

Маяцкая Ирина Александровна
Mayatskaya Irina A.
Доцент/Dozent
ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный
строительный университет»
Federal state budgetary educational institution of higher
professional education “Rostov state University of construction”
E –mail: irina.mayatskaya@mail.ru

Краснобаев Игорь Алексеевич
Krasnobaev Igor A.
Профессор/Professor
ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный
строительный университет»
Federal state budgetary educational institution of higher
professional education “Rostov state University of construction”

Пространственные модели листостебельных материалов

Spatial models of the plant material

Аннотация: Разработаны аналитические пространственные модели листостебельных материалов, которые строились на базе систем уравнений, описывающих геометрию основных вегетативных органов растений: стеблей, ветвей первого и второго порядка ветвления с ориентацией относительно стебля с прямолинейными и криволинейными осями ветвления.

The Abstract: An analytical models of the plant materials that are based on the systems of equations that describe the geometry of the main vegetative organs of plants: the stems, branches, first and second order with respect to the orientation of the branching stem with straight and curved axes branching.

Ключевые слова: Модель, растительный объект, стебель, аналитическая геометрия

Keywords: The model plant object, stem, analytic geometry

Листостебельный материал подвергаются различному воздействию при его переработке. Разработаны пространственные модели структуры листостебельных растений на базе плоских моделей. Аналитические интерпретации моделей растительных объектов можно построить с помощью систем уравнений, описывающих геометрию основных вегетативных органов: стебель, ветки первого и второго порядков ветвления с ориентацией относительно стебля или ветви предыдущего порядка.

Для построения пространственной модели растительного объекта нужно выбрать структуру плоской модели, которая близка к описываемому растению с учетом типов ветвле-

ния побегов и выбора кривых, характеризующих оси ветвления (кривые или прямолинейные образующие). Эту модель можно назвать базовой моделью (рис. 1).

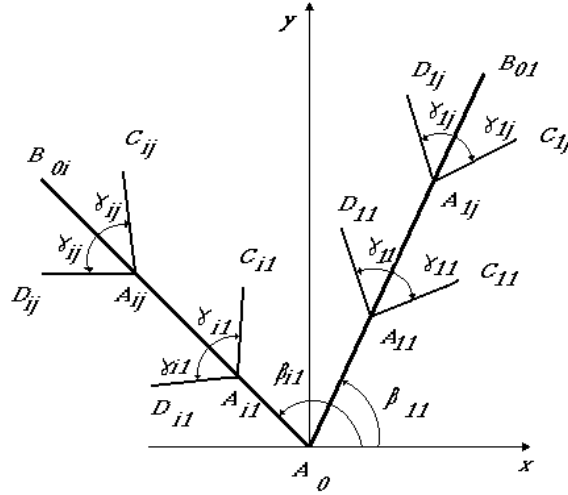


Рис. 1.
Базовая плоская модель листо-стебельной структуры.

Плоская модель листостебельных растений описывается системой уравнений:

$$y = xtg\beta_i; \quad 0 \leq x \leq l_i \cos \beta_i \quad (1)$$

$$y = f_{ij}(x); \quad x_{Dij} \leq x \leq x_{Cij}, \quad (2)$$

где l_i – длина отрезка OB_i .

Плоскость, в которой лежит i -ая ветвь (стебель), пересекает ось A_0y и повернута на угол θ_{0i} в плоскости A_0xz (рис. 2). Тогда уравнения (1) – (2) примут вид:

$$y = (x \cos \theta_{0i} - z \sin \theta_{0i}) tg \beta_i; \quad 0 \leq x \leq l_i \cos \beta_i \cos \theta_{0i};$$

$$0 \leq z \leq l_i \cos \beta_i \sin \theta_{0i}; \quad (1)$$

$$y = f_{ij}(x, z); \quad x_{Dij} \leq x \leq x_{Cij};$$

$$z_{Dij} \leq z \leq z_{Cij}. \quad (2)$$

Рассмотрим j -ую ветвь листо-стебельной структуры, которая тоже поворачивается относительно оси, проходящей через точки B_{0i} и A_{ij} в плоскости, перпендикулярной этой оси на угол θ_{ij} (рис. 3).

