

**Маяцкая Ирина Александровна**

Mayatskaya Irina A.

Доцент/Dozent

ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный  
строительный университет»

Federal state budgetary educational institution of higher  
professional education “Rostov state University of construction”

E –mail: irina.mayatskaya@mail.ru

**Краснобаев Игорь Алексеевич**

Krasnobaev Igor A.

Профессор/Professor

ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный  
строительный университет»

Federal state budgetary educational institution of higher  
professional education “Rostov state University of construction”

**Стрельников Григорий Петрович**

Strelnikov Gregory P.

Доцент/Dozent

ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный  
строительный университет»

Federal state budgetary educational institution of higher  
professional education “Rostov state University of construction”

## **Математическое моделирование растительных материалов**

### Mathematical modeling of plant materials

**Аннотация:** Аналитическая интерпретация моделей растительных материалов строилась на основе различных математических методов. Приведена классификация этих методов, применяемых при построении моделей листостебельных структур, семян, плодов, листьев, корней и моделей, описывающих вьющиеся или ползучие растения. В этом случае использовались некоторые разделы аналитической и фрактальной геометрии, а также теории графов. Приведены примеры построения моделей.

**The Abstract:** Analytical interpretation of models of plant materials were based on different mathematical methods. A classification of the methods used to construct models of leafy structures, seeds, fruits, leaves, roots, and models describing climbing or creeping plants. In this case, some partitions analysis and fractal geometry, and graph theory. The examples of the models.

**Ключевые слова:** Модель, растительный объект, математические методы

**Key words:** The model plant object, mathematical methods

Математическое моделирование растительных материалов открывает перспективы компьютерного исследования технологических процессов, в которых участвуют растительные объекты или системы объектов, путем построения и корректировки их моделей с учетом реальной формы [1] – [4]. Для этого необходима математическая база по растениям со сложной структурой строения.

Перечислим факторы, которые определяют возможность аналитического подхода к моделированию растительных объектов:

1. степень изученности формы растительного объекта и наличие теоретической базы, достаточной для его модельного описания в соответствии с поставленной целью исследования;
2. приемлемость ограничений и допущений, содержащихся в исходных теоретических построениях, применительно к требованиям задачи;
3. специфические свойства растительных объектов, например, учет морфологических особенностей, степень сложности модели, удобство использования математических методов исследования и т.д.
4. возможность и удобство введения в математическую модель необходимой информации, получаемой опытным путем;
5. возможность экспериментального исследования исходного объекта и наличие компьютерной техники;
6. применение данных моделей при моделировании технологических операций, в которых участвуют растительные объекты.

Можно выделить четыре основных направления построения моделей растительных объектов.

Первое направление – анализ некоторой среды, образуемой большим количеством растений или отдельными их вегетативными частями. При этом среда рассматривается как сплошная с изотропными или анизотропными свойствами. Для этого направления характерны результаты исследований по моделям листостебельных материалов, подвергаемых прессованию и брикетированию.

Второе направление – построение моделей отдельных растений. Например, такая потребность возникла при теоретическом анализе съема плодов с деревьев при помощи вибрации. В результате были разработаны модели деревьев как объектов, подвергаемых механическим вибрациям.

Третье направление – моделирование отдельных вегетативных органов – стеблей, листьев, семян, плодов и т.д. Так, большое количество моделей стеблей было предложено при изучении процессов резания и обмолота. Разработке механико-математических моделей семян различных культур посвящена работа [2].

Четвертое направление – разработка моделей растительных микроструктур. Это направление развивается в связи с исследованиями процессов влажного фракционирования.

На основе изучения архитектоники растений можно получить как механико-математические, так и прочностные модели, но для выполнения расчетов необходимо знание геометрических характеристик объекта. При моделировании следует учитывать следующие принципы внутреннего строения стеблей:

1. принцип совместной работы структурных компонентов, обеспечивающих высокую надежность функционирования;
2. принцип армирования, характеризующий количество, место расположения и форму механической ткани;
3. принцип структурного построения.

Для стеблей некоторых растений характерна арматурная ткань, которая представляет собой каркас для укрепления волокон.

