Сайфутдинова Наталья Анатольевна,
Sayfutdinova Natalia Anatolievna,
Ростовский государственный строительный университет,
кафедра высшей математики;
Rostov State University of Civil Engineering,
cathedra of high mathematics;
Доцент/ Professor
E-mail: saifut25@mail.ru

Сумбатян Межлум Альбертович
Sumbatyan Meghlum Albertovich
Южный федеральный университет,
кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики
Southern Federal University,
cathedra of theoretical and computer hydroaerodynamics
Профессор/professor
E-mail: sumbat@math.rsu.ru

Моделирование оптимального распределения ресурсов в сообществе экономических агентов

Modeling of optimum distribution of resources in a community of economic agents

Аннотация: В данной работе предлагается математическая модель для описания оптимального распределения производственных факторов в сообществе нескольких предприятий или фирм. В работе показывается, что при управлении основными фондами и трудовыми ресурсами можно подобрать такое оптимальное распределение объёма капитала и объёма трудовых ресурсов между N предприятиями (экономическими агентами), при котором достигается максимальный экономический эффект, выражающийся наибольшим суммарным выпуском этой экономической системы. Для случая N=2 получено аналитическое выражение для максимального суммарного выпуска, подтверждающееся результатами численного эксперимента. Приведён пример такого распределения ресурсов, при котором этот максимальный эффект достигается. Для случая произвольного конечного N аналогичный результат получен с помощью метода математической индукции.

The Abstract: In the present work we propose a mathematical model to describe an optimal distribution of production factors in the community of several enterprises or firms. It is sown in the work that, controlling the capital and the labor force, it is possible to choose such an optimal distribution of the capital and labor force volumes, between N enterprises (economic agents), which provides a maximum economic effect which is to maximize the total output of this economic system. In the case N=2 there is obtained an analytical expression for the maximum aggregate output, which is confirmed by results of a numerical experiment. It is given an example of a distribution of resources, when this maximum effect can be achieved. In the case of arbitrary finite N analogous result is developed by induction.

Ключевые слова: оптимальное распределение ресурсов; управление основными фондами и трудовыми ресурсами; задача оптимизации с ограничениями в виде равенств и неравенств; распределение размера фирм

Keywords: optimal distribution of resources; management of fixed capital and manpower; problem of optimization with restrictions in the form of equalities and inequalities; firms size distribution

***

1. Краткий обзор результатов в рассматриваемой области.

В практическом аспекте тематика данной работы связана с классическим направлением, состоящим в исследовании распределения размера фирм (Firms Size Distribution) в малом, среднем и крупном бизнесе.

Распределение трудовых ресурсов по фирмам в развитых странах является открытой информацией. Начиная с 1960-х годов, общепринятой является аппроксимация этого распределения линейной функцией с отрицательным наклоном, называемой законом ЗИПФ (ZIPF’s law). По горизонтальной оси указывается размер фирм по числу занятых работников (Ранг), а по вертикальной оси – общее число занятых в фирмах данного размера (Размер). По США данная статистика описана, например, в [3,4]. Более современная статистика по США 1997-го года показывает, что эта кривая имеет локальное смещение в правую часть, что означает постепенную тенденцию к укрупнению производства. При этом примерно на 100 млн. занятых приходится около 4 млн. фирм, средний размер фирмы – 25 работников, а 80% всех занятых работают в фирмах с числом работников меньше 500. Такая нелинейная зависимость довольно точно аппроксимируется законом Вейбулла, при котором Размер в степени 0.35 линейно (с отрицательным наклоном кривой) зависит от логарифма Ранга. В отличие от фактора L, данные по объему капитала K не являются открытыми, и о распределении этого фактора можно судить лишь косвенно по объему выпускаемой продукции, эти данные имеются в открытых статистических сборниках.

В работе [5] исследуется эмпирическая зависимость продуктивности фирмы (т.е. отношение объема продаж к числу работников) в зависимости от размера фирмы – на примере Канады. Оказывается, что крупный бизнес примерно на 27% более продуктивен, чем малый. Отмечается, что при этом много малых фирм более продуктивны, чем средняя крупная фирма.

