Маяцкая Ирина Александровна
Mayatskaya Irina A.
Доцент/Dozent
ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный строительный университет»
Federal state budgetary educational institution of higher professional education “Rostov state University of construction”
E –mail: irina.mayatskaya@mail.ru

Краснобаев Игорь Алексеевич
Krasnobaev Igor A.
Профессор/Professor
ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный строительный университет»
Federal state budgetary educational institution of higher professional education “Rostov state University of construction”

Моделирование листостебельных материалов

Modeling of plant materials

Аннотация: Разработаны модели структуры листостебельных растений. Аналитические интерпретации моделей растительных объектов строились на базе систем уравнений, описывающих геометрию основных вегетативных органов: стебель, ветки первого и второго порядков ветвления. Построены модели более высокого уровня сложности по сравнению с используемыми в настоящее время. Результаты могут быть использованы в компьютерном моделировании технологических процессов, что позволит уменьшить объем трудоемких натурных экспериментов.

The Abstract: The models of the structure of leafy plants. Analytical interpretation of models of plant facilities were built on the basis of systems of equations describing the geometry of the main vegetative organs: stem, branches, first and second order of branching. Models of higher level of complexity than those used at present. Results can be used in computer modeling processes, which will reduce the amount of labor-intensive field experiments.

Ключевые слова: Модель, растительный объект, стебель, аналитическая геометрия.

Keywords: The model plant object, stem, analytic geometry.

***

Исследования в области построения моделей технологических процессов показали, что необходимо построение математических моделей растительных объектов более высокого уровня сложности. Для компьютерного моделирования определенных технологических процессов, в которых участвуют сельскохозяйственные материалы необходимо построить модель

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

этого объекта [1] – [4]. Это дает возможность построить теоретическую модель рассматриваемого процесса в виде совокупности системы уравнений. Анализ получаемых результатов может дать оценку качества реализации данного процесса. Для построения моделей можно использовать методы аналитической геометрии [5].

Листостебельные растения представляет собой растительные объекты с различной скелетной структурой и с различными типами ветвления. На рис. 1 представлены различные типы структуры моделей листостебельных материалов, где 1 – ось ветвления 1-го порядка ветвления, 2 – ось 2-го порядка ветвления и 3 – ось 3-го порядка ветвления.

Но для сельскохозяйственных растений характерны и другие структурные модели: с ветвистой структурой от начала стебля (рис. 2) и со «спрямленной» структурой (рис. 3).

Рассмотрим аналитические интерпретации моделей растительных объектов.

а). б). в).

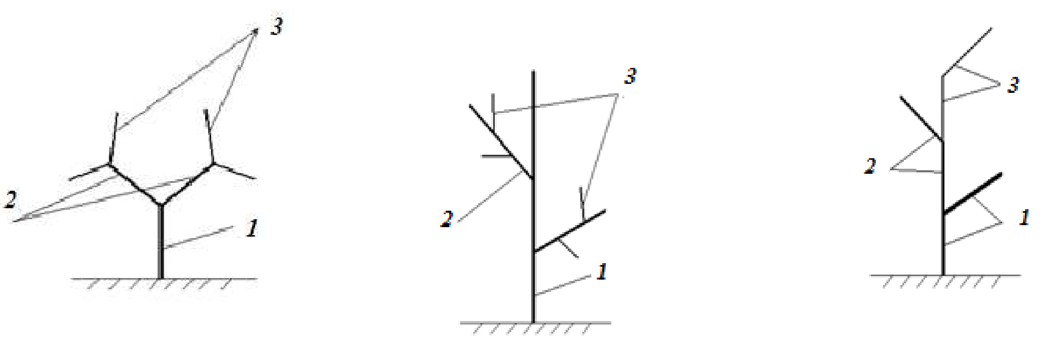

Рис. 1.
Типы ветвления побегов.
а — дихотомическое, б — моноподиальное, в — симподиальное

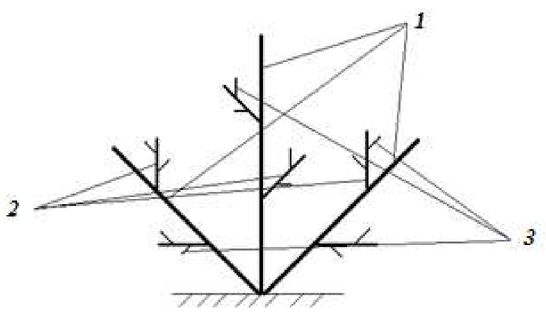

Рис. 2.
Модель с ветвистой структурой
от начала стебля.