Аналитические интерпретации моделей растительных объектов можно строить на основе различных математических методов [5]. Приведена классификация этих методов, применяемых при построении листостебельных структур, семян и плодов, листовых пластинок, корней (табл.). В этом случае использовались разделы аналитической и фрактальной геометрии, а также теории графов.

Классификация математических методов,  
применяемых при моделировании растительных материалов

Таблица

Модели растительных объектов	Математические методы				
	Аналитическая геометрия		Фрактальная геометрия		Теория графов
	На плоскости	В пространстве	Система итеративных функций	Геометрические фракталы	
Модели семян и плодов	–	+	–	–	–
Модели листостебельных структур	+	+	+	+	+
Модели листовых пластинок	+	+	–	+	–
Модели корней	–	+	–	–	+

Разработана методика построения уравнений поверхности таких растительных объектов как семена, плоды листья. Для семян и плодов она заключается в выделении на поверхности исходного объекта геометрических подструктур (опорных поперечных и продольных сечений) с последующим их аналитическим описанием. Эти подструктуры закладываются в качестве основы в строящуюся аналитическую модель поверхности. А для построения модели поверхности листовой пластинки методика состоит в определении вида огибающего контура и нахождении той функции, которая бы лучше всего описывала контур поверхности листа внутри огибающего контура, учитывая сложную геометрическую форму. При построении формы листа удобно использовать уравнения, описывающие криволинейные многоугольники Безвиконой.

Рассмотрим пример построения моделей листостебельных структур с использованием системы итеративных функций – IFS (Iterated Functions Systems) [6], [7]. Этот метод, который может быть описан как последовательный итеративный расчет координат новых точек в пространстве:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= F_x(x_k, y_k) \\y_{k+1} &= F_y(x_k, y_k),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $F_x, F_y$  - функции преобразования координат, которые определяют форму фрактала.

Необходимо выбрать ту обобщенную аналитическую модель структуры этих растений, которая бы наиболее точно описывала его архитектуру. Для примера возьмем структуру растения, которая является симметричной относительно стебля, при этом ветви удалены от стебля на одинаковый угол (рис. 2). Для начала итераций необходимо задать стартовые координаты линии  $OO_1$ . Это будут опорные точки 1 и 2 (рис. 3). На каждом шаге итераций рассчитываются координаты других точек. Точка 3 является повернутой точкой 2 на угол  $\alpha$ , при этом центр поворота находится в опорной точке 1. Точки 6 и 7 – это точка 5, повернутая относительно точки 4 на углы  $\beta$  и  $-\beta$ .

Получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned}x_3 &= (x_2 - x_1) \cos \alpha - (y_2 - y_1) \sin \alpha + x_1 \\y_3 &= (x_2 - x_1) \sin \alpha + (y_2 - y_1) \cos \alpha + y_1, \\x_4 &= x_1(1 - k) + kx_3 & x_5 &= x_4(1 - k_1) + k_1x_3 \\y_4 &= y_1(1 - k) + ky_3, & y_5 &= y_4(1 - k_1) + k_1y_3, \\x_6 &= (x_5 - x_4) \cos \beta - (y_5 - y_4) \sin \beta + x_4 \\y_6 &= (x_5 - x_4) \sin \beta + (y_5 - y_4) \cos \beta + y_4, \\x_7 &= (x_5 - x_4) \cos \beta + (y_5 - y_4) \sin \beta + x_4 \\y_7 &= -(x_5 - x_4) \sin \beta + (y_5 - y_4) \cos \beta + y_4,\end{aligned}\tag{2}$$

где параметр  $k$  определяет соотношение длин отрезков  $O_1O_2$  и  $O_1C_1$ , а параметр  $k_1$  – соотношение длин отрезков 4-5 и 4-3,  $\beta = \alpha_1 = \alpha_2$ .

Аналогично получаем для других участков обобщенной структуры.

На рисунках 4, 5, 6 показаны различные модели, полученные этим методом. Параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k$  и  $k_1$  описывают вид фрактала в целом, и они являются постоянными величинами на протяжении всего итеративного процесса. В зависимости от номера итерации можно устанавливать толщину отрезка, цвет, форму поперечного сечения, а также форму листьев.

