Смирнов Иван Иванович
Smirnov Ivan
Ростовский государственный строительный
Federal public budgetary educational institution of higher education
Rostov state building university
Доцент/Associate Professor
E-mail: iis1@rambler.ru

Захарова Кристина Вадимовна
Zaharova Kristina
Студентка/student
E-mail: ZkristinaZ@yandex.ru

Метод исследования колебаний многомассовых объектов

Method of research of fluctuations of multimass objects

Аннотация: В строительстве часто встречаются объекты, на перекрытиях, которых располагается оборудование и аппаратура, представляющие собой сосредоточенные массы. В данной работе предложен метод расчета таких объектов, основанный на конечно-элементной модели. Она включает совокупность уравнений движения элементов и граничных условий на их стыках. Система уравнений разрешается относительно обобщенных координат, являющихся перемещениями центров сосредоточенных масс.

The Abstract: In the present work we propose a mathematical model to describe an optimal distribution of production factors in the community of several enterprises or firms. It is sown in the work that, controlling the capital and the labor force, it is possible to choose such an optimal distribution of the capital and labor force volumes, between N enterprises (economic agents), which provides a maximum economic effect which is to maximize the total output of this economic system. In the case N=2 there is obtained an analytical expression for the maximum aggregate output, which is confirmed by results of a numerical experiment. It is given an example of a distribution of resources, when this maximum effect can be achieved. In the case of arbitrary finite N analogous result is developed by induction.

Ключевые слова: Динамическая нагрузка, упругопластическая деформация, диаграмма деформирования, энергопоглощение

Keywords: Dynamic loading, uprugoplastichesky deformation, deformation chart, power absorption

***

В технике встречается большое количество объектов, перекрытия которых крепятся на балках различного сечения, а на перекрытиях располагаются различные объекты, представляющие собой сосредоточенные массы. Трудность математического расчета динамики таких систем связана с описанием движения большого количества элементов (аппаратуры и оборудования) и нелинейностью деформирования связей.

В данной работе решение этой проблемы основано на конечно-элементной модели для обобщенного динамического анализа системы. Она включает совокупность уравнений движения элементов и граничных условий на их стыках. Система уравнений разрешается относительно обобщенных координат, являющихся перемещениями центров сосредото- ченных масс.

Предлагаемая методика расчета параметров колебаний может быть использована для различных объектов, имеющих на перекрытиях аппаратуру и оборудование, которые возможно рассматривать как сосредоточенные массы.

Использование предлагаемого метода рассмотрим на примере простой шарнирно опертой балки (расчетная схема рассматриваемых объектов вполне может быть сведена к балке, с размещенными на ней сосредоточенными массами, (оборудование и аппаратура) (рис. 1).

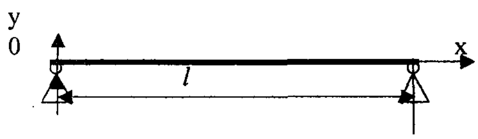

Рис. 1. *Расчетная схема*

Для балки примем справедливость гипотезы плоских сечений и пренебрежем силами инерции частиц при их движении вдоль оси в связи с поворотом сечения. В этом случае для составления дифференциального уравнения движения можно воспользоваться уравнением изогнутой оси балки, в котором в интенсивность внешних сил включим интенсивность сил инерции поперечного движения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

где EJ - жесткость балки при изгибе;

$w(x,t)$ - прогиб оси балки;

ρA - погонная масса балки.

Для этого уравнения должны быть заданы граничные условия, соответствующие условиям закрепления торцов балки или ее участков (если балка имеет переменные поперечное сечение, плотность или сосредоточенные массы). При решении задачи воспользуемся методом разделения переменных Фурье [2,3,4], и будем искать прогиб в форме

$$w(x,t)=X(x)\cdot T(t), \qquad (2)$$

где $X(x)$ - функция только переменного x;

$T(t)$ - функция только переменного t.

Подставляя (2) в (1), после деления на произведение $X(x)\cdot T(t)$, получим:

$$-\frac{1}{X}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)=\rho A\frac{\ddot{T}}{T}=-\omega^2\rho A, \qquad (3)$$

где ω^2 - константа разделения переменных.