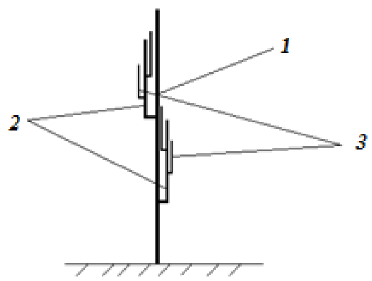

Рис. 3.
Модель со «спрямленной» структурой.

При построении скелетной структуры листостебельных растений используется координатный метод. Рассматривается плоская модель растительного объекта. Модель принимается в виде плоской кривой, включающей прямой стебель, который представляет собой ось 1-го

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11⁰⁰ – до 18⁰⁰)
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

порядка ветвления, и отходящие от него ветки 2-ой и 3-ей осей ветвления. Обычно ось 1-го порядка ветвления представляет собой прямой вертикальный стебель. Ветки могут быть аппроксимированы прямыми или кривыми 2-го порядка, например, параболами. Такую плоскую модель листостебельных растений можно описать следующей системой уравнений:

$$x = 0; \qquad 0 \le y \le \mathrm{H} \tag{1}$$

$$y = f_i(x); \qquad 0 \le x \le x_{\mathrm{B}i} \tag{2}$$

$$y = f_{ij}(x); \qquad x_{\mathrm{Aij}} \le x \le x_{\mathrm{Bij}}, \tag{3}$$

где (1) - уравнение стебля, (2) - уравнение ветвей первого порядка ветвления и (3) - уравнение ветвей второго порядка ветвления.

Рассмотрим модель листостебельной культуры с прямолинейными осями ветвления, представленную на рис. 4.

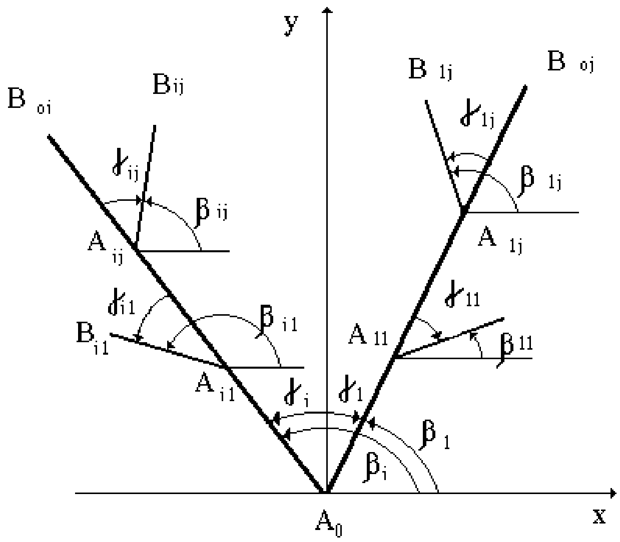

Рис. 4.

Структурная плоская модель листостебельного материала с прямолинейными осями ветвления

Приняты следующие обозначения для i -ой ветви оси 1-го порядка ветвления: угол $в_1$ – угол наклона отрезка прямой $\mathrm{A_OB_{O1}}$, угол $в_\mathrm{i}$ – угол наклона отрезка прямой $\mathrm{A_OB_{Oi}}$, l_i – длина i -ой ветви (рис. 5). Уравнение для i-ой ветви оси 1-го порядка ветвления будет иметь вид:

$$y = x\mathrm{tg}в_i; \qquad 0 \le x \le l_i \cos в_i \,, \tag{4}$$

где $в_i = \dfrac{р}{2} + г_i$, где $г_i$ - угол между i ветви 1-ой оси ветвления и осью $A_O y$. Угол положительный, если он направлен против часовой стрелки.

Рассмотрим j ветвь 2-ой оси ветвления к i ветви 1-ой оси ветвления (рис. 6). Угол для этой ветви определяется по формуле

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11⁰⁰ – до 18⁰⁰)
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

$$\beta_{ij} = \beta_i + \gamma_{ij}, \tag{5}$$

где γ_{ij} - угол между j ветви 2-ой оси ветвления и прямой $\mathrm{A_O B_{Oi}}$.

Координаты точки $A_{ij}(x_{Aij}, y_{Aij})$, являющейся началом j ветви, равны:

$$x_{Aij} = l_{ij} \cos \beta_i;$$

$$y_{Aij} = l_{ij} \sin \beta_i,$$

где l_{ij} - длина отрезка $A_O A_{ij}$.