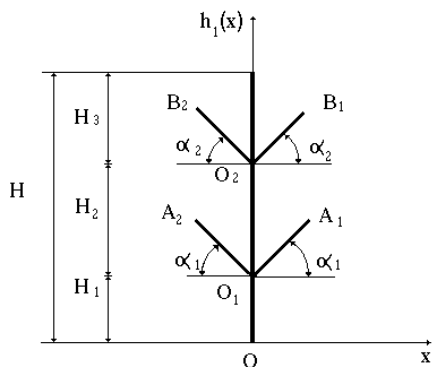


Рис. 2.

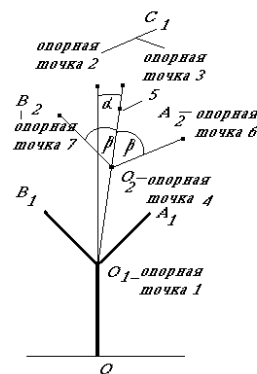
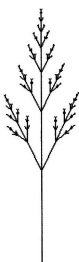


Рис. 3.

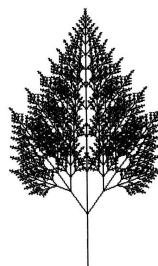
а).



б).



в).



г).

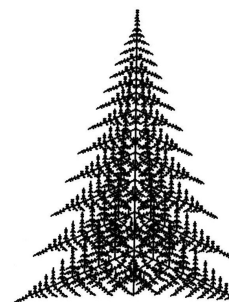


Рис. 4.

Модели различных растений, построенных с помощью системы итеративных функций.

а – злаковые ( $\alpha = 0^\circ; \beta = 15^\circ; k = 0,25; k_1 = 0,25$ );

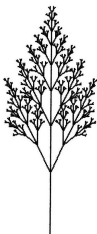
б – листостебельные ( $\alpha = 0^\circ; \beta = 25^\circ; k = 0,35; k_1 = 0,55$ );

в – деревья ( $\alpha = 0^\circ; \beta = 35^\circ; k = 0,20; k_1 = 0,65$ ),

г – деревья ( $\alpha = 0^\circ; \beta = 115^\circ; k = 0,15; k_1 = 0,55$ ).

Можно рассматривать и растение в целом как листостебельную структуру с учетом расположения плодов, семян и формы листьев, или как систему растений, например, стеблестой. Исследования в области моделирования стеблестоя сельскохозяйственных растений показали, что необходимо построение математических моделей растительных объектов более высокого уровня сложности: модели стеблестоя отдельных растений с учетом их вегетативных органов, например, стеблей и листьев.

а).  $\alpha = 0^\circ$



б).  $\alpha = 10^\circ$



в).  $\alpha = 30^\circ$



г).  $\alpha = 45^\circ$

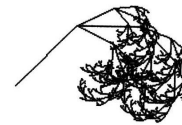


Рис. 5.

$$\beta = 25^\circ; k = 0,25; k_1 = 0,65$$

а).  $\alpha = 0^\circ$



б).  $\alpha = 10^\circ$



в).  $\alpha = 20^\circ$



г).  $\alpha = 40^\circ$



Рис. 6.

$$\beta = 15^\circ; k = 0,15; k_1 = 0,25$$

Уравнение, которое будет аналитически описывать модель стеблестоя с учетом формы сельскохозяйственных растений, будет иметь вид:

$$z = h(x, y) \sin^{2n}(\pi x / a) \sin^{2m}(\pi y / b), \quad (3)$$

где  $a, b$  - расстояния между рядками;  $n, m$  - целые положительные числа,  $n \geq 10$ ,  $m \geq 10$ ;  $h(x, y)$  - функция, которая характеризует листостебельную структуру растения по высоте.

Это уравнение описывает модель в пространстве. На базе этого уравнения можно построить модель в плоскости  $Oxy$  или в плоскости  $Oyz$ :

$$z = h_1(x) \sin^{2n}(\pi x / a), \quad (4)$$

$$z = h_2(y) \sin^{2m}(\pi y / b), \quad (5)$$

где  $h_1(x)$ ,  $h_2(y)$  - функции, характеризующие форму растения в плоскостях  $Oxy$  и  $Oyz$ .