Из соотношения (3) вместо (1) получаем два разделенных уравнения:

- для пространственной (форм колебаний) составляющей

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\,\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right) - \omega^2 \rho A X = 0\ , \tag{4}$$

- для временной (амплитуда колебаний) составляющей

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0.$$

Для балки с постоянными характеристиками произведение *EJ* можно вынести за знак дифференцирования. Тогда уравнение для определения форм колебаний примет вид

$$X^{IV} + b^4 X = 0, \tag{5}$$

где $b^4 = \dfrac{\omega^2 \rho A}{EJ}$.

После подстановки в (5) решения в виде $X = Ce^{kx}$ получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - b^4 = 0,$$

корни которого равны

$$\lambda_{1,2} = \pm b = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho A}{EJ}}; \qquad \lambda_{3,4} = \pm ib.$$

Решение уравнения может быть выражено через тригонометрические и гиперболические (показательные) функции аргумента *b* в одном из следующих видов

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx} + C_3 \cos bx + C_4 \sin bx = C_1 ch bx + C_2 sh bx + \\ &+ C_3 \cos bx + C_4 \sin bx = C_1 K_1(bx) + C_2 K_2(bx) + C_3 K_3(bx), \end{aligned} \tag{6}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные;

shbx,chbx - гиперболические функции;

K_1(bx),...,K_4(bx) - функции А.Н. Крылова [1], которые представляют комбинацию гипербо-

лических и тригонометрических функций:

$$S(x) = K(bx) = \frac{1}{2}(chbx + \cos bx);$$

$$T(x) = K_2(bx) = \frac{1}{2}(shbx + \sin bx);$$

$$U(x) = K_3(bx) = \frac{1}{2}(chbx - \cos bx);$$

$$V(x) = K_4(bx) = \frac{1}{2}(shbx - \sin bx). \tag{7}$$

Удобства пользования этими функциями заключаются в том, что их последовательные производные связаны между собой зависимостями, представленными в таблице 1

Таблица 1

Производные функций Крылова

Функции Крылова	Производные от функций Крылова			
	первая	вторая	третья	четвертая
K_1	bK_4	b^2K_3	b^3K_2	b^4K_1
K_2	bK_1	b^2K_4	b^3K_3	b^4K_2
K_3	bK_2	b^2K_1	b^3K_4	b^4K_3
K_4	bK_3	bK_2	b^3K_1	b^4K_4

Причем, при $bx=0$: $K_1(0)=1$; $K_1'(0)=0; K_1''(0)=0; K_1'''(0)=0.$

$$K_2(0)=0; K_2'(0)=0; K_2''(0)=0; K_2'''(0)=0.$$

$$K_3(0)=0; K_3'(0)=0; K_3''(0)=0; K_3'''(0)=0. \tag{8}$$

$$K_4(0)=0; K_4'(0)=0; K_4''(0)=0; K_4'''(0)=0.$$

Такие свойства функций Крылова упрощают выполнение граничных условий, так как в этом случае постоянные $\boldsymbol{C_1,...,C_4}$ связаны с амплитудными значениями прогибов w, углов поворота w', моментов $M(x) = EJw''$ и поперечных сил $Q = EIw^{\wedge}{}''$. Эти связи получаются из (6) с учетом граничных условий.

$$C_1 = w(0); C_2 = \frac{1}{b}w'(0); C_3 = \frac{1}{EJb^2}w''(0); C_4 = \frac{1}{EJb^3}w'''(0). \tag{9}$$

Для определения чисел b(собственных частот ω) используются граничные условия. На каждом конце балки имеются два граничных условия, зависящих от способа закрепления концов балки (участка балки). Следует отметить, что при любом способе закрепления торцов балки граничные условия приводят к системе четырех однородных алгебраических уравнений относительно констант $C_1,...,C_4$. Эти уравнения позволяют определить собственные частоты и собственные числа из условия равенства нулю определителя этой системы, а также выразить три константы С через одну и записать форму колебаний в удобном виде.