Агрегированная экономика сообщества из J фирм изучается в [6]. Производство в каждой из них описывается функцией Кобба-Дугласа, - в каждой со своими степенными показателями, как и в модели данной работы. Однако, в отличие от настоящей работы, авторы [4] не ставят задачу поиска максимума выпуска всей системы, а изучают изменение распределения размера фирм и их продуктивность во времени.

Исследование развития инфраструктуры на оптимальное распределение капитала представлено в [7]. Статистика распределения трудовых ресурсов по малым и средним фирмам за период 1982-1995 г.г., а также по различным штатам США исследуется в [8].

Оптимальное распределение капитала с учетом рисков исследуется в [9,1] статистическими методами. При этом используется несколько известных моделей для оценки рисков.

Автор работы [10] строят распределение фирм по размеру, а также оценку среднего размера фирмы, исходя из производственной функции Кобба-Дугласа для всех фирм с одинаковыми степенными показателями. Затем они оценивают разброс статистических данных по нескольким индустриальным странам по сравнению с построенной моделью.

В работе [11] на примере Голландии изучается влияние слияния и поглощения фирм на их распределение по размеру. С этой целью используются методы эконометрической теории.

С помощью вероятностных и стохастических методов авторы [12] получают распределение бизнеса по размеру и по объему выпуска. Показывается, что оба закона имеют нормальный характер распределения в логарифмическом масштабе. Данные закономерности подтверждаются статистикой по 8072 фирмам из 28 стран, а также согласуется с законом Парето.

В работе [2] рассматриваются вопросы размещения и регулирования малого и крупного бизнеса в России.

2. Постановка задачи и описание математической модели.

Пусть имеется некоторый объём капитала K_0 и трудовых ресурсов L_0, которые нужно распределить между N экономическими агентами, выделив каждому из них объём капитала K_i и трудовых ресурсов L_i . В безразмерном виде постановка задачи состоит в нахождении долей от величин K_0 и L_0, необходимых i-му агенту, тогда можно положить $K_0 =1$, $L_0 =1$. В итоге имеем:

$$\sum_{i=1}^{N} K_i = K_0, \qquad \sum_{i=1}^{N} L_i = L_0. \tag{1}$$

Будем считать, что i-ый экономический агент независим от других и его деятельность оценивается с помощью производственной функции типа Кобба-Дугласа (ПФ К-Д):

$$F_i = F_i(K_i, L_i) = K_i^{\alpha_i} \cdot L_i^{1-\alpha_i}. \tag{2}$$

Тогда суммарный выпуск продукции рассматриваемой экономической системы:

$$F = \sum_{i=1}^{N} F_i. \tag{3}$$

Таким образом, для каждого распределения объёма капитала и объёма трудовых ресурсов между N экономическими агентами, удовлетворяющего условиям (1), по формуле (3) получится своя величина F. Ясно, что чем выше суммарный выпуск, тем эффективнее работает система. Основная задача: найти такое распределение ресурсов K_i и L_i, при котором достигается оптимальный, а именно максимальный суммарный выпуск.

Таким образом, возникает следующая оптимизационная задача:

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

$$
\begin{cases}
\max\limits_{\{K_i, L_i\}_{i=1}^{N}} \sum\limits_{i=1}^{N} K_i^{\alpha_i} \cdot L_i^{1-\alpha_i} \\
\sum\limits_{i=1}^{N} K_i = 1 \\
\sum\limits_{i=1}^{N} L_i = 1
\end{cases}
\qquad (4)
$$

Заметим, что в случае предприятий с одинаковым технологическим уровнем (▪ $_i$=▪ , *i=1,…N*) можно получить простую оценку для суммарного выпуска, опирающуюся на известное неравенство Гёльдера:

$$F = \sum_{i=1}^{N} K_i^{\ \alpha} \cdot L_i^{1-\alpha} \le \left(\sum_{i=1}^{N} K_i \right)^{\alpha} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} L_i \right)^{1-\alpha} = K_0^{\alpha} \cdot L_0^{1-\alpha} = 1 \qquad (5)$$