Уравнение для j -ой ветви оси 2-го порядка ветвления будет иметь вид:

$$y = x\mathrm{tg}\beta_{ij} + y_{Aij} - x_{Aij}\mathrm{tg}\beta_{ij} \quad \text{при} \quad x_{\mathrm{Aij}} \le x \le x_{\mathrm{Bij}} \tag{6}$$

$$\text{или} \qquad y = x\mathrm{tg}\beta_{ij} + l_{ij} \sin \beta_{\mathrm{i}} - l_{ij} \cos\beta_i \mathrm{tg}\beta_{ij}. \tag{7}$$

Рассмотрим k ветвь 3-ей оси ветвления на j ветви оси 2-го порядка ветвления, находящейся на i-ой ветви 1-ой оси ветвления (рис. 7). Угол между k ветвь 3-ей оси ветвления и осью $A_O x$ равен

$$\beta_{ijk} = \beta_{ij} + \gamma_{ijk}, \tag{8}$$

где γ_{ijk} - угол между j ветви 2-ой оси ветвления и прямой $\mathrm{A_{ij} B_{ij}}$.

Уравнение для рассматриваемой ветви будет иметь следующий вид:

$$y = x\mathrm{tg}\beta_{ijk} + y_{C\,ijk} - x_{C\,ijk}\mathrm{tg}\beta_{ijk}, \tag{9}$$

где $x_{C\,ijk}$ и $y_{C\,ijk}$ - координаты точки C_{ijk} и они равны

$$x_{C\,ij} = x_{A\,ij} + l_{ijk} \cos\beta_{ji} = l_{ij} \cos\beta_{\mathrm{i}} + l_{ijk} \cos\beta_{ij}; \tag{10}$$

$$y_{C\,ij} = y_{A\,ij} + l_{ijk} \sin\beta_{ji} = l_{ij} \sin\beta_i + l_{ijk} \sin\beta_{ij}, \tag{11}$$

где l_{ijk} - длина отрезка $A_{ij} C_{ijk}$.

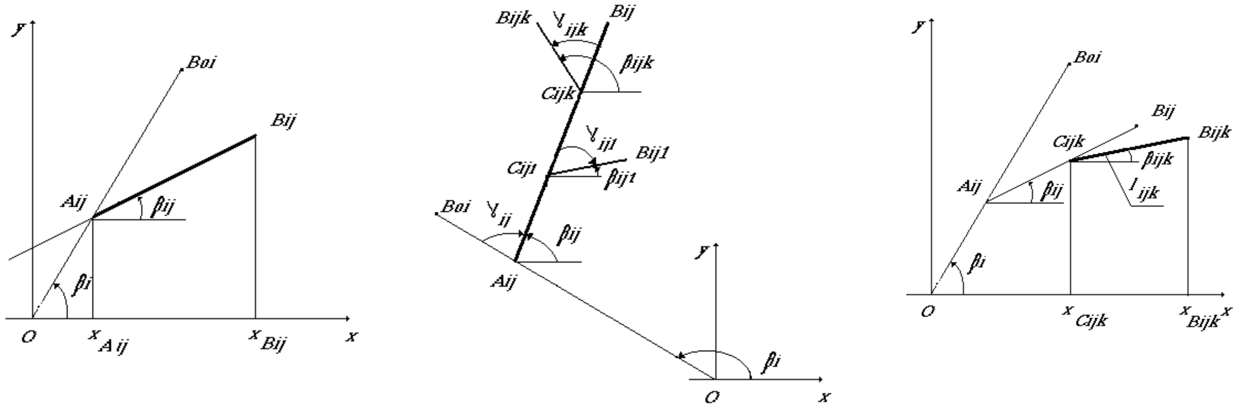

Рис. 5.
Схема плоской модели для i -ой ветви оси 1-го порядка ветвления

Рис. 6.
Схема плоской модели для j -ой ветви оси 2-го порядка ветвления

Рис. 7.
Схема плоской модели для k- ой ветви оси 3-го порядка ветвления

В результате получаем

$$y = x\text{tgв}_{ijk} + l_{ij}\sin\text{в}_i + l_{ijk}\sin\text{в}_{ij} - (l_{ij}\cos\text{в}_i + l_{ijk}\cos\text{в}_{ij})\text{tgв}_{ijk}\ , \qquad (12)$$

при $x_{\text{Cijk}} \le x \le x_{\text{Bijk}}$.