При наличии на балке сосредоточенных масс или при условии, что ее параметры - кусочно-постоянные характеристики, для каждого участка балки с постоянными по длине параметрами вводится своя локальная система координат (рис. 2).

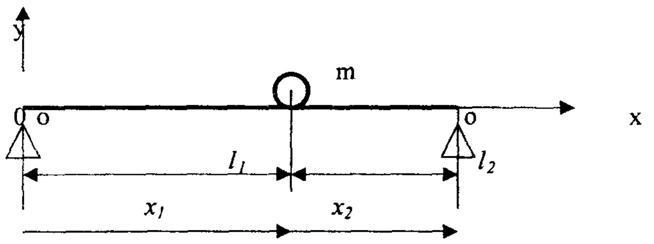

Рис. 2. *Расчетная схема*

Уравнения собственных частот в этом случае можно получить следующим способом.

Решение для каждого участка записывается в виде

$$X(x) = w(0)K_1(bx) + \frac{1}{b}w'(0)K_2(bx) + \frac{M(0)}{EJb^2}K_3(bx) + \frac{Q(0)}{EJb^3}K_4(bx). \quad (10)$$

Две константы, входящие в уравнение для первого участка, могут быть получены из краевых условий при $\boldsymbol{x_1 = 0}$. Условия сопряжения (непрерывности перемещений и равновесия узла) при переходе от одного участка к другому позволяют последовательно выразить все константы на любом участке через две константы первого участка, оставшиеся неопределенными.

Удовлетворение условий на последнем участке при $x_п = l_п$ для неопределенных постоянных дает линейную однородную систему алгебраических уравнений, из условия существования ненулевого решения которой, следует уравнение частот.

При использовании данного метода для рассмотрения поперечных колебаний балок с закрепленными на них сосредоточенными массами, для составления дифференциального уравнения движения можно воспользоваться уравнением изогнутой оси балки, в котором в интенсивность внешних сил включим интенсивность сил инерции поперечного движения (рис. 3).

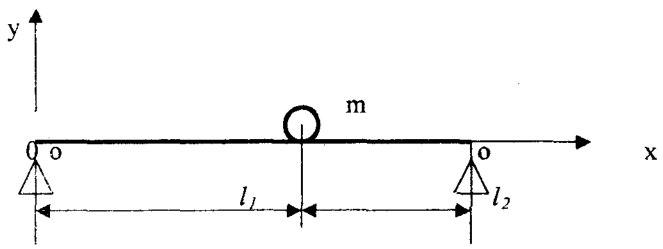

Рис. 3. *Расчетная схема*

Здесь балка разбивается на два самостоятельных участка, с длинами l_1 и l_2

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \right) + \rho A_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0, \qquad (11)$$

где EJ_i - жесткость *i*-го участка балки при изгибе;

w_i-(x,t) – прогиб *i*-го участка оси балки;

pA_i - погонная масса *i*-го участка балки.

Граничные условия для данной балки имеют вид:

$$\begin{aligned} &x_1 = 0; w_1(0) = 0; EJw''(0) = 0. \\ &x_1 = l_1; x_2 = 0; w_1(l_1) = w_2(0); w_1'(l_1) = w_2'(0). \\ &x_2 = l_2; w_2(l_2) = (0); EJ_2 w_2''(l_2) = 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

Формы собственных колебаний запишем с использованием функций Крылова

$$X_i(x) = C_{i1}K_1(b_i x) + C_{i2}K_2(b_i x) + C_{i3}K_3(b_i x) + C_{i4}K_4(b_i x), \ \ i = \overline{1,2}. \qquad (13)$$

Используя выражение (12), граничные условия и условия стыковки (11), получим уравнения, из которых составляются уравнения частот.

Чтобы решение полученной системы уравнений было нетривиальным, нужно, чтобы ее определитель, составленный из коэффициентов при произвольных постоянных C_{ik} и неизвестных инерционных силах, был равен нулю.

По этому определителю можно вычислить собственные частоты и собственные числа ω_s и b_{is}. Причем собственные числа будут различными для каждого участка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. АН СССР, 1931.

2. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев, 1975.

3. Снитко Н.К. Динамика сооружений. М., 1960

4. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М., 1979.