Таким образом, получаем парадоксальный вывод: ни одно распределение средств между N идентичными экономическими агентами не даст положительного экономического эффекта, т.к. выпуск не будет превосходить 1. В то же время, очевидно, максимальное значение $F=1$ достигается, если положить $K_1=1$, $L_1=1$, $K_i=0$, $L_i=0$, $i=2,\dots,N$. Поэтому возникает основной вопрос: можно ли, распределяя ресурсы между предприятиями с различным технологическим уровнем (различными ▪ $_i$), получить суммарный выпуск, больший 1?

Заметим, что, поскольку для ПФ Кобба-Дугласа ▪ $_K$=▪ , всюду ниже в целях сокращения записи для коэффициентов эластичности по фактору капитал будем использовать обозначение ▪ , совпадающее с первым показателем степени в ПФ К-Д.

3. Оптимальное распределение ресурсов между экономическими агентами.

Рассмотрим пример распределения средств между двумя агентами, в котором поставленная задача управления имеет явное решение. Итак, пусть деятельность двух предприятий описывается следующими производственными функциями:

$$F_1 = X_1^{\ 0,25} \cdot Y_1^{\ 0,75}, \quad F_2 = X_2^{\ 0,5} \cdot Y_2^{\ 0,5} \qquad (6)$$

где X_1 - основные фонды 1-го предприятия, Y_1- трудовые ресурсы этого предприятия, а X_2 и Y_2 – аналогичные показатели для 2-го предприятия. Заметим, что ▪ $_1$=0,25; ▪ $_2$=0,5.

Тогда оптимизационная задача (4) принимает вид:

$$\max_{X_1, Y_1, X_2, Y_2} F = \max_{X_1, Y_1, X_2, Y_2} (F_1 + F_2) - ? \qquad (7a)$$

$$X_1 + X_2 = 1 \qquad (7b)$$

$$Y_1 + Y_2 = 1 \qquad (7c)$$

$$0 < X_i < 1,\ 0 < Y_i < 1,\ i = 1{,}2. \qquad (7d)$$

Из (7b), (7c) следует, что данная оптимизационная задача равносильна поиску максимума функции двух переменных:

$$F = X_1^{\ 0,75} \cdot Y_1^{\ 0,25} + (1 - X_1)^{0,5} \cdot (1 - Y_1)^{0,5}. \qquad (8)$$

Для нахождения стационарных точек приравняем к нулю производные F по X_1 и Y_1:

$$\frac{\partial F}{\partial X_1} = 0{,}25 \cdot X_1^{-0{,}75} \cdot Y_1^{0{,}75} - 0{,}5 \cdot (1 - X_1)^{-0{,}5} \cdot (1 - Y_1)^{0{,}5} = 0. \tag{9a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y_1} = 0{,}75 \cdot X_1^{0{,}25} \cdot Y_1^{-0{,}25} - 0{,}5 \cdot (1 - X_1)^{0{,}5} \cdot (1 - Y_1)^{-0{,}5} = 0. \tag{9b}$$

что после некоторых преобразований приводит к следующей системе относительно X_1 и Y_1:

$$\begin{cases} \left(1 - 2 \cdot X_1 + X_1^2\right) \cdot Y_1^3 = 16 \cdot X_1^3 \cdot \left(1 - 2 \cdot Y_1 + Y_1^2\right) \\ \left(1 - 2 \cdot Y_1 + Y_1^2\right) \cdot 81 \cdot X_1 = 16 \cdot \left(1 - 2 \cdot X_1 + X_1^2\right) \cdot Y_1 \end{cases} \tag{10}$$