Ветви ветвления могут быть разной формы: прямолинейные и криволинейные оси ветвления, в виде парабол. Рассмотрим плоскую модель листостебельной культуры с моноподиальным типом ветвления, для которой 1-я ось ветвления представляет собой прямой вертикальный стебель высотой H и отходящие от него листья, которые являются 2-ой осью ветвления. Такая плоская модель описывается следующей системой уравнений:

$$x = 0; \qquad 0 \le y \le \text{H} \qquad (13)$$

$$y = f_j(x); \qquad 0 \le x \le x_{\text{B}j} \qquad (14)$$

Уравнение (14) может изменяться во времени с учетом роста растения.

Рассмотрим шесть фаз развития, строя для каждой фазы свою модель, учитывающую морфологические особенности рассматриваемой культуры. В ранней стадии развития структура такой модели может быть представлена схемой приведенной на рис.8. Листья описываются участками парабол с вершинами соответственно в точках D_{1j} и ветви парабол направлены вверх. Обозначим: A_{1j} - начало *j*-го листа, B_{1j} - конец *j*-го листа, $A_0B_{01} = H_1$ - высота стебля в первой фазе развития, длина дуги $\cup A_{1j}B_{1j}$ равна l_{1j}.

Уравнение для *j*-го листа имеет вид

$$y = a_{2j}x^2 + a_{1j}x + a_{0j}\,, \qquad (15)$$

где a_{2j}, a_{1j}, a_{0j} - эмпирические коэффициенты; $a_{0j} = y_{A1j}$ - расстояние от точки A_0 до точки A_{1j} начала *j*-го листа.

Для определения a_{1j} и a_{2j} нужно подставить координаты точек $A_{1j}(x_{A1j}, y_{A1j})$ и $B_{1j}(x_{B1j}, y_{B1j})$ в уравнение (13):

$$y_{A1j} = a_{2j}x_{A1j}^2 + a_{1j}x_{A1j} + y_{A1j}\,,$$

$$y_{B1j} = a_{2j}x_{B1j}^2 + a_{1j}x_{B1j} + y_{A1j}\,. \qquad (16)$$

В результате получаем

$$a_{1j} = -a_{2j}x_{A1j}\,,$$

$$a_{2j} = \frac{y_{B1j} - y_{A1j}}{x_{B1j}(x_{B1j} - x_{A1j})}. \qquad (17)$$

Используя найденные зависимости, представим исследуемую модель следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} &x = 0; && 0 \le y \le \mathrm{H}_1 \\ &y = a_{2j}x^2 + a_{1j}x + a_{0j}; && 0 \le x \le x_{\mathrm{B}1j} \end{aligned} \qquad (18)$$

с учетом зависимостей (17).

В второй фазе развития структура изменяется (рис. 9). Листья направлены прямолинейно и данная модель описываются уравнениями

$$\begin{aligned} &x = 0; && 0 \le y \le \mathrm{H}_2 \\ &y = x\mathrm{tg}в_j; && 0 \le x \le l_{2j}\cos в_j, \end{aligned} \qquad (19)$$

где $в_j$ - угол между *j*- ым листом и осью A_0x.

При этом нужно учитывать, что геометрические параметры тоже изменяются: $A_0B_{02} = H_2$ - высота стебля во второй фазе развития, длина $A_{2j}B_{2j} = l_{2j}$, $H_2 > H_1$, $y_{A2j} > y_{A1j}$, $l_{2j} > l_{1j}$.

Отметим, что на третьей и четвертой фазах роста растения листья могут быть аппроксимированы параболами, ветви которой направлены вниз. Листья без перегиба аппроксимируются частью параболы без вершины, а листья с перегибом – частью параболы с вершиной D_{4j}.

Уравнение для *j*-го листа имеет вид:

для листьев без перегиба (рис. 10) -

$$y = -b_{3j}(x - x_{D3j})^2 + y_{D3j}, \qquad (20)$$

для листьев с перегибом (рис. 11) -

$$y = -b_{4j}(x - x_{D4j})^2 + y_{D4j}, \qquad (21)$$

а уравнение стебля остается прежним, только изменяется геометрические параметры: высота стебля и длина листьев.

Определим параметры b_{3j} и b_{4j}:

$$b_{3j} = \frac{y_{B3j} - y_{A3j}}{x^2_{B3j}} \quad \text{и} \quad b_{4j} = \frac{y_{D4j} - y_{A4j}}{x^2_{D4j}} \qquad (22)$$

На пятой и шестой фазах развития растения рост прекращается и происходит лишь изменение формы листьев – они начинают поджиматься к стеблю, т.е. структура листостебельных растений «спрямляется». На рис. 12 показана структурная схема для листьев с перегибом, а на рис. 13 – для листьев без перегиба.

Уравнение для спрямленного *j*-го листа с перегибом будет иметь следующий вид

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11[00] – до 18[00])
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

$$y = -d_{5j}(x - x_{D5j})^{2n} + y_{D5j}\,, \qquad (23)$$

где n – натуральное число, увеличивая которое можно достичь любой степени прилегания листа к стеблю.

Эмпирический параметр для спрямленной структуры для j-го листа рассчитывается по формуле

$$d_{5j} = \frac{y_{D5j} - y_{A5j}}{x_{D5j}^{2n}}\,. \qquad (24)$$

И уравнение для спрямленного j-го листа без перегиба и вплотную прижатого к стеблю описывается функцией

$$x = 0; \qquad y_{A6j} \geq y \geq y_{B6j}\,. \qquad (25)$$

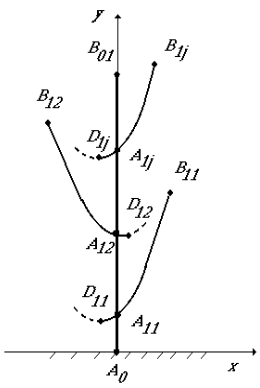

Рис. 8.
Листостебельная структура с криволинейными осями ветвления

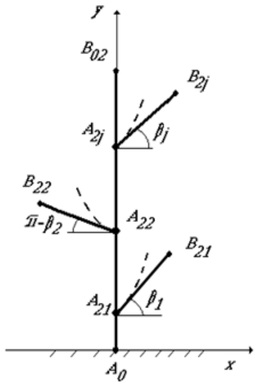

Рис. 9.
Модель с прямолинейными осями ветвления

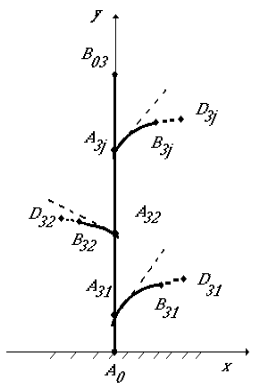

Рис. 10.
Криволинейные оси ветвления в виде парабол с вершинами D_{3j}

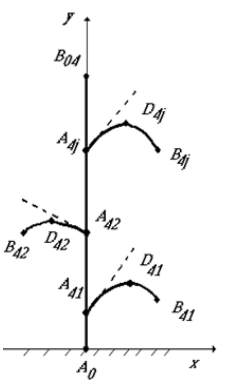

Рис. 11.
Криволинейные оси ветвления в виде парабол с вершинами D_{4j}.

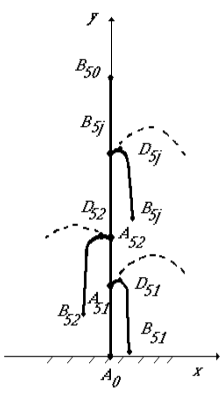

Рис. 12.
Спрямленная модель с криволинейными осями ветвления.

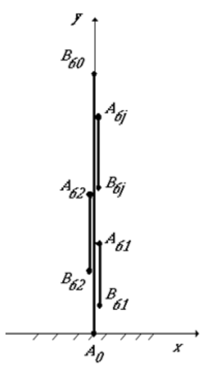

Рис. 13.
Спрямленная модель с прямолинейными осями ветвления.

Наличие современных ЭВМ позволяет строить и использовать данные обобщенные структуры с учетом всех основных вегетативных органов (стеблей, ветвей и листьев) [6], [7]. Полученные модели могут быть применены при расчете рабочих органов сельхозмашин. Исследования в области построения моделей растений показали, что необходимо построение математических моделей растительных объектов более высокого уровня сложности. Результаты могут быть использованы в компьютерном моделировании технологических процессов, выполняемых сельскохозяйственными машинами, что позволит уменьшить объем трудоемких натурных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Мир, 1982.
2. Маяцкая И.А. Разработка механико-математических моделей семян сельскохозяйственных культур, убираемых зернокомбайнами. Диссертация на соискание ученой степени к. т. н., Ростов-на-Дону, 2000. – 189 с.
3. Раздорский В.Ф. Архитектоника растений. – М.: Советская наука, 1955.
4. Математическое моделирование./ Дж. Эндрюс, Р. Мак – Лоун. – М.: Мир, 1979.
5. Владимирский Б.М., Горстко А. Б., Ерусалимский Я. М. Математика. Общий курс. – СПб.: Лань, 2002.
6. Порев В.Н. Компьютерная графика. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
7. Павловская Т.А. С/С++. Программирование на языке высокого уровня. – СПб.: Питер, 2002.