И тогда при пространственной ориентации j -ой ветви первой ветви ветвления с ориентацией относительно стебля необходимо учитывать два угла – θ_{0i} и θ_{ij} .

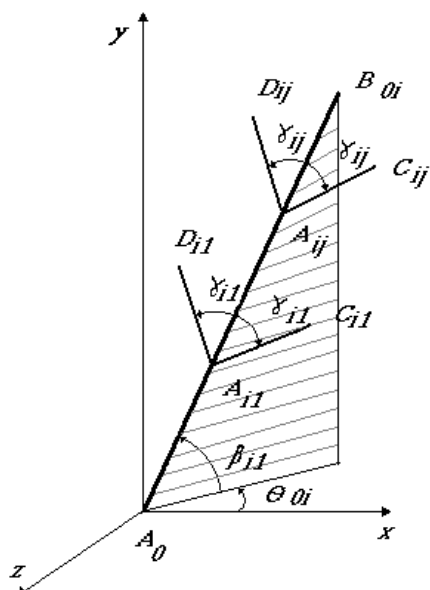


Рис. 2.

Схема пространственной ориентации плоскости i -ой ветви листостебельной структуры.

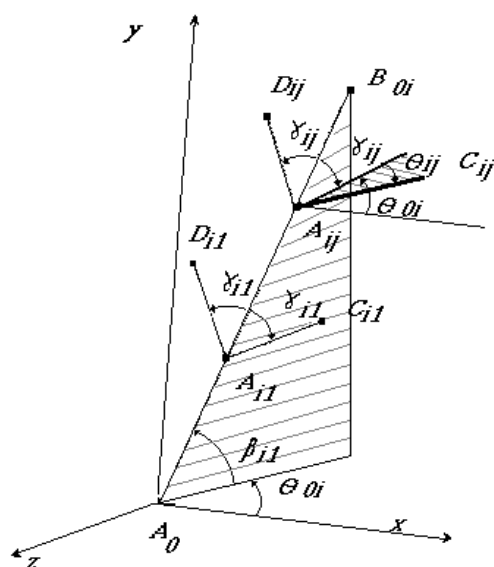


Рис. 3.

О пространственной ориентации j -ой ветви листостебельной структуры.

Рассмотрим поворот прямой A_0B_{0i} вокруг оси z на угол γ_i и сдвиг по прямой A_0B_{0i} в точку $A_{ij}(x_{Aij}; y_{Aij})$ и получаем уравнение

$$x \sin \gamma_i + y \cos \gamma_i + y_{Aij} = f_{ij}(x \cos \gamma_i - y \sin \gamma_i + x_{Aij}) \quad (3)$$

и с учетом поворота вокруг оси A_0y на угол θ_{0i} уравнение преобразуется в следующее: $(x \cos \theta_{0i} - z \sin \theta_{0i}) \sin \gamma_i + y \cos \gamma_i + y_{Aij} = f_{ij}((x \cos \theta_{0i} - z \sin \theta_{0i}) \cos \gamma_i - y \sin \gamma_i + x_{Aij})$. (4)

И затем поворачиваем ветвь $A_{ij}C_{ij}$ на угол θ_{ij} относительно прямой A_0B_{0i} :

$$\begin{aligned} & x \cos \theta_{ij} \sin \gamma_i + y \cos \gamma_i \cos \theta_{ij} + y_{Aij} - z \sin \theta_{ij} (\sin \gamma_i + \cos \gamma_i) = \\ & = f_{ij}(x \cos \theta_{ij} \cos \gamma_i - y \sin \gamma_i \cos \theta_{ij} + x_{Aij} + z \sin \theta_{ij} (\sin \gamma_i - \cos \gamma_i)), \\ & x_{Aij} \leq x \leq x_{Cij}; \quad y_{Aij} \leq y \leq y_{Cij}; \quad z_{Aij} \leq z \leq z_{Cij}, \end{aligned} \quad (5)$$

причем длина ветви равна $l_{ij} = \sqrt{(x_{Cij} - x_{Aij})^2 + (y_{Cij} - y_{Aij})^2 + (z_{Cij} - z_{Aij})^2}$.

Можно рассмотреть листостебельную структуру с криволинейными осями вквления (рис. 4 и 5).

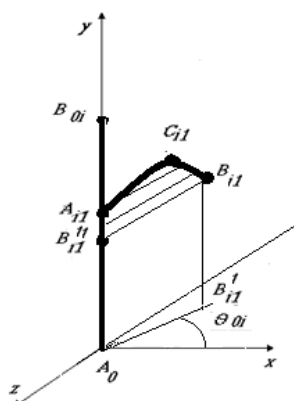


Рис. 4.

Схема пространственной ориентации плоскости i -ой ветви листостебельной структуры с криволинейной осью вевления.

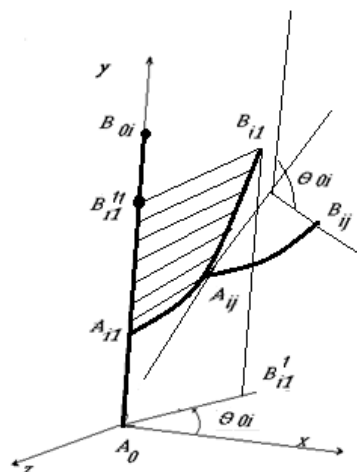


Рис. 5.

О пространственной ориентации j -ой ветви листостебельной структуры с криволинейной осью вевления.

Если же рассматриваем в пространстве k -ую ветвь второй ветви ветвления, то нужно добавить к параметрам, описывающим плоскую модель, три угла – θ_{0i} , θ_{ij} и θ_{ijk} .

Для компьютерного моделирования ползучих или вьющихся растений используются сети [1]. Для построения листостебельной структуры, описывающей пространственную модель этих растений (рис. 6) лучше использовать матрицу узлов. Положение этих узлов в пространстве определяется координатами x_k, y_k, z_k .

Матрицы, изображающие данную аналитическую структуру вьющегося листостебельного растения, имеют вид:

узлы	a	b	c	d	e	f	g
a	0	1	0	0	0	0	0
b	0	0	1	1	0	0	0
c	0	0	0	0	1	1	0
d	0	0	0	0	0	0	1
e	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0

узлы	x	y	z
a	0	0	0
b	0	y_b	0
c	x_c	y_c	z_c
d	x_d	y_d	z_d
e	x_e	y_e	z_e
f	x_f	y_f	z_f
g	x_g	y_g	z_g

Узлы могут быть соединены прямыми или криволинейными отрезками.

Для построения пространственной модели ползучего растения (рис. 7) можно использовать сеть в плоскости xz и в каждом узле можно построить пространственную модель отдельного растения с помощью координатного метода, описанного выше, или методов фрак-

тальной геометрии, например, систем итеративных функций. При этом можно учитывать конкретные расстояния от одного узла до другого и геометрические параметры растений.

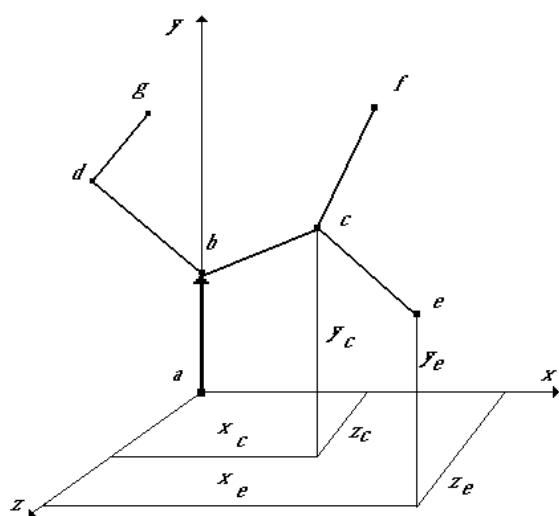


Рис. 6.

Схема пространственной модели
вьющейся структуры.

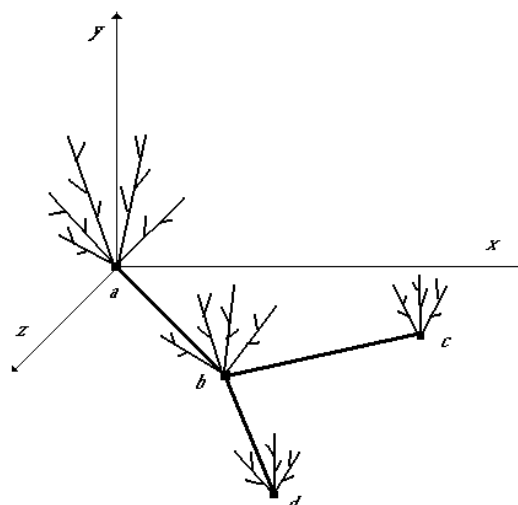


Рис. 7.

Схема пространственной модели
ползучей структуры.

Для построения листьев в пространственной модели листостебельной структуры нужно рассмотреть модель листа с ориентацией относительно p -ой ветки второго или третьего, а может быть и более высокого, порядка ветвления. Для этого нужно найти уравнение поверхности листовой пластинки, при этом можно учитывать и длину черешка листа.

Если уравнение листовой пластинки будет иметь вид $f(X, Y, Z) = 0$ в системе координат, связанной с листом на p -ой ветке, то, учитывая поворот на угол φ_p вокруг оси X , на угол ψ_p вокруг оси Y , на угол α_p вокруг оси Z , это уравнение преобразуется в $f(x, y, z) = 0$, при этом учитываем, что $A = T \cdot B$, где $A = (X, Y, Z)$ и $B = (x, y, z)$ – столбцы координат и T – матрица поворотов, равная $T = T_\varphi \cdot T_\psi \cdot T_\alpha$, где

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_p & -\sin \varphi_p \\ 0 & \sin \varphi_p & \cos \varphi_p \end{pmatrix}, \quad T_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi_p & 0 & -\sin \psi_p \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi_p & 0 & \cos \psi_p \end{pmatrix}, \quad T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha_p & -\sin \alpha_p & 0 \\ \sin \alpha_p & \cos \alpha_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Основными математическими методами при построении моделей растительных объектов являются методы аналитической и фрактальной геометрии, теории графов [1] – [4]. Выбор математических методов зависит от конкретного технологического процесса, поставленной цели исследования и возможностей программного обеспечения [5]. Для построения граф-модели растительного объекта применяются сети. Пример такого моделирования был показан выше. При построении скелетной структуры листостебельных растений всех типов ветвления используются матрицы ребер и узлов.

Преимущества представления сложных растительных структур и технологических процессов графами становится более ощутимыми в результате визуальной обработки графовых моделей. В зависимости от структуры растительного объекта элементы графа могут выражаться различными способами, например, в виде точек. Для ребер могут быть использованы отрезки прямых, ломаных линий или кривых. Граф может рисоваться на плоскости или в трехмерном пространстве. Он может изображаться целиком, частично, стягивать некоторые подграфы в вершины, которые могут раскрываться. Подграфами являются плоды, семена, колос, листья и другие вегетативные органы растения.

Для компьютерного моделирования определенных технологических процессов необходимо построить пространственную модель рабочего органа и пространственную модель растительного объекта, который участвует в данном технологическом процессе. Зная эти модели, можно смоделировать технологический процесс в виде совокупности достаточно сложной системы уравнений, решение которой и анализ получаемых результатов позволяет дать оценку качества реализации данного процесса, в котором участвуют листостебельные растения с ветвистой структурой с пространственной ориентацией ветвей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимирский Б.М., Горстко А. Б., Ерусалимский Я. М. Математика. Общий курс. – СПб.: Лань, 2002.
2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Мир, 1982.
3. Раздорский В.Ф. Архитектоника растений. – М.: Советская наука, 1955.
4. Математическое моделирование./ Дж. Эндрюс, Р. Мак – Лоун. – М.: Мир, 1979.
5. Порев В.Н. Компьютерная графика. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002.