Решая данную систему, получаем квадратное уравнение относительно X_1, из которого находим:

$$X_1^{(1)} = \frac{43}{64}, \quad X_1^{(2)} = \frac{11}{32}.$$

Соответствующие значения:

$$Y_1^{(1)} = \frac{43}{96}, \quad Y_1^{(2)} = \frac{11}{18}.$$

Очевидно, что 1-я пара значений с верхним индексом (1) не удовлетворяет условиям (7d), поэтому в качестве искомой получаем точку: $\left(\frac{11}{32}; \frac{11}{18}\right)\cdot$ Найдём соответствующее значение целевой функции (8):

$$F = \left(\frac{11}{32}\right)^{0{,}25} \cdot \left(\frac{11}{18}\right)^{0{,}75} + \left(1 - \frac{11}{32}\right)^{0{,}5} \cdot \left(1 - \frac{11}{18}\right)^{0{,}5} = \left(\frac{11}{32}\right)^{0{,}25} \cdot \left(\frac{11}{18}\right)^{0{,}75} + \left(\frac{21}{32}\right)^{0{,}5} \cdot \left(\frac{7}{18}\right)^{0{,}5} \approx$$

$$0{,}785 \cdot 0{,}691 + 0{,}810 \cdot 0{,}623 \approx 1{,}034$$

Данный пример показывает, что существуют такие распределения средств между двумя предприятиями, при которых значение суммарного выпуска может принимать значение большее 1, т.е. при которых достигается положительный экономический эффект.

В случае произвольных α_i, ($i=1,2$) имеем $F = x_1^{\alpha_1} \cdot y_1^{1-\alpha_1} + (1 - x_1)^{\alpha_2} (1 - y_1)^{1-\alpha_2}$ - функция двух переменных, для которых экстремальная точка (x_1, y_1) находится из системы

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \alpha_1 \cdot x_1^{\alpha_1 - 1} \cdot y_1^{1-\alpha_1} - \alpha_2 \cdot (1 - x_1)^{\alpha_2 - 1} \cdot (1 - y_1)^{1-\alpha_2} = 0. \tag{11a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = (1 - \alpha_1) \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot y_1^{-\alpha_1} - (1 - \alpha_2) \cdot (1 - x_1)^{\alpha_2} \cdot (1 - y_1)^{-\alpha_2} = 0. \tag{11b}$$

Эти соотношения дают три полезных равенства:

$$(1 - \alpha_1) \cdot \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\alpha_1} = (1 - \alpha_2) \cdot \left(\frac{1 - x_1}{1 - y_1}\right)^{\alpha_2} \tag{12}$$

$$\alpha_1 \cdot \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{1-\alpha_1} = \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-y_1}{1-x_1}\right)^{1-\alpha_2} \tag{13}$$

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \cdot \frac{y_1}{x_1} = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2} \cdot \frac{1-y_1}{1-x_1} \,. \tag{14}$$

В итоге удается доказать следующий общий результат.

Теорема 1. Пусть $F = x_1^{\alpha_1} \cdot y_1^{1-\alpha_1} + (1-x_1)^{\alpha_2}(1-y_1)^{1-\alpha_2}$ - функция двух переменных. Тогда значение функции $F(x_1, y_1)$ в точке максимума имеет следующий вид:

$$F = F(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{A^{\alpha_1}} \cdot \left(\frac{\alpha_1(1-\alpha_2)}{\alpha_2(1-\alpha_1)}\right)^{\alpha_1} \cdot (1-A) \cdot \frac{\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_2-\alpha_1} + \\ + \frac{1}{A^{\alpha_2}} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_2-\alpha_1} \cdot (1-A)\right), \tag{15a}$$

где

$$A = \left(\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}\right)^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}} . \tag{15b}$$

Возникает следующий вопрос: можно ли, изменяя величины α_1 и α_2, добиться значений *F*, значительно больших 1? С этой целью авторы провели серию численных экспериментов, из которых стало ясно, что это возможно для двух симметричных ситуаций: при $\alpha_1 \to 1, \ \alpha_2 \to 0$ или при $\alpha_1 \to 0, \ \alpha_2 \to 1$. При этих условиях удаётся достичь значений *F* близких к двум. Доказана следующая теорема:

Теорема 2. Если $\alpha_1 \to 1, \ \alpha_2 \to 0$, то функция *F*, имеющая вид (15a, 15b), стремится к 2.