Система уравнений, описывающая листостебельную модель, показанную на рис. 7, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= 0, & 0 \leq h_1 \leq H, \\ h_1 &= x \operatorname{tg} \alpha_1 + H_1, & 0 \leq x \leq x_{A1} \\ h_2 &= -x \operatorname{tg} \alpha_2 + H_1 + H_2, & x_{B2} \leq x \leq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $H$  - высота растения,  $H = H_1 + H_2 + H_3$ ;  $x_{A1}$  - координата конца первой ветви;  $x_{B2}$  - координата конца второй ветви;  $x_{A1} = O_1A_1 \cos \alpha_1$ ;  $x_{B2} = O_2A_2 \cos \alpha_2$ .

Если же модель симметрична относительно оси  $Oz$  (рис. 8). То система уравнений (6) преобразуется в следующую систему:

$$\begin{aligned} x &= 0, & 0 \leq h_1 \leq H, \\ h_1 &= |x| \operatorname{tg} \alpha_1 + H_1, & x_{A2} \leq x \leq x_{A1} \\ h_2 &= |x| \operatorname{tg} \alpha_2 + H_1 + H_2, & x_{B2} \leq x \leq x_{B1}, \end{aligned} \quad (7)$$

Если же растение обладает свойством самоподобной фигуры, то систему уравнений (6) необходимо составить для каждого отрезка:  $OO_1, O_1O_2, O_1A_1, O_2B_2, O_2C$ . В результате можно получить систему из 15 уравнений, которая описывает контур более сложной листостебельной структуры, при этом надо учитывать особенности геометрии растительного объекта.

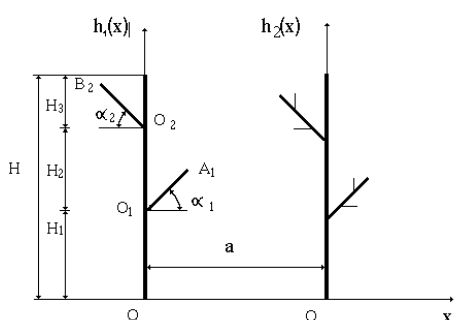


Рис. 7

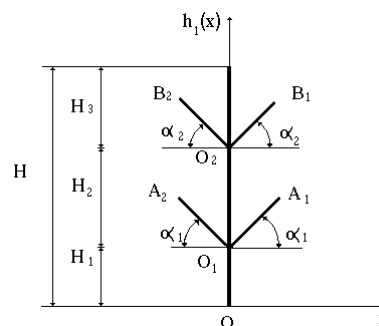


Рис. 8

Используя данную методику построения модели стеблестоя с учетом листостебельной структуры сельскохозяйственных растений, можно построить модель для конкретных растений. При этом в качестве функций, входящих в структуру систем уравнений (6) и (7), можно выбирать те, которые лучше всего описывают особенности формы. Например, можно выполнить аппроксимацию параболлами или показательными функциями вместо прямых линий.

Полученные модели могут быть применены при расчете рабочих органов сельхозмашин, которые выполняют такие технологические операции как кошение, очесывание и т.п.

Результаты также могут быть использованы в компьютерном моделировании технологических процессов, выполняемых сельскохозяйственными машинами, что позволит уменьшить объем трудоемких натуральных экспериментов.

Изучая закономерности строения растительных объектов, можно решить и проблему совершенствования композитных конструкций путем использования принципов строения биосистем. Это направление позволит внедрить в практику проектирования конструкции особенности строения растений, которые наиболее приспособлены к различным механическим воздействиям.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Мир, 1982.
2. Маяцкая И.А. Разработка механико-математических моделей семян сельскохозяйственных культур, убираемых зернокомбайнами. Диссертация на соискание ученой степени к. т. н., Ростов-на-Дону, 2000. – 189 с.
3. Раздорский В.Ф. Архитектоника растений. – М.: Советская наука, 1955.
4. Математическое моделирование./ Дж. Эндрюс, Р. Мак – Лоун. – М.: Мир, 1979.
5. Владимирский Б.М., Горстко А. Б., Ерусалимский Я. М. Математика. Общий курс. – СПб.: Лань, 2002.
6. Порев В.Н. Компьютерная графика. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
7. Павловская Т.А. С/С++. Программирование на языке высокого уровня. – СПб.: Питер, 2002.