестных. Так как $q_1\ и\ q_2$ явно выражаются через q_n, то удобным предоставляется задание компоненты q_n, хотя это и не обязательно. Любопытно сравнение безмоментной работы параболического свода с аркой того же очертания. Параболическая арка при определенном способе ее опирания работает безмоментно при действии на нее нагрузки, равномерно распределенной к горизонтальной проекции арки. Такая же нагрузка, действующая на свод, его безмоментной работе, в общем-то, не способствует. Здесь сказывается влияние поперечной деформации вдоль свода, которой у арки пренебрегают. Если же считать $\mu = 0$, то нагрузка будет удовлетворять и безмоментной работе свода. Доказательство этого факта здесь опускаем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978.-360с.
2. Литвинов В.В., Кулинич И.И., Соотношения между компонентами поверхностной нагрузки в оболочках вращения при безмоментном их состоянии. Инженерный вестник Дона, № 3, 2012.
3. Огибалов П.М., Колтунов М.А.Оболочки и пластины. М., Изд-во МГУ, 1969.