Из доказанной теоремы можно сделать следующий парадоксальный вывод. Если при распределении ресурсов между двумя экономическими агентами можно одновременно менять технологический уровень данных предприятий (что отражается на величине коэффициента эластичности по фактору капитал), то максимального экономического эффекта можно достигнуть, если для одного из них α_1 близко к 1, а для другого α_2 близко к нулю. При этом удаётся достигнуть величины суммарного выпуска близкой к 2, т. е. достигнуть его увеличения почти в 2 раза.

Далее рассмотрим случай произвольного конечного N.

Теорема 3. Пусть $F_N = \max\limits_{x_1, y_1, \ldots, x_N, y_N} (x_1^{\alpha_1} \cdot y_1^{1-\alpha_1} + \ldots + x_N^{\alpha_N} \cdot y_N^{1-\alpha_N})$,

при следующих ограничениях на переменные:

$x_1 + x_2 + \ldots + x_N = 1, \quad y_1 + y_2 + \ldots + y_N = 1,$

$0 \le x_i, y_i \le 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$

Тогда для $\forall \ N$ максимальное значение $\max(F_{N+1}) = \max(F_N) = 2$.

Теорема доказана с помощью метода математической индукции.

4. Выводы.

В рассматриваемой оптимизационной задаче распределения ресурсов в системе, состоящей из N независимых экономических агентов, существуют очевидные простейшие решения в некоторых предельных случаях. Например, очевидно, что в случае системы, состоящей из одного агента, максимум его выпуска в принятом нами безразмерном виде не может превышать единицы. В случае произвольного N при условии идентичности технологий всех фирм, входящих в систему, выше нами было показано, что и в этом случае при произвольном числе агентов выпуск не превышает единицы.

Увеличение суммарного выпуска может быть достигнуто в системе с различным уровнем технологий (различные коэффициенты эластичности по фактору капитал). При этом удается получить явные оценки в области изменения параметров, предсказанных на основе численных расчетов. В этих областях удается произвести соответствующие разложения и оценить, что суммарный выпуск может достигать значения, равного двум. Таким образом, в общем случае экономической системы, состоящей из N фирм-производителей, удается достичь двукратного экономического выигрыша по сравнению с описанными более простыми системами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назарько О.В. О некоторых фактах теории деформированных мартингалов // Обозрение прикладной и промышленной математики.- М., 2011, т.18, вып.1.

2. Сапожникова А.Г. Пространственное размещение российского крупного бизнеса: особенности и причины //Terra Economicus (Пространство экономики). Т.9, №4, часть 3, 2011. С.180-184.

3. *Stanley M. H. R. et al.* Scaling behavior in the growth of companies // Nature, 1996, V. 379, P. 804-806.

4. *Axtell R.L.* Zipf distribution of U.S. firm sizes // Science, 2001, V. 293, P. 1818-1820.

5. *Leung D., Meh C., Terajima Y.* Productivity in Canada: Does firm size matter? // Bank of Canada Review, 2008 Autumn, P. 5-14.

6. *Rossi-Hansberg E., Wright M.L.J.* Firm size dynamics in the aggregate economy // USC FBE MACROECONOMICS AND INTERNATIONAL FINANCE WORKSHOP, 2004, P. 1-55.

7. *Попов В.Е.* Капитал в экономике Дальнего Востока // Пространственная экономика, 2007. №4.

8. *Audretsch D.B.* The dynamic role of small firms: Evidence from the U.S. // World Bank Report, 2001, P. 1-31.

9. *Dhaene J. et al.* Optimal capital allocation principles // 9th Int. Congress Insurance: Math. & Econ., 2001, Laval, Quebec, Canada, P. 1-24.

10. *Dietz M.D.* Capital income taxation, new firm creation, and the size distribution of firms // IFF-HSG Paper, 2005 January, P. 1-37.

11. *Cefis E., Marsili O., Schenk H.* The effects of mergers and acquisitions on the firm size distribution // J. Evol. Econ., 2009, V. 19, P. 1-20.

12. *Growiec J. et al.* On the size distribution of business firms // Econ. Letters, 2008, V. 98, P. 